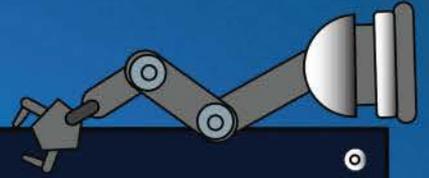


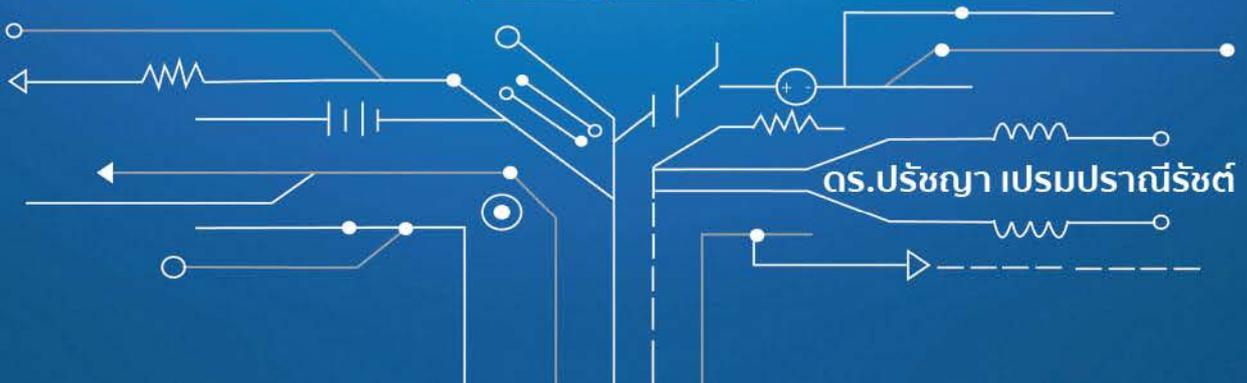
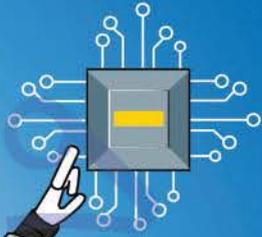
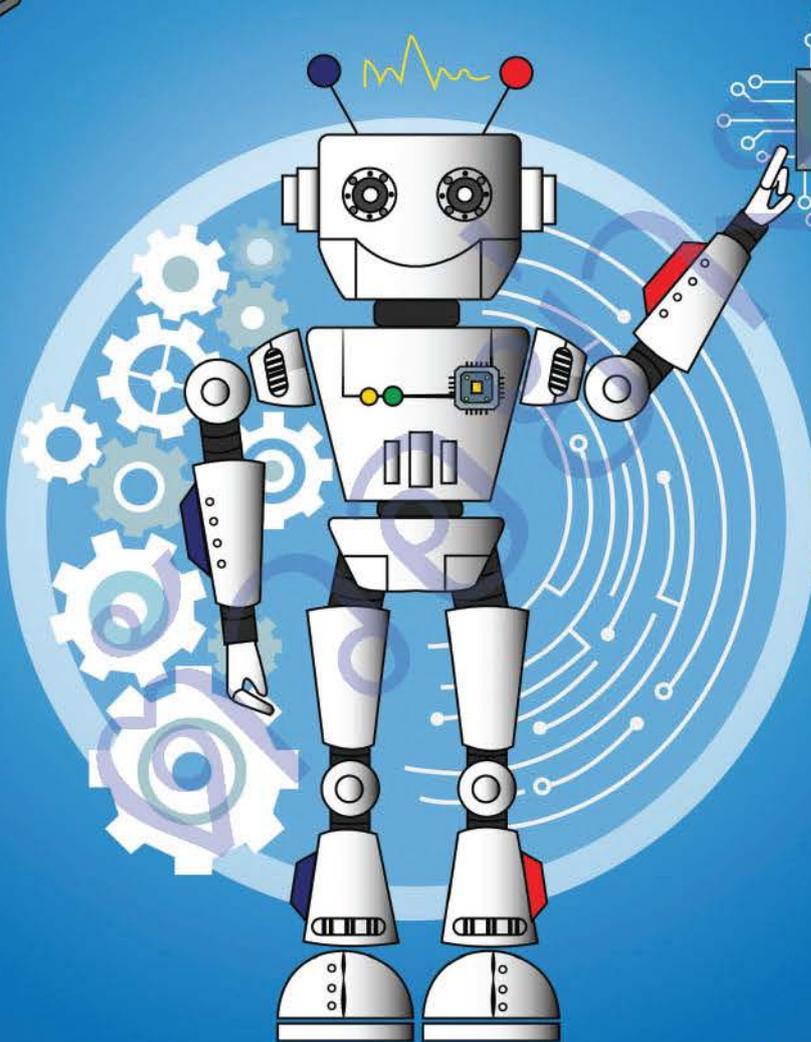
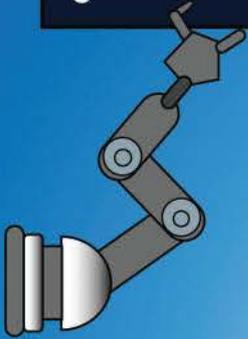


สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์



พลศาสตร์ของระบบและการควบคุม

SYSTEM DYNAMICS AND CONTROLS



สารบัญ

สารบัญตาราง		(8)
สารบัญรูป		(9)
คำนำ		(25)
บทที่ 1	ระบบพลศาสตร์ทางกลสำหรับการเคลื่อนที่เชิงเส้น	1
	1.1 ระบบพลศาสตร์	2
	1.2 ระบบพลศาสตร์ทางกลสำหรับการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น	4
	1.3 องค์ประกอบแหล่งต้นทางของระบบทางกลเชิงเส้น	22
บทที่ 2	ระบบพลศาสตร์ทางกลสำหรับการเคลื่อนที่เชิงมุม	28
	2.1 นิยามของตัวแปรการถ่ายทำกำลังของระบบทางกลเชิงมุม	29
	2.2 นิยามขององค์ประกอบพื้นฐานของระบบทางกลเชิงมุม	32
	2.3 องค์ประกอบของแหล่งต้นทางของระบบทางกลเชิงมุม	46
บทที่ 3	ระบบพลศาสตร์ทางไฟฟ้า	53
	3.1 นิยามของตัวแปรการถ่ายทำกำลังของระบบทางไฟฟ้า	54
	3.2 นิยามขององค์ประกอบพื้นฐานของระบบทางไฟฟ้า	57
	3.3 องค์ประกอบแหล่งต้นทางของระบบทางไฟฟ้า	63
	3.4 การวิเคราะห์ระบบพลศาสตร์ทางไฟฟ้าเพื่อเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ของวงจรไฟฟ้า	66
	3.5 การหาวงจรที่เทียบเคียงกัน (Equivalent Circuit) สำหรับวงจรที่มีตัวต้านทานเพียงอย่างเดียว	73
	3.6 ผลตอบสนองทางความถี่	76
บทที่ 4	ระบบพลศาสตร์ของไหลสำหรับของไหลที่เคลื่อนที่	84
	4.1 นิยามของตัวแปรการถ่ายทำกำลังของของไหล	85
	4.2 นิยามขององค์ประกอบพื้นฐานระบบของไหล	88
	4.3 องค์ประกอบของแหล่งต้นทางของของไหล	98
	4.4 การสร้างแบบจำลองและการสร้างสมการทางพลศาสตร์ของระบบของไหล	101

บทที่ 5	ระบบพลศาสตร์ของพลังงานความร้อน	112
	5.1 นิยามของตัวแปรการถ่ายเทพลังงานความร้อน	113
	5.2 นิยามขององค์ประกอบพื้นฐานของระบบพลังงานความร้อน	114
	5.3 แหล่งกำเนิดพลังงานความร้อน	123
บทที่ 6	ผลตอบสนองทางเวลาของระบบพลศาสตร์อันดับที่ 1	132
	6.1 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของระบบพลศาสตร์	133
	6.2 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของระบบอันดับที่ 1 เมื่อมีอินพุตจากภายนอกเป็นฟังก์ชันแบบอิมพัลส์	143
	6.3 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของระบบอันดับที่ 1 เมื่อมีอินพุตจากภายนอกเป็นฟังก์ชันแบบสเต็ป	146
	6.4 เทคนิคในการหาค่าคงที่ของเวลา (τ) ของระบบอันดับที่ 1 จากผลการทดลองหรือข้อมูลที่วัดได้	151
บทที่ 7	ผลตอบสนองทางเวลาของระบบพลศาสตร์อันดับที่ 2	157
	7.1 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของระบบอันดับที่ 2 ที่ไม่มีความหน่วงเมื่อไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำ	158
	7.2 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของระบบอันดับที่ 2 ที่มีความหน่วงเมื่อไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำ	164
	7.3 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของระบบอันดับที่ 2 เมื่อมีแรงจากภายนอกมากระทำ	172
บทที่ 8	ผลตอบสนองทางความถี่ของระบบพลศาสตร์อันดับที่ 1	189
	8.1 ความหมายของผลตอบสนองทางความถี่	190
	8.2 การคำนวณหาผลตอบสนองทางความถี่ของระบบทางพลศาสตร์อันดับที่ 1	193
	8.3 ผลกระทบของตัวแปรค่าคงที่ทางเวลาต่อผลตอบสนองทางความถี่ของระบบพลศาสตร์อันดับ 1	212
บทที่ 9	ผลตอบสนองทางความถี่ของระบบทางพลศาสตร์อันดับที่ 2	219
	9.1 ผลตอบสนองทางความถี่ของระบบทางพลศาสตร์อันดับที่ 2 ที่ไม่มีค่าความหน่วง (หรือ $\zeta = 0$)	220
	9.2 ผลตอบสนองทางความถี่ของระบบทางพลศาสตร์อันดับที่ 2 ที่มีค่าความหน่วง (หรือ $\zeta \neq 0$)	233
	9.3 ผลกระทบของตัวแปรค่าคงที่ทางเวลาต่อผลตอบสนองทางความถี่ของระบบพลศาสตร์อันดับที่ 2	243

บทที่ 10	การแปลงลาปลาซ และฟังก์ชันถ่ายโอน	250
10.1	การแปลงลาปลาซ และการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ด้วยการแปลงลาปลาซ	251
10.2	การแก้หาผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยการแปลงลาปลาซ	256
10.3	การหาฟังก์ชันถ่ายโอน และคุณสมบัติของฟังก์ชันถ่ายโอน	260
บทที่ 11	สมการสถานะ/สเตทสเปซสำหรับระบบแบบเชิงเส้นที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา และความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันถ่ายโอนและสมการสถานะ	280
11.1	ระบบแบบเชิงเส้นที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา	282
11.2	การแปลงจากฟังก์ชันถ่ายโอนไปเป็นสมการสถานะ	289
11.3	การแปลงจากสมการสถานะไปเป็นฟังก์ชันถ่ายโอน	293
บทที่ 12	การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบจากฟังก์ชันถ่ายโอนหรือจากสมการสถานะ	305
12.1	การหาโพลและซีโรของระบบจากฟังก์ชันถ่ายโอน และความสัมพันธ์กับเสถียรภาพของระบบ	306
12.2	การหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงจากสมการสถานะ และความสัมพันธ์กับเสถียรภาพของระบบ	311
12.3	เสถียรภาพของระบบพลศาสตร์ในรูปทั่วไป	318
บทที่ 13	การควบคุมแบบป้อนกลับและแบบป้อนไปข้างหน้า	331
13.1	นิยามแผนภาพบล็อกของระบบควบคุมแบบป้อนกลับ และค่าความผิดพลาดของการป้อนกลับ	333
13.2	การกระทำของระบบควบคุมแบบแปรผันตรง, อนุพันธ์ และปริพันธ์	336
13.3	ระบบการควบคุมแบบป้อนไปข้างหน้า	348
บทที่ 14	การจำลองผลตอบสนองทางเวลาด้วยโปรแกรม MATLAB ของระบบที่อยู่ในรูปฟังก์ชันถ่ายโอนและสเตทสเปซ	365
14.1	การจำลองและวิเคราะห์ประสิทธิภาพของระบบพลศาสตร์โดยใช้โปรแกรม MATLAB	366
14.2	การจำลองและวิเคราะห์ประสิทธิภาพของระบบในรูปฟังก์ชันถ่ายโอน	369
14.3	การจำลองและวิเคราะห์ประสิทธิภาพของระบบในรูปสมการสถานะ และสมการเอาต์พุต	383

บทที่ 15	การประยุกต์ใช้ระบบการควบคุมแบบป้อนกลับและป้อนไปข้างหน้า สำหรับกลไกการกัม-เงย ของเลเซอร์สแกนเนอร์ในทางปฏิบัติ โดยใช้ไมโครคอนโทรลเลอร์ Arduino	404
15.1	อุปกรณ์และเซนเซอร์ที่ใช้ในระบบควบคุมแบบป้อนกลับ สำหรับกลไกการกัม-เงย และรักษาองศาการเอียงซ้าย-ขวา ของเลเซอร์สแกนเนอร์	405
15.2	การออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับและป้อนไปข้างหน้า สำหรับกลไกการกัม-เงย และรักษาองศาการเอียงซ้าย-ขวา ของเลเซอร์สแกนเนอร์ด้วยไมโครคอนโทรลเลอร์ Arduino	410
15.3	ผลการทดสอบการควบคุมการทำงานของมอเตอร์ในทั้ง 2 แกน สำหรับกลไกการกัม-เงย และรักษาองศาการเอียงซ้าย-ขวา ของเลเซอร์สแกนเนอร์	412
บรรณานุกรม		416
ดัชนี		418

สารบัญตาราง

ตารางที่ 1-1	นิยามของสถานะภายในระบบและแรงกระตุ้นจากภายนอกของระบบประเภทต่างๆ	2
ตารางที่ 10-1	การแปลงลาปลาซและการแปลงลาปลาซแบบผกผัน	255

คำนำ

ผู้เขียนได้เรียบเรียงเนื้อหาทั้งหมดในหนังสือเล่มนี้จากเอกสารประกอบการเรียนและคำสอนในวิชาพลศาสตร์ของระบบและการควบคุม (System Dynamics and Controls) รหัส 04-310-601 ซึ่งเป็นรายวิชาระดับปริญญาโท ในภาคเรียนที่ 1 ชั้นปีที่ 1 ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ซึ่งผู้เขียนได้ใช้เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ในการสอนวิชาพลศาสตร์ของระบบและการควบคุม (System Dynamics and Controls) แก่นักศึกษาระดับปริญญาโท ชั้นปีที่ 1 เฉพาะในภาคเรียนที่ 1 ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 จนถึงปีการศึกษา 2561 ซึ่งลักษณะรายวิชาของวิชานี้ประกอบไปด้วยเนื้อหาโดยสรุปย่อตั้งหัวข้อต่อไปนี้อย่างกว้างขวาง ครอบคลุมทั้ง การวิเคราะห์ระบบพลศาสตร์แบบเชิงเส้น การวิเคราะห์ทางความถี่ เวลา และสเปซ การสร้างแบบจำลอง การจำลองสถานการณ์ และการควบคุมระบบพลศาสตร์ การประยุกต์ทฤษฎีระบบพลศาสตร์ในการวิเคราะห์ระบบ เช่น ระบบทางกล ระบบทางไฮดรอลิก ระบบทางเทอร์โมไดนามิกส์ ระบบของอุปกรณ์ทำงานทางไฟฟ้า การออกแบบระบบควบคุมป้อนกลับ การประยุกต์ใช้คอมพิวเตอร์เพื่อการออกแบบระบบควบคุมสำหรับระบบพลศาสตร์

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่ออาจารย์ผู้สอนและนักศึกษาในมหาวิทยาลัยทั้งระดับปริญญาตรีและปริญญาโท และผู้อ่านทั่วไปที่สนใจอยากเรียนรู้เพิ่มเติมในด้านระบบพลศาสตร์ประเภทต่างๆ และการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากระบบพลศาสตร์ในทางกายภาพ รวมถึงทฤษฎีที่นำมาช่วยในการวิเคราะห์ระบบและออกแบบระบบควบคุมสำหรับระบบพลศาสตร์ประเภทต่างๆ โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์และไมโครคอนโทรลเลอร์ ทั้งนี้ผู้เขียนขอขอบคุณนักศึกษาปริญญาโท สาขาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรีทุกรุ่นตั้งที่กล่าวมาในการช่วยชี้ข้อบกพร่องเพื่อนำมาปรับปรุงเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้เรื่อยๆ และขอขอบคุณ คุณดวงรัตน์ เมฆเคลื่อน ที่ได้ช่วยพิมพ์สูตรในบทที่ 1-13 และขอขอบคุณ คุณกาญจพรพรหม เมฆอรุณ ที่ช่วยออกแบบปกหน้า-หลังของหนังสือเล่มนี้พร้อมทั้งวาดรูปประกอบเนื้อหาในบทต่างๆ และโดยเฉพาะอย่างยิ่งผู้เขียนขอขอบคุณทุกกำลังใจจากครอบครัวด้วย

หากมีข้อบกพร่องหรือขาดความสมบูรณ์ประการใด ผู้เขียนยินดีรับฟังข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะ เพื่อจะได้นำไปปรับปรุงให้หนังสือเล่มนี้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้นต่อไป

ผศ.ดร.ปรัชญา เปรมปราณีรัชต์

11 พฤษภาคม 2562

1.1 ระบบพลศาสตร์ (Dynamic System):

เป็นการศึกษาระบบการทำงานที่เปลี่ยนแปลงคุณสมบัติหรือสถานะของระบบตามเวลา ซึ่งจะขึ้นกับ 1) เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) เมื่อเวลา $t = 0$ และ 2) แรงจากภายนอก (External forcing) ที่มากกระทำต่อระบบ ถ้าทราบเงื่อนไขเริ่มต้นและแรงจากภายนอก จะสามารถบ่งบอกถึงสถานะของระบบในเวลาต่าง ๆ ที่มากกว่าศูนย์ ($t > 0$) ได้อย่างสมบูรณ์ โดยที่ระบบทางพลศาสตร์สามารถแบ่งออกได้เป็น 4 ประเภท หลักๆ ได้ดังในตารางที่ 1-1 โดยจะให้นิยามของตัวแปรสถานะภายในระบบต่างๆ และแรงจากภายนอกที่มากกระทำในระบบแต่ละประเภทไว้ด้วย

ตารางที่ 1-1 นิยามของสถานะภายในระบบและแรงกระตุ้นจากภายนอกของระบบประเภทต่างๆ

ระบบ (System)	สถานะภายใน (Internal State)	แรงกระตุ้นจากภายนอก (External Excitation)
1) ระบบทางกล (Mechanical system) 1.1 การเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น (Translation motion) 1.2 การเคลื่อนที่แบบเชิงมุม (Rotation motion)	ระยะการเคลื่อนที่ (Displacement) องศาการหมุน (Angle)	แรง (Force) แรงบิด (Torque) หรือ โมเมนต์ (Moment)
2) ระบบทางไฟฟ้า (Electrical system)	ความต่างศักย์ (Voltage)	แหล่งจ่ายความต่างศักย์ (Voltage source)
3) ระบบของไหล (Fluid system)	ความเร็ว (Velocity) หรือ ความดัน (Pressure)	อัตราการไหลเชิงปริมาตร (Volume flow rate)
4) ระบบการถ่ายเทพลังงานความร้อน (Thermal system)	อุณหภูมิ (Temperature)	ฟลักซ์ความร้อน (Heat flux)

1.1.1 ขั้นตอนในการแก้ปัญหาของระบบทางพลศาสตร์

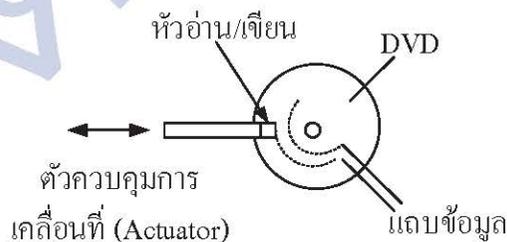
จะสามารถแบ่งออกได้เป็น 4 ขั้นตอนหลัก ดังนี้ คือ

- 1) การกำหนดนิยาม (Definition) ของตัวแปรต่างโดยระบุว่าจะอะไรคือ อินพุต (Input), เอาต์พุต (Output), สถานภาพหรือเงื่อนไขของระบบ (System constraints)
- 2) การจำลองระบบด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ (Mathematical modeling) ซึ่งเป็นการแปลงจากปัญหาทางกายภาพของระบบ (Physical system) ให้เป็นความ สัมพันธ์ของ คุณสมบัติต่างๆ ในรูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์

- 3) การวิเคราะห์ระบบ (System analysis) ในการแก้สมการของระบบเพื่อหาผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติหรือสถานะ (State) ของระบบตามเวลา โดยที่สมการของระบบอาจเขียนอธิบายในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) หรือในรูปสมการสถานะ (State equation)
- 4) การตีความหมายของผลลัพธ์ (Result interpretation) เพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้ไปช่วยในการออกแบบหรือปรับปรุงให้มีประสิทธิภาพดียิ่งขึ้น และจะช่วยให้ผู้วิเคราะห์มีความเข้าใจที่ลึกซึ้งของการทำงานของระบบรวมทั้งหมดด้วย

โดยมีข้อสังเกตความแตกต่างระหว่างระบบพลศาสตร์ (Dynamics system) และระบบสถิตศาสตร์ (Static system) คือ ถ้าเป็นระบบพลศาสตร์นั้นจะอธิบายได้โดยสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) ที่มีการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติหรือสถานะของระบบตามเวลา แต่ทว่าระบบสถิตศาสตร์นั้นจะอธิบายได้โดยสมการพีชคณิต (Algebraic equation) ที่ไม่ขึ้นกับเวลาเนื่องจากระบบนั้นคงที่หรือหยุดนิ่งอยู่กับที่นั่นเอง ลองพิจารณาตัวอย่างของระบบพลศาสตร์ที่ซับซ้อนเช่นในเครื่องเล่นดีวีดี (DVD) ว่าเป็นระบบพลศาสตร์ประเภทใดบ้างดังในตัวอย่างที่ 1.1

ตัวอย่างที่ 1.1 สำหรับระบบการอ่าน/เขียนข้อมูลจากแผ่นดิสก์หรือดีวีดี (DVD) ที่หมุนด้วยความเร็วคงที่ดังแสดงในรูปที่ 1-1 โดยหัวอ่าน/เขียน ของเครื่องเล่นดีวีดี จะสามารถเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรงจากแถบข้อมูลที่ 1 ไปยังแถบข้อมูลที่ 2 บนแผ่นดีวีดี ลองพิจารณาว่าในระบบการอ่าน/เขียนข้อมูลจากแผ่นดีวีดีนี้ประกอบด้วยระบบประเภทใดบ้าง และมีตัวแปรอะไรบ้างที่เป็นอินพุตและเอาต์พุตของระบบนี้



รูปที่ 1-1 ระบบการอ่าน/เขียนข้อมูลจากแผ่นดิสก์

ผลตอบสนองทางเวลาของระบบพลศาสตร์อันดับที่ 2 (Time response of second-order dynamic systems)

ระบบพลศาสตร์อันดับที่ 2 ในรูปทั่วไปจะสามารถเขียนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 ดังสมการที่ (7-1)

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = f(t) \quad (7-1)$$

ผลลัพธ์หรือผลตอบสนองของระบบพลศาสตร์อันดับ 2 นี้จะสามารถแบ่งได้เป็น 3 ประเภทหลักๆ ดังนี้

- 1) ระบบที่มีผลตอบสนองแบบไม่มีความหน่วง เมื่อไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำ (Free undamped response) ซึ่งจะสามารถอธิบายพฤติกรรมด้วยพารามิเตอร์เพียงตัวเดียว คือ ความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency) ที่แทนด้วยสัญลักษณ์ ω_n
- 2) ระบบที่มีผลตอบสนองแบบมีความหน่วง เมื่อไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำ (Free damped response) ซึ่งจะสามารถอธิบายพฤติกรรมด้วยพารามิเตอร์เพียง 2 ตัว คือ ความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency หรือ ω_n) และอัตราส่วนความหน่วง (Damping ratio) ที่แทนด้วยสัญลักษณ์ ζ
- 3) ผลตอบสนองของระบบ เมื่อมีอินพุตหรือแรงจากภายนอกมากระทำ (Forced response)

7.1 การแก้มการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 ที่ไม่มีความหน่วง เมื่อไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำ

ในกรณีที่ระบบนั้นไม่มีค่าความหน่วงนั้นจะสามารถละทิ้งพจน์ (a_1) ที่เชื่อมโยงกับอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของตัวแปร (\dot{y}) ในระบบ ดังเช่น ในระบบทางกลก็ไม่จำเป็นต้องนำแรงเสียดทานในระบบมาคิด หรือ ในระบบทางของไหลก็จะละทิ้งค่าความสามารถในการสะสมพลังงานศักย์ในระบบได้ ดังนั้นในระบบที่แทนด้วยตัวแปร (x) จะมีรูปทั่วไปของสมการสำหรับผลตอบสนองแบบไม่มีความหน่วงและไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำ ดังในสมการที่ (7-2)

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (7-2)$$

เมื่อลองแทนผลลัพธ์ในรูปทั่วไปจากสมการที่ (6-7) ที่เป็น $x = Ce^{rt}$ โดยที่ C และ r เป็นค่าคงที่ที่ไม่รู้ค่า กลับเข้าไปในสมการที่ (7-2) จะได้ความสัมพันธ์เป็น

$$(r^2 + \omega_n^2) Ce^{rt} = 0$$

แต่ผลลัพธ์ในรูปทั่วไป $Ce^{rt} \neq 0$ ดังนั้นพจน์ $(r^2 + \omega_n^2) = 0$ จะมีผลลัพธ์เป็น

$$r = \pm \omega_n j \tag{7-3}$$

$$x(t) = C_1 e^{\omega_n j t} + C_2 e^{-\omega_n j t} \text{ หรือ } x(t) = A_0 \cos(\omega_n t) + B_0 \sin(\omega_n t) \tag{7-4}$$

โดยที่มีตัวแปร A_0 และ B_0 เป็นค่าคงที่ที่ไม่รู้ค่า ฉะนั้นจึงจำเป็นต้องใช้เงื่อนไขเริ่มต้นจำนวน 2 เงื่อนไขเพื่อช่วยแก้หาค่าคงที่ทั้ง 2 ตัวแปรนี้ เมื่อให้เงื่อนไขเริ่มต้นของตำแหน่ง $x(t=0) = x_0$ จะได้

$$x_0 = A_0 \times 1 + B_0 \times 0 = A_0 \text{ หรือ } A_0 = x_0 \tag{7-5}$$

เมื่อให้เงื่อนไขเริ่มต้นของความเร็ว $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = v_0$ จะได้

$$\dot{x}_0 = -\omega_n A_0 \times \sin(0) + \omega_n B_0 \times \cos(0) = \omega_n B_0 \text{ หรือ } B_0 = \dot{x}_0 / \omega_n \tag{7-6}$$

เมื่อแทนค่า A_0 และ B_0 จากสมการที่ (7-5) และ (7-6) ไปยังผลลัพธ์ในรูปทั่วไปในสมการที่ (7-4) จะได้

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + (\dot{x}_0 / \omega_n) \sin(\omega_n t) \tag{7-7}$$

ซึ่งเป็นการรวมกันของพจน์ระยะทางตอนเริ่มต้น x_0 และความเร็วตอนเริ่มต้น \dot{x}_0 ที่เป็นฟังก์ชันของฟังก์ชันแบบไซน์ (Sine) และโคไซน์ (Cosine) โดยที่ค่าความถี่ธรรมชาติ $\omega_n = 2\pi/T_n = 2\pi f_n$ เมื่อ T_n และ F_n เป็นคาบและความถี่ในการแกว่งของผลตอบสนองเชิงเวลา ตามลำดับ ดังนั้นจะสามารถเขียนสมการที่ (7-7) ให้เป็นสมการที่อยู่ในรูปของ ขนาด (Amplitude) และ เฟส (Phase) ของฟังก์ชันโคไซน์ (Cosine) เพียงอย่างเดียว โดยการประยุกต์ใช้คุณสมบัติของตรีโกณมิติ $\cos(\omega_n t - \phi) = \cos(\omega_n t)\cos(\phi) + \sin(\omega_n t)\sin(\phi)$ ได้ดังนี้

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) \tag{7-8}$$

โดยที่มีขนาด (Amplitude หรือ A) ของการแกว่งกลับไปมา เป็น

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0 / \omega_n)^2} \tag{7-9}$$

และมีมุมเฟส (Phase หรือ ϕ) ของการแกว่งกลับไปมาที่เยื้องจากเวลาเริ่มต้น เป็นมุม

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n x_0} \right) \tag{7-10}$$

7.1.1 ระบบทางกลแบบเชิงเส้น (Linear or translational mechanical system)

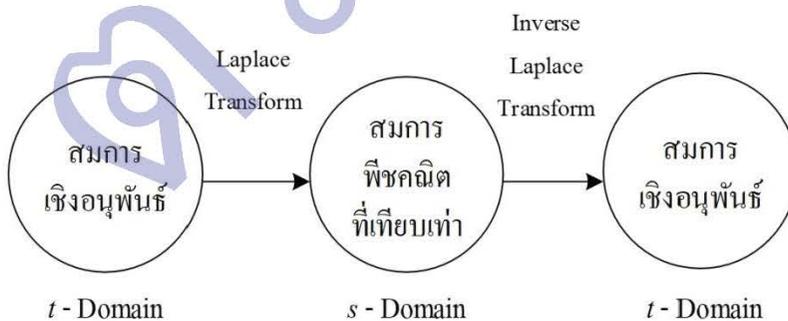
ถ้าพิจารณาระบบเชิงเส้นอย่างง่ายที่ประกอบด้วยก้อนวัสดุที่มีมวล m ที่ติดกับสปริงที่มีค่าสัมประสิทธิ์ของสปริงเป็น k โดยไม่มีแรงเสียดทานหรือค่าความหน่วงในระบบ โดยในตอนเริ่มต้นมวลจะถูกดึงออกไปเป็นระยะ x_0

การแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) และฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer Function)

ในบทนี้จะกล่าวถึงการประยุกต์ใช้การวิเคราะห์เชิงความถี่ หรือที่เรียกว่าการวิเคราะห์ในโดเมนของความถี่ (Frequency domain) มาใช้ช่วยในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ด้วยเทคนิคการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) เพื่อนำไปสู่การหาผลตอบสนองทางเวลา (Time response) และการหาฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ของระบบ เพื่อที่จะนำไปใช้ในการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ และการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับ (Feedback control) ในบทต่อไป

10.1 การแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) และการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ด้วยการแปลงลาปลาซ

การแปลงลาปลาซ (Laplace transform) เป็นเทคนิคที่ใช้ในการแปลงฟังก์ชันหรือสมการเชิงอนุพันธ์ในโดเมนของเวลา (Time domain หรือที่เรียกย่อๆ ว่า t -domain) ให้เป็นฟังก์ชันหรือสมการพีชคณิต (Algebraic equation) ที่เทียบเท่าในโดเมนของความถี่ (Frequency domain หรือที่เรียกย่อๆ ว่า s -domain) ซึ่งการแก้สมการพีชคณิตในโดเมนของความถี่จะกระทำได้อย่างกว่าการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ในโดเมนเวลา เมื่อได้ผลลัพธ์ของสมการพีชคณิตในโดเมนของความถี่แล้วก็จะสามารถแปลงกลับมาเป็นสมการหรือผลลัพธ์ในโดเมนของเวลาได้ โดยใช้การแปลงลาปลาซแบบผกผัน (Inverse laplace transform) ดังอธิบายด้วยแผนภาพในรูปที่ 10-1



รูปที่ 10-1 การเชื่อมโยงในการแก้สมการในโดเมนของเวลา (t -domain) และโดเมนของความถี่ (s -domain) ด้วยการแปลงแบบลาปลาซ (Laplace transform) และด้วยการแปลงลาปลาซแบบผกผัน (Inverse Laplace transform)

นิยาม การแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ของฟังก์ชัน $f(t)$ ใดๆ ในโดเมนของเวลา (t) ให้เป็นฟังก์ชัน $F(s)$ ใดๆ ในโดเมนของความถี่ (s) จะสามารถอธิบายด้วยการหาปริพันธ์แบบไม่จำกัดขอบเขต (indefinite integrals) ที่คูณด้วยฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล (Exponential function) ของตัวแปร s ซึ่งจะให้ค่าเป็นฟังก์ชันที่แทนด้วยตัวอักษรพิมพ์ใหญ่ของตัวแปร s เมื่อตัวแปร s ใช้แทนการเปลี่ยนแปลงทางความถี่เชิงจินตภาพ ดังแสดงในสมการที่ (10-1)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (10-1)$$

ดังในตัวอย่างต่อไปนี้จะทำการประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซ (Laplace transform) กับฟังก์ชันในรูปแบบต่างๆ กัน

ตัวอย่างที่ 10.1 การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันแบบอิมพัลส์ (Impulse function) หรือที่แทนด้วยสัญลักษณ์ $\delta(t)$ หรือที่เรียกว่า ฟังก์ชันแบบเดลต้า

วิธีทำ

คุณสมบัติของฟังก์ชันแบบเดลต้า ($\delta(t)$) จะมีค่าเฉพาะในช่วงระยะเวลาสั้นๆ ระหว่าง 0- ถึง 0+ และ มีค่าเป็นศูนย์ในช่วงเวลาอื่น และจะทำการประยุกต์ใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันแบบเดลต้า ดังที่กล่าวในหัวข้อที่ 6.2 ในบทที่ 6 ดังนั้นเมื่อประยุกต์ใช้นิยามของการแปลงลาปลาซด้วยสมการที่ (10-1) จะเขียนได้เป็น

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s(0)} = 1 \quad (10-1-1)$$

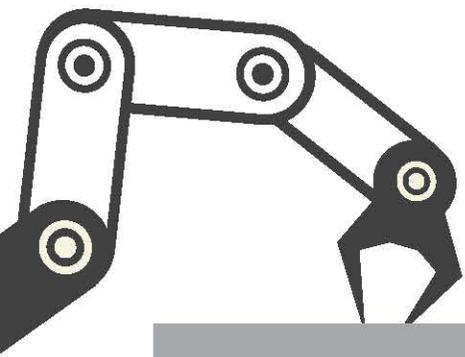
ตัวอย่างที่ 10.2 การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันแบบขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (Unit step function) หรือ ที่แทนด้วยสัญลักษณ์ $u(t)$

วิธีทำ

คุณสมบัติของฟังก์ชันแบบขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (Unit step function) จะมีค่าเป็นศูนย์ในช่วงก่อนเวลา 0 และมีค่าเปลี่ยนเป็นหนึ่งอย่างฉับพลัน เมื่อเวลามากกว่าเท่ากับศูนย์ ดังที่อธิบายในหัวข้อที่ 6.3 ในบทที่ 6 ดังนั้น เมื่อประยุกต์ใช้นิยามของการแปลงลาปลาซด้วยสมการที่ (10-1) จะเขียนได้เป็น

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s} (e^{-(\infty t)} - e^{-(0t)}) = \frac{1}{s} \quad (10-2-1)$$

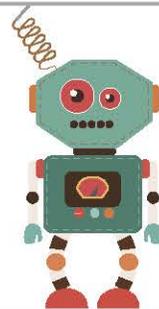
ตัวอย่างที่ 10.3 การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล (Exponential function) ที่ลดลงตามเวลา หรือที่แทนด้วยสัญลักษณ์ e^{-at} เมื่อค่าคงที่ a แทนอัตราการลดลง



บทที่ 11 สมการสถานะ/สเปกตรัมสำหรับระบบแบบเชิงเส้น ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา และความสัมพันธ์ระหว่าง ฟังก์ชันถ่ายโอนและสมการสถานะ

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

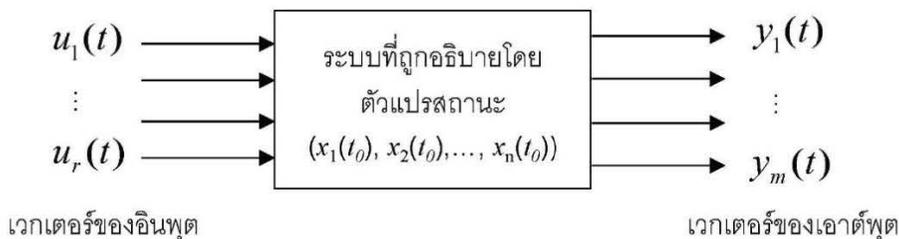
- 11.1 รู้จักและเข้าใจถึงระบบแบบเชิงเส้นที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (Linear Time-Invariant System)
- 11.2 อธิบายและสามารถทำการแปลงจากฟังก์ชันถ่ายโอนไปเป็นสมการสถานะ
- 11.3 อธิบายและสามารถทำการแปลงจากสมการสถานะไปเป็นฟังก์ชันถ่ายโอน
 - 11.3.1 เข้าใจวิธีการคำนวณการแปลงจากสมการสถานะไปเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนด้วยการแปลงลาปลาซและการคำนวณด้วยเมทริกซ์ผกผัน (Matrix Inverse)
 - 11.3.2 เข้าใจวิธีการคำนวณการแปลงจากสมการสถานะไปเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนด้วยกฎเครมเมอร์ (Cramer Rule)



สมการสถานะ/สเปกตรัมสำหรับระบบแบบเชิงเส้นที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา และความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันถ่ายโอนและสมการสถานะ

ในบทนี้จะศึกษาระบบพลศาสตร์ โดยเขียนสมการในรูปแบบของตัวแปรที่บ่งบอกถึงคุณลักษณะภายในของระบบ เพื่อที่จะสามารถคำนวณหาเป็นสมการสถานะ (State equation) จากสมการเชิงอนุพันธ์ของระบบ และหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ในโดเมนของความถี่ (s -domain) ที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 10 กับสมการสถานะ (State-space equation) ในโดเมนของเวลา (t -domain) ที่จะกล่าวในบทนี้ โดยสมการสถานะจะเป็นเซตของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ที่เชื่อมโยงกันของตัวแปรภายในของระบบ หรือที่เรียกกันว่า ตัวแปรสถานะ (หรือ State variable) ร่วมกับเซตของสมการพีชคณิตที่รวมตัวแปรสถานะเข้าด้วยกัน และสามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเอาต์พุตกับตัวแปรสถานะได้ด้วย โดยขั้นแรกจะให้นิยามตัวแปรสถานะ (หรือ State variables) $x_i(t)$ เมื่อ $i=1, \dots, n$ ที่เป็นเซตของตัวแปรใน n มิติ ที่มีจำนวนน้อยที่สุดที่สามารถอธิบายระบบได้อย่างสมบูรณ์ ซึ่งตัวแปรสถานะจะเป็นเซตที่ไม่เป็นเอกลักษณ์ แต่อันดับของระบบ n นั้นเป็นค่าเอกลักษณ์และไม่ขึ้นกับเซตของตัวแปรสถานะที่เราเลือกใช้ โดยที่สมการสถานะจะมีข้อดีหลักๆ คือ จะสามารถประยุกต์ใช้ได้กับระบบที่มีความซับซ้อนมากขึ้น เช่น ระบบที่มีหลายอินพุตและหลายเอาต์พุต (หรือ Multi-Input and Multi-Output system ที่เรียกย่อๆ ว่า MIMO system) เมื่อเทียบกับฟังก์ชันถ่ายโอนที่สามารถประยุกต์ใช้ได้แค่กับระบบที่มีเพียงหนึ่งอินพุตและหนึ่งเอาต์พุต (หรือ Single-Input and Single-Output system ที่เรียกย่อๆ ว่า SISO system) เท่านั้น

นอกจากนั้นการอธิบายระบบพลศาสตร์ทางคณิตศาสตร์ จะต้องประยุกต์ใช้ร่วมกับเงื่อนไขเริ่มต้น $x_i(t_0)$ และอินพุต $u_k(t_0, \dots, t)$ เมื่อ $k=1, \dots, r$ (หรือ ใน r มิติ) ที่เพียงพอที่จะทำนายได้ว่าตัวแปรสถานะ $x_i(t)$ สำหรับ $i=1, \dots, n$ และเอาต์พุตของระบบ $y_j(t)$ เมื่อ $j=1, \dots, m$ (หรือ ใน m มิติ) ในอนาคต จะมีพฤติกรรมทางพลศาสตร์ที่เปลี่ยนแปลงไปอย่างไรในระยะเวลา t_0, \dots, t โดยในที่นี้ n จะแสดงถึงอันดับของระบบ ดังในรูปที่ 11-1 หรือ อาจกล่าวได้ว่า การรู้ค่าของตัวแปรสถานะ ($x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$) และอินพุต ($u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$) ในช่วงเวลา t_0, \dots, t เพียงพอที่จะกำหนดพฤติกรรมในอนาคตทั้งหมดของระบบได้ในช่วงเวลา t_0, \dots, t



รูปที่ 11-1 แผนภาพของระบบทางพลศาสตร์ที่มีอินพุต u_k เมื่อ $k=1, \dots, r$ และ ที่มีเอาต์พุต $y_j(t)$ เมื่อ $j=1, \dots, m$ โดยมีตัวแปรสถานะภายในของระบบเป็น $x_i(t)$ เมื่อ $i=1, \dots, n$ (ดัดแปลงมาจาก [7])

ในขั้นที่สอง สมการสถานะ (State equation) ที่ถูกนิยามเป็นการบรรยายทางคณิตศาสตร์ของระบบที่แสดงโดย n เซ็ตของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ที่เชื่อมโยงกับฟังก์ชัน f ทั่วไป ในรูปของเวกเตอร์ของตัวแปรสถานะ \mathbf{x} และเวกเตอร์ของอินพุต \mathbf{u} ในสมการที่ (11-1)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t) \end{aligned} \right\} \dot{\mathbf{x}} = f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t) \quad (11-1)$$

โดยที่ $\dot{x}_i = dx_i / dt$ เป็นอนุพันธ์ของตัวแปรสถานะแต่ละตัว (x_i) และแต่ละตัวประกอบของฟังก์ชัน $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ ที่อาจเป็นฟังก์ชันทั่วไปแบบไม่เชิงเส้นของตัวแปรสถานะ (\mathbf{x}) และอินพุตของระบบ (\mathbf{u}) และ เวลา (t) ฉะนั้นจะสามารถพิจารณาตัวแปรสถานะของระบบใน n มิติ

11.1 ระบบแบบเชิงเส้นที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (Linear Time-Invariant System)

สำหรับกรณีที่ฟังก์ชัน $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ เป็นฟังก์ชันแบบเชิงเส้นที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (Time invariant) ซึ่งระบบสามารถถูกอธิบายโดยสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นที่มีค่าสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ที่คู่กับตัวแปรสถานะ ทั้งหมด n สมการ หรือโดยสมการสถานะในสมการที่ (11-2) ที่ประกอบด้วย เมทริกซ์ของระบบ (System matrix หรือ \mathbf{A}) และเมทริกซ์ควบคุม (Control matrix หรือ \mathbf{B}) ที่เป็นเมทริกซ์ของค่าคงที่ โดย \mathbf{A} จะมีมิติหรือขนาดเป็น $n \times n$ และ \mathbf{B} จะมีมิติหรือขนาดเป็น $n \times r$ ส่วนเอาต์พุตของระบบจะสามารถถูกอธิบายโดยสมการเอาต์พุตในสมการที่ (11-3) ที่ประกอบด้วย เมทริกซ์เอาต์พุต (Output matrix หรือ \mathbf{C}) และเมทริกซ์ส่งผ่านไปด้านหน้าโดยตรง (Feed-forward matrix หรือ \mathbf{D}) ที่เป็นเมทริกซ์ของค่าคงที่เช่นกัน โดย \mathbf{C} จะมีมิติหรือขนาดเป็น $m \times n$ และ \mathbf{D} จะมีมิติหรือขนาดเป็น $m \times r$ ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภาพบล็อก (Block diagram) ของระบบพลศาสตร์แบบเชิงเส้นที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (Linear-Time Invariant system หรือ

การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบจากฟังก์ชันถ่ายโอนหรือจากสมการสถานะ

คุณสมบัติที่สำคัญที่สุดสำหรับระบบก็คือ ความมีเสถียรภาพของระบบ โดยทั่วไประบบจะมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ ระบบเริ่มมีการเคลื่อนที่ใกล้กับจุดที่ต้องการให้ทำงาน หรือ ที่โดยทั่วไปเรียกว่า จุดสมดุล (Equilibrium point) แล้ว ระบบจะทำงานหรือเคลื่อนที่ไม่ห่างจากจุดสมดุลนี้ แม้ว่าเวลาจะผ่านไปนานเพียงใดก็ตาม จากการศึกษาและคำนวณหาฟังก์ชันถ่ายโอนและสมการสถานะจากในบทที่แล้ว ในบทนี้จะให้คำนิยามของเสถียรภาพ (Stability) และทำการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบพลศาสตร์ที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) และในรูปของสมการสถานะ (State-space equation) และจะพิจารณาเสถียรภาพของระบบทั่วไปที่สามารถประยุกต์ใช้ได้กับทั้งระบบแบบเชิงเส้น/ไม่เชิงเส้นอีกด้วย

12.1 การหาโพลและซีโรของระบบจากฟังก์ชันถ่ายโอน และความสัมพันธ์กับเสถียรภาพของระบบ

ในส่วนแรกจะทำการนิยามฟังก์ชันถ่ายโอน ($H(s)$) ในรูปทั่วไปที่แสดงเป็นอัตราส่วนของเอาต์พุต ($Y(s)$) ต่ออินพุต ($U(s)$) ของระบบใน s โดเมนที่อยู่ในรูปทั่วไปสำหรับระบบอันดับที่ n ในสมการที่ (12-1) ที่สามารถจัดรูปให้เป็นแบบฟอร์มที่แยกตัวประกอบของสมการพหุนาม ดังในสมการที่ (12-2)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_0 s^r + \beta_1 s^{r-1} + \dots + \beta_{r-1} s + \beta_r}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (12-1)$$

$$H(s) = K \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_r)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad (12-2)$$

โดยที่ K เป็นค่าคงที่ที่เท่ากับอัตราส่วน β_0/a_0 และ ค่าคงที่ z_i เมื่อ $i = 1, \dots, r$ ทั้ง r ตัว นั้นจะเรียกว่า ซีโร (Zero) ของฟังก์ชันถ่ายโอน และ ค่าคงที่ p_i เมื่อ $i = 1, \dots, n$ ทั้ง n ตัว นั้นจะเรียกว่า โพล (Pole) ของฟังก์ชันถ่ายโอน และมีข้อจำกัดว่า $r < n$ หรือเงื่อนไขที่เรียกว่า causality สำหรับระบบในทางกายภาพ เมื่อความถี่ใน s โดเมน นั้นมีค่าเข้าใกล้ซีโร (Zero) ตัวใดตัวหนึ่ง หรือ z_i แล้วจะทำให้ฟังก์ชันถ่ายโอนนั้นมีค่าเป็นศูนย์ ส่วนเมื่อความถี่ใน s โดเมนนั้นมีค่าเข้าใกล้โพลตัวใดตัวหนึ่ง p_i แล้วจะทำให้ฟังก์ชันถ่ายโอนนั้นมีค่าเป็นอนันต์ (Infinity) ฉะนั้นแล้วเมื่อพิจารณาระบบในระนาบจินตภาพ (Complex plane) จะสามารถบ่งบอกถึงคุณสมบัติของระบบได้จากโพลและซีโรของฟังก์ชันถ่ายโอน

ถ้าพิจารณาในกรณีที่โพลทั้ง n ตัว ในฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบนั้นเป็นค่าจริงที่ไม่ซ้ำกัน (Real and unique) แล้วฟังก์ชันถ่ายโอนในสมการที่ (12-2) จะสามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อย (Partial fraction) ได้ดังในสมการที่ (12-3)

$$H(s) = \frac{K_1}{(s+p_1)} + \frac{K_2}{(s+p_2)} + \dots + \frac{K_n}{(s+p_n)} \quad (12-3)$$

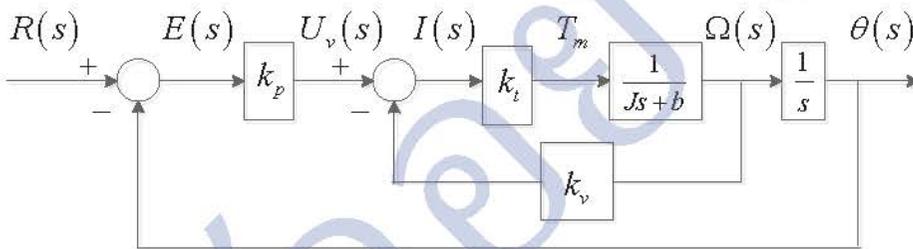
เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ K_i นั้นจะเป็นส่วนตกค้าง (Residual) ตัวที่ i ที่มาจากโพลตัวที่ i (หรือ p_i) โดยมีหลักการอย่างง่ายในการหาค่าสัมประสิทธิ์ K_i ที่ไม่รู้ค่านี้นี้ ด้วยการคูณฟังก์ชันถ่ายโอนในทุกพจน์ของสมการที่ (12-2) และ (12-3) ด้วย $(s+p_i)$ แล้วจึงทำการแทนค่า $s = -p_i$ กลับเข้าไปในฟังก์ชันถ่ายโอน เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ K_i ข้อดีของการเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อย (Partial fraction) นี้ก็คือ จะทำให้สามารถคำนวณหาผลตอบสนองของระบบเชิงเวลาได้อย่างรวดเร็ว จากการทำการแปลงลาปลาซแบบผกผัน (Inverse Laplace transform) ของฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งส่วนของ $K_i/(s+p_i)$ ใน s โดเมน เมื่อแปลงให้อยู่ใน t โดเมน จะมีรูปเป็นฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล (Exponential function) เป็น $\exp(-p_i t)$ ดังนั้นจะสามารถสังเกตเสถียรภาพของระบบได้จากผลตอบสนองเชิงเวลาว่า เมื่อเวลาผ่านไปนานๆ แล้ว เอาต์พุตของระบบจะลู่เข้าหาค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่งหรือไม่ เช่น มีผลตอบสนองที่ลดลงจนเข้าใกล้ศูนย์หรือเรียกว่าลู่เข้าหาศูนย์ ที่จะเกิดขึ้นในกรณีที่โพลของระบบที่เป็นค่าจริงทั้ง n ตัว มีค่าเป็นลบทั้งหมด ถ้าใช้ก็หมายความว่าระบบนั้น **มีเสถียรภาพ (Stability)** สำหรับกรณีที่โพลของระบบตัวใดตัวหนึ่งเป็นศูนย์แล้ว ระบบนั้นจะเรียกได้ว่า **มีเสถียรภาพเล็กน้อย (Marginal stability)** ซึ่งความหมายของผลตอบสนองทางเวลาของระบบจะมีลักษณะแบบแกว่งกลับไปกลับมาด้วยขนาดจำกัดโดยไม่หยุด แต่ถ้าโพลของระบบตัวใดตัวหนึ่งเป็นค่าบวก ระบบนั้นจะ **ไม่มีเสถียรภาพ (Instability)** ซึ่งจะทำให้ผลตอบสนองทางเวลาของระบบนั้นจะเพิ่มขึ้นตามเวลา ดังที่จะแสดงในตัวอย่างที่ 12.1 และ 12.2

สำหรับในกรณีที่โพลของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค (Complex conjugate) ที่เป็นคู่กัน เช่น $p_1 = p_2^*$ เมื่อค่าจริงของโพล p_1 และ p_2 นั้นมีค่าเท่ากัน แต่ค่าจินตภาพของโพล p_1 และ p_2 นั้นมีเครื่องหมายตรงกันข้าม แล้วฟังก์ชันถ่ายโอนจะเขียนให้อยู่ในรูปดังในสมการที่ (12-4)

$$H(s) = \frac{K_1 s + K_2}{(s+p_1)(s+p_2)} + \frac{K_3}{(s+p_3)} + \dots \quad (12-4)$$

ตัวอย่างที่ 13.6 ในตัวอย่างนี้จะพิจารณาระบบการควบคุมแบบแปรผันตรง (P-control) ที่มีอัตราขยายเป็น k_p เพื่อใช้ควบคุมองศาการหมุนของเฟลตามอเตอร์ (θ) ร่วมกับระบบป้อนกลับอัตราเร็ว (Rate-feedback system) ที่มีอัตราขยายเป็น k_v เพื่อใช้กับระบบควบคุมความเร็วเชิงมุมของเฟลตามอเตอร์ (Ω) ที่เชื่อมต่อกับโพลต์ ดังแสดงในรูปที่ 13-16 โดยมีโมเมนต์ความเฉื่อยรวมของแกนมอเตอร์และโพลต์ในระบบเป็น J และค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง (Damping) ของตลับลูกปืนที่ช่วยการหมุนเฟลตามอเตอร์ที่มีค่าเป็น b เมื่อค่าคงที่ของแรงบิดของมอเตอร์เป็น k_t จงคำนวณหา

- (ก) ฟังก์ชันถ่ายโอนแบบลูปปิด (Closed-loop transfer function) ระหว่างเอาต์พุตและอินพุต ($\theta(s)/R(s)$)
- (ข) ค่าอัตราส่วนความหน่วง (Damping ratio) ของระบบป้อนกลับแบบลูปปิด (ζ_{cl}) และค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency) ของระบบป้อนกลับแบบลูปปิด (ω_{ncl}) ในรูปของ ζ และ ω_n ของระบบแบบลูปเปิด

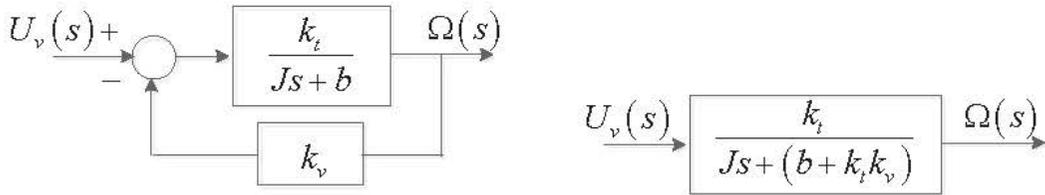


รูปที่ 13-16 แผนภาพบล็อกการควบคุมแบบแปรผันตรง ($G_c(s) = k_p$) เพื่อใช้ควบคุมองศาการหมุนของเฟลตามอเตอร์ ร่วมกับระบบป้อนกลับอัตราเร็วแบบลูปปิด (Rate-feedback หรือ Velocity-feedback system) ที่ใช้ควบคุมความเร็วรอบของระบบพลศาสตร์ทางกลเชิงมุมของมอเตอร์ที่เชื่อมต่อกับโพลต์

วิธีทำ

ถ้าพิจารณาระบบที่มีการควบคุมแบบป้อนกลับของตำแหน่งและความเร็ว ดังแสดงในรูปที่ 13-16 จะเห็นได้ว่าจะมีแผนภาพบล็อกคล้ายกับระบบที่ได้กล่าวมาแล้วในรูปที่ 13-10 ในตัวอย่างที่ 13.2

(ก) ในขั้นแรกจะทำการเขียนระบบป้อนกลับอัตราเร็วในลูปด้านในให้เป็นระบบอันดับที่ 1 (First-order system) ดังแสดงในรูปที่ 13-17



รูปที่ 13-17 แผนภาพบล็อกระบบควบคุมป้อนกลับอัตราเร็วแบบลูปปิด (Rate-feedback หรือ Velocity-feedback system) ที่ใช้ควบคุมความเร็วรอบของเฟลตามอเตอร์ (ซ้าย) และการยุบบล็อกของระบบควบคุมความเร็วรอบของเฟลตามอเตอร์ (ขวา)

ในขั้นที่สอง จะสามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบป้อนกลับแบบลูปปิด (Closed-loop transfer function) ทั้งหมดที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\theta(s)$ และ $R(s)$ ได้ดังนี้

$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_p k_i}{s(Js + (b + k_v k_i))}}{1 + \frac{k_p k_i}{s(Js + (b + k_v k_i))}} = \frac{k_p k_i}{Js^2 + (b + k_v k_i)s + k_p k_i} \quad (13-6-1)$$

จากสมการที่ (13-6-1) จะเห็นได้ว่าระบบป้อนกลับแบบลูปปิดจะไม่มีซีโร (Zero) เพิ่มขึ้นมาในฟังก์ชันถ่ายโอนแบบลูปปิด เหมือนในกรณีของฟังก์ชันถ่ายโอนแบบลูปเปิดที่ใช้ระบบการควบคุมแบบพีไอดี (PID control)

(ข) เมื่อได้ฟังก์ชันถ่ายโอนแบบลูปปิดของ $\theta(s)/R(s)$ เราสามารถจัดรูปสมการคุณลักษณะ (Characteristics equation) ใหม่ ให้อยู่ในรูปทั่วไปที่เป็น $s^2 + 2\zeta_{cl}\omega_{ncl}s + \omega_{ncl}^2 = 0$ เพื่อคำนวณหาค่าอัตราส่วนความหน่วง (Damping ratio) ของระบบป้อนกลับแบบลูปปิด (ζ_{cl}) และค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency) ของระบบป้อนกลับแบบลูปปิด (ω_{ncl}) โดยการนำสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ของ s^2 และ s และค่าคงที่ไปเทียบกับส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนแบบลูปปิดสำหรับ $\theta(s)/R(s)$ ในสมการที่ (13-6-1) จะได้

$$2\zeta_{cl}\omega_{ncl} = \frac{b + k_v k_i}{J} \quad \text{และ} \quad \omega_{ncl}^2 = \frac{k_p k_i}{J}$$

หรือ

$$\omega_{ncl} = \sqrt{\frac{k_p k_i}{J}} \quad \text{และ} \quad \zeta_{cl} = \frac{b + k_v k_i}{2\sqrt{k_p k_i J}} \quad (13-6-2)$$

จะเห็นได้ว่า ค่าอัตราขยาย k_v จะมีผลกระทบต่ออัตราส่วนความหน่วง (Damping ratio) ของระบบป้อนกลับแบบลูปปิด (ζ_{cl}) เพียงอย่างเดียว โดยไม่มีผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency) ของระบบป้อนกลับแบบลูปปิด (ω_{ncf}) ฉะนั้นแล้วการใช้การควบคุมแบบแปรผันตรง (P-control) ร่วมกับระบบป้อนกลับอัตราเร็ว (Rate-feedback system) เป็นอีกวิธีหนึ่งที่สามารถปรับค่าอัตราส่วนความหน่วงด้วย k_v และปรับค่าความถี่ธรรมชาติด้วย k_p ของระบบแบบลูปปิดที่เป็นอิสระแยกจากกันได้เช่นเดียวกับระบบควบคุมแบบพีไอดี (PID-control)

ตัวอย่าง

14.2 การจำลองและวิเคราะห์ประสิทธิภาพของระบบในรูปฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function)

ฟังก์ชันถ่ายโอน ($H(s)$) ในรูปทั่วไปที่แสดงเป็นอัตราส่วนของเอาต์พุต ($Y(s)$) ต่ออินพุต ($U(s)$) ของระบบในโดเมนของความถี่ ที่อยู่ในรูปทั่วไปสำหรับระบบอันดับที่ n หรือมีโพล n ตัว และมีซีโรทั้งหมด r ตัว ดังแสดงในสมการที่ (12-1) หรือ (14-2)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_0 s^r + \beta_1 s^{r-1} + \dots + \beta_{r-1} s + \beta_r}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (14-2)$$

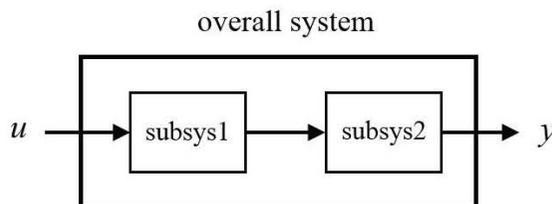
จะสามารถเขียนเศษ (Numerator ที่ย่อเป็น num) และส่วน (Denominator ที่ย่อเป็น den) ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่เป็นสมการพหุนามอันดับที่ r และ n ตามลำดับ ในรูปของเวกเตอร์แบบแถวในสมการที่ (14-3) โดยที่ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบจะสามารถสร้างขึ้นด้วยคำสั่ง “tf” ในโปรแกรม MATLAB ดังสมการที่ (14-4)

$$\text{num} = [\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{r-1} \beta_r]; \text{ และ } \text{den} = [a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n]; \quad (14-3)$$

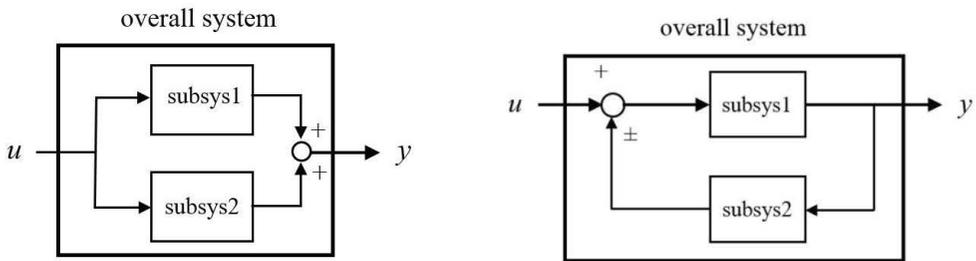
$$\text{system} = \text{tf}(\text{num}, \text{den}); \quad (14-4)$$

ในทางปฏิบัติภาพรวมของระบบ (Overall system) จะเกิดจากการเชื่อมต่อของระบบย่อยๆ (Subsystem) หลายๆ ระบบเข้าด้วยกัน โดยในที่นี้ระบบย่อยๆ จะแสดงโดยฟังก์ชันถ่ายโอนดังสมการที่ (14-4) ซึ่งการเชื่อมต่อของระบบ SISO นั้นสามารถกระทำได้หลากหลายรูปแบบ ซึ่งแสดงพร้อมคำสั่งในโปรแกรม MATLAB ดังนี้

- 1) การเชื่อมต่อแบบอนุกรม (Serial connection) โดยใช้คำสั่ง `sys = series(sys1,sys2)`
- 2) การเชื่อมต่อแบบขนาน (Parallel connection) โดยใช้คำสั่ง `sys = parallel(sys1,sys2)`
- 3) การเชื่อมต่อแบบป้อนกลับ (Feedback connection) โดยใช้คำสั่ง `sys = feedback(sys1,sys2,sign)`



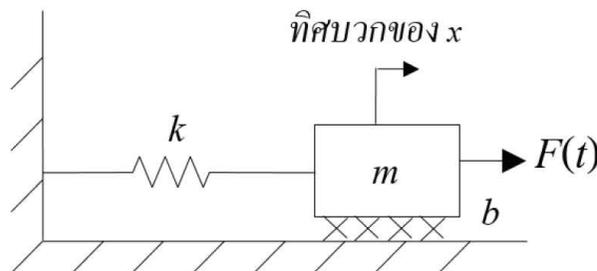
รูปที่ 14-3 การเชื่อมต่อของระบบย่อย (Subsystem) แบบอนุกรม (Serial connection) (ดัดแปลงมาจาก [3])



รูปที่ 14-4 การเชื่อมต่อของระบบย่อย (Subsys) แบบขนาน (Parallel connection) (ซ้าย) และแบบป้อนกลับ (Feedback connection) (ขวา) (ดัดแปลงมาจาก [3])

ตัวอย่างที่ 14.1 สำหรับระบบทางกลที่ประกอบด้วยมวล (m) = 20 kg และแรงเสียดทานหน่วงที่พื้น (b) = 8 N-s/m และสปริง (k) = 100 N/m ที่ถูกกระทำโดยแรง $F(t)$ จากภายนอก ดังในรูปที่ 14-5 ที่อธิบายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$ โดยที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นของระยะทางการเคลื่อนที่เป็น $x(0) = X_0 = 0$ m และเงื่อนไขเริ่มต้นของความเร็ว เป็น $\dot{x}(0) = V_0 = 0$ m/s จงคำนวณหา

- (ก) ผลตอบสนองเชิงเวลาด้วยโปรแกรม MATLAB และ ประสิทธิภาพของระบบจาก T_s , T_p , %OS ในระบบลูปเปิด ในกรณีที่แรงจากภายนอกเป็นฟังก์ชันแบบขั้นบันไดที่เป็น $F(t) = 10u(t)$ N
- (ข) ผลตอบสนองเชิงเวลาด้วยโปรแกรม MATLAB และประสิทธิภาพของระบบในระบบลูปเปิด ในกรณีที่แรงจากภายนอกเป็นฟังก์ชันแบบซายด์ที่มีความสัมพันธ์ $F(t) = 10\sin(0.2\pi t)$ N
- (ค) ผลตอบสนองเชิงเวลาด้วยโปรแกรม MATLAB เมื่อประยุกต์ใช้ระบบควบคุมแบบแปรผันตรง-อนุพันธ์ (PD-control) ที่ใช้ปรับแรง $F(t)$ จากภายนอกที่มากกระทำ เพื่อควบคุมตำแหน่งของมวลให้อยู่ที่ 10 m โดยที่ต้องการให้มี $T_s = 3$ sec และ %OS = 35% ในระบบแบบลูปปิด



รูปที่ 14-5 ระบบทางกลเชิงเส้นที่ประกอบด้วย มวล สปริง และแรงเสียดทานหน่วง ที่ถูกกระทำโดยแรง $F(t)$ จากภายนอก

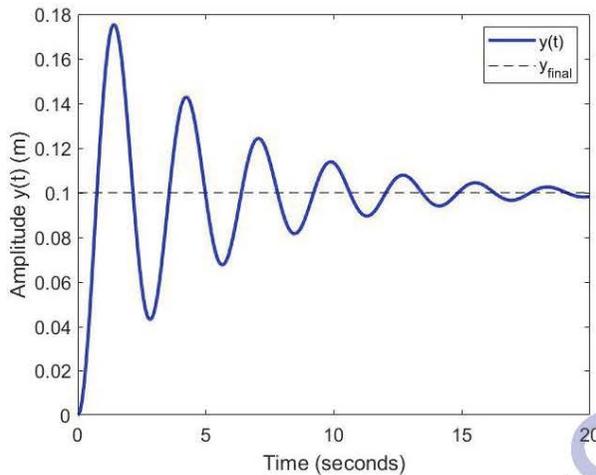
วิธีทำ

จากสมการการเคลื่อนที่ที่โจทย์ได้กำหนดมาให้ นั้น จะสามารถเขียนเป็นสมการในรูปทั่วไปใหม่ได้เป็นดังนี้ $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = F(t)/m$ เมื่อประยุกต์ใช้การแปลงแบบลาปลาซจะหาความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต (F) และเอาต์พุต (x หรือระยะการขจัดของมวลที่แทนด้วยสัญลักษณ์ y) เป็นได้ดังในสมการที่ (14-1-1)

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.05}{s^2 + 0.4s + 5} \quad (14-1-1)$$

(ก) เมื่อพิจารณาอินพุตเป็นแบบขั้นบันไดที่มีขนาดเป็น 10 N เมื่อเงื่อนไขเริ่มต้นของระยะการขจัดและความเร็วมีค่าเป็นศูนย์ โดยใช้โปรแกรม MATLAB นั้นจะสามารถสร้างฟังก์ชันถ่ายโอนด้วยชุดคำสั่งด้านล่างดังนี้ (โดยที่สัญลักษณ์ % นั้นเป็น Comment ของคำสั่งในบรรทัดต่าง ๆ) และหาผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบแบบลูเปิด แสดงดังในรูปที่ 14-6

```
num = [0.05]; % เศษของฟังก์ชันถ่ายโอน
den = [1 0.4 5]; % ส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอน
Dynamic_sys = tf(num,den); % สร้างฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ
t = 0:0.01:20; % สร้างเวกเตอร์เวลาแบบแถว ตั้งแต่ 0-20 วินาที โดยเพิ่มเวลาที่ละ 0.01 วินาที
opt = stepDataOptions; % เซ็ตคุณสมบัติของอินพุตจากภายนอกแบบขั้นบันได
opt.StepAmplitude = 10; % ตั้งค่าขนาดของอินพุตจากภายนอกแบบขั้นบันไดให้เป็น 10 N
step(Dynamic_sys,t,opt); % วาดกราฟของผลตอบสนองเชิงเวลาในช่วงเวลา t ที่กำหนด โดยมี
% คุณสมบัติของอินพุตเป็น opt
```



รูปที่ 14-6 ผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบแบบลูเปิด ในกรณีที่ $F(t) = 10u(t)$ N

จากผลตอบสนองเชิงเวลาจะเห็นได้ว่าระบบมีความหน่วงแบบขาด เนื่องจากระบบมีโพลที่เป็นค่าจินตภาพ ณ ตำแหน่ง $p_{1,2} = -0.2 \pm 2.2271i$ ซึ่งมีค่าจริงติดลบน้อย ส่วนค่าจินตภาพนั้นมีค่ามาก ซึ่งโพลทั้ง 2 สามารถหาได้โดยใช้คำสั่ง “roots(den)” ในโปรแกรม MATLAB แม้ว่าระบบจะมีเสถียรภาพแต่จะทำให้เกิดการกวัดแกว่งกลับไปมาหลายรอบอันเนื่องมาจากค่าจริงของโพลมีขนาดน้อย ส่วนค่าอัตราขยายแบบดีซี (DC gain) สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเมื่อแทน $s=0$ มีค่าเป็น $10 \times 0.05 / 5 = 0.1$ m ที่เป็นขนาดของผลตอบสนองในช่วงตอนท้ายเมื่อมีแรงขนาด 10 N กระทบกับระบบ ทำให้มีความผิดพลาดในช่วงตอนท้าย (Steady-state error) ที่เยอะ เป็น 9.9 m และเพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพของผลตอบสนองเชิงเวลาต่ออินพุตแบบขั้นบันไดหนึ่งหน่วยจากภายนอกที่กระทบทำ นั้นสามารถใช้คำสั่ง $S = \text{stepinfo}(\text{Dynamic_sys})$ ซึ่งจะแสดงคุณสมบัติต่างๆ ของผลตอบสนองเชิงเวลาได้ดังนี้

RiseTime: 0.4998 % เวลาที่เพิ่มขึ้น (T_r) ในหน่วย วินาที

SettlingTime: 18.6385 % เวลาที่เข้าช่วงนิ่ง (T_s) ในหน่วย วินาที

Overshoot: 75.4120 % เปอร์เซนต์โอเวอร์ชูต (%OS)

PeakTime: 1.4050 % เวลาที่ถึงจุดสูงสุด (T_p) ในหน่วย วินาที

(ข) เมื่อแรงอินพุตจากภายนอกเป็น $F(t) = 10\sin(0.2\pi t)$ N และ เงื่อนไขเริ่มต้นของระยะการขจัดและความเร็วมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อใช้คำสั่งดังด้านล่างนี้ในโปรแกรม MATLAB จะได้ผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบแบบลูเปิด แสดงดังในรูปที่ 14-7

```

F = 10*sin(0.2*pi*t); % สร้างแรงอินพุตจากภายนอกที่เป็นฟังก์ชันซายด์ ที่มีความถี่ 0.1 Hz
[y] = lsim(Dynamic_sys,F,t); % ใช้คำสั่ง lsim จำลองพลตอบสนองเชิงเวลา เมื่อมีอินพุต (F)
% และเวลา (t)
plot(t,y,'b-','LineWidth',2); hold on; % วาดกราฟของพลตอบสนองเชิงเวลา แบบเส้นทึบในช่วง
% 0-20 วินาที
plot(t,0.1*sin(0.2*pi*t),'k--'); % วาดกราฟคำสั่งของฟังก์ชัน  $0.1\sin(0.2\pi t)$  ที่มีขนาดลดลง
% 100 เท่าของแรงจากภายนอก แบบเส้นประ เพื่อไว้เปรียบเทียบ
legend('y(t)','0.1*sin(0.2*\pi*t)'); % ใส่คำอธิบายกราฟของเส้นแต่ละประเภท
ylabel('Amplitude y(t)'); % ใส่คำอธิบายกราฟในแนวแกนตั้งหรือแกน y
xlabel('Time (seconds)'); % ใส่คำอธิบายกราฟในแนวแกนนอนหรือแกน x

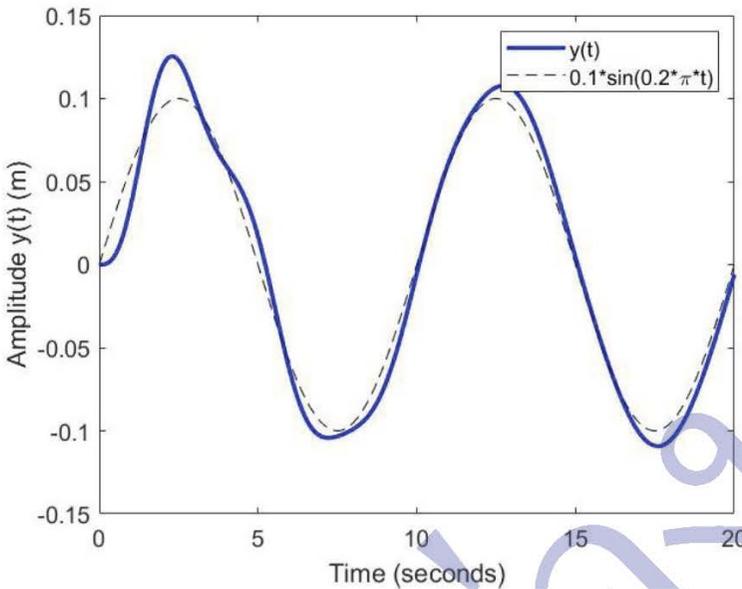
```

จากพลตอบสนองเชิงเวลาจะเห็นว่า $\%OS$ นั้นยังมีค่าที่สูงอยู่คล้ายในข้อ (ก) และพลตอบสนองจะแกว่งจนถึงประมาณ 12 วินาที จึงจะสามารถเปลี่ยนตามแรงอินพุตแบบ ฟังก์ชันซายด์ได้ทัน และเพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพของพลตอบสนองทางเวลา $S = \text{lsiminfo}(y,t)$ ซึ่งจะแสดงคุณสมบัติต่างๆ ดังนี้

```

Min: -0.1093 % ค่าที่ต่ำที่สุด
MinTime: 17.6000 % เวลาที่เกิดค่าที่ต่ำที่สุด
Max: 0.1255 % ค่าที่สูงที่สุด
MaxTime: 2.2900 % เวลาที่เกิดค่าที่สูงที่สุด
SettlingTime: 19.9606 % ค่าเวลาที่เข้าช่วงนิ่ง ที่ได้จะให้ค่าแกว่งกลับไปมาที่ไม่หยุด
% ตามฟังก์ชันซายด์ในช่วงเวลา 0-20 วินาที

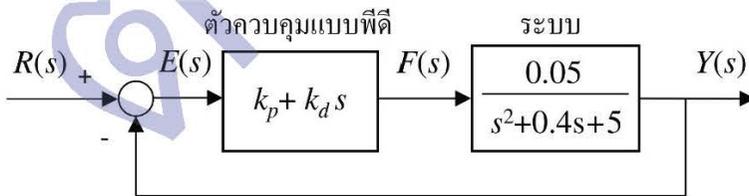
```



รูปที่ 14-7 ผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบแบบลูปเปิด ในกรณีนี้ที่ $F(t) = 10\sin(0.2\pi t)$ N

(ค) เมื่อประยุกต์ใช้ระบบควบคุมแบบแปรผันตรง-อนุพันธ์ (PD-control) ที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น $G_d(s) = k_p + k_d s$ กับระบบพลศาสตร์ที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็นดังในสมการที่ (14-1-1) ที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบป้อนกลับแบบลูปปิดเชิงลบ ที่ใช้ความสัมพันธ์ในสมการที่ (13-1) ได้ตั้งในสมการที่ (14-1-2)

$$H_{neg}(s) = \frac{0.05k_d s + 0.05k_p}{s^2 + (0.4 + 0.05k_d)s + (5 + 0.05k_p)} \tag{14-1-2}$$



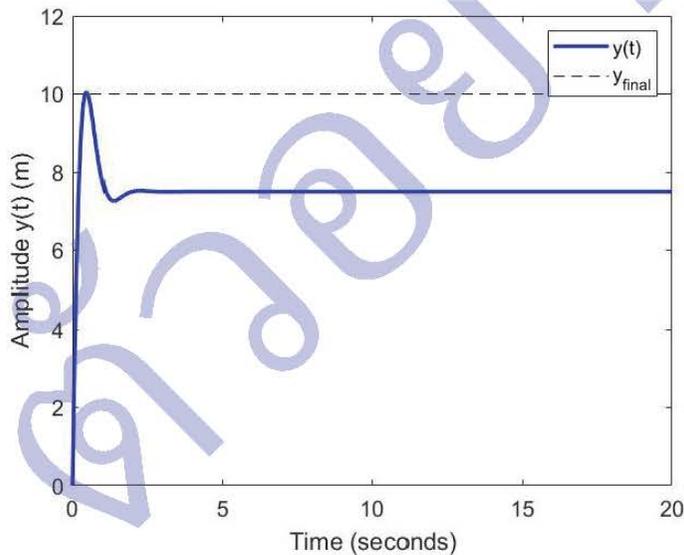
รูปที่ 14-8 การควบคุมแบบป้อนกลับแบบลูปปิดเชิงลบ ด้วยระบบควบคุมแบบพีดี

ในรูปที่ 14-8 เป็นการเชื่อมต่อแบบอนุกรม (Serial connection) ของระบบควบคุมแบบพีดีและระบบพลศาสตร์อันดับที่ 2 และการเชื่อมต่อแบบป้อนกลับเชิงลบ (Negative feedback connection) และสามารถใช้อำสั่งในโปรแกรม MATLAB ในการจำลองผลตอบสนองเชิงเวลา ดังแสดงในรูปที่ 14-9 ดังนี้

```

kp = 300; % อัตราขยายแบบแปรผันตรง (หรือ proportional gain)
kd = 100; % อัตราขยายแบบอนุพันธ์ (หรือ derivative gain)
PDcontrol_sys = tf([kd kp],1); % สร้างฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมแบบพีดี
PDcontrol_sys = pid(kp,0,kd) % หรือสร้างระบบควบคุมแบบพีดี โดยใช้คำสั่งสำเร็จ "pid"
Serial_sys = series(Dynamic_sys,PDcontrol_sys); % การเชื่อมต่อแบบอนุกรมของระบบควบคุม
% พีดีและระบบพลศาสตร์ หรือ อาจจะแทนการเชื่อมต่อแบบอนุกรม Dynamic_sys*PDcontrol_sys
% ด้วยการคูณกันโดยตรง ก็ได้เช่นกัน
Feedback_sys = feedback(Serial_sys,1,-1); % การเชื่อมต่อแบบป้อนกลับเชิงลบที่ประกอบด้วย
% ฟังก์ชันบล็อกในขาไป, ฟังก์ชันบล็อกที่ป้อนกลับ และ เครื่องหมายในการป้อนกลับ
step(Feedback_sys,t,opt); % วาดกราฟของผลตอบสนองเชิงเวลาในช่วงเวลา t ที่กำหนด โดยมี
% คุณสมบัติอินพุตเป็น opt

```



รูปที่ 14-9 ผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบแบบลูปปิด ในกรณีที่ $F(t) = 10u(t)$ N

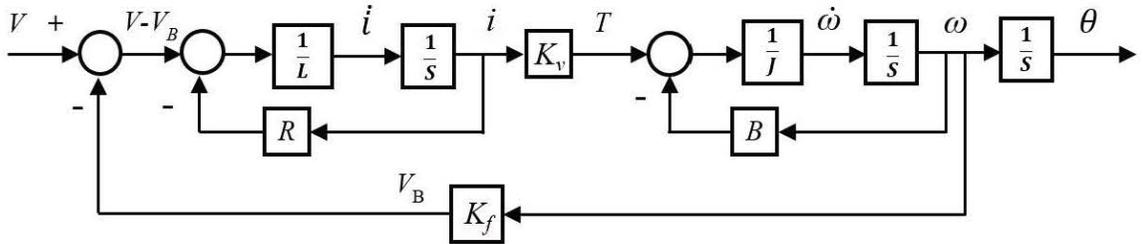
เพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพของผลตอบสนองเชิงเวลาต่ออินพุตแบบขั้นบันไดหนึ่งหน่วยจากภายนอกที่มากกว่า โดยใช้คำสั่ง $S = \text{stepinfo}(\text{Feedback_sys})$ ในโปรแกรม MATLAB จะได้ผลดังนี้

RiseTime: 0.1600 % เวลาที่เพิ่มขึ้น (T_r) ในหน่วย วินาที
 SettlingTime: 1.5890 % เวลาที่เข้าช่วงนิ่ง (T_s) ในหน่วย วินาที
 Overshoot: 34.0538 % เปอร์เซนต์โอเวอร์ชูต (%OS)
 PeakTime: 0.4605 % เวลาที่ถึงจุดสูงสุด (T_p) ในหน่วย วินาที

ฉะนั้นจะเห็นได้ว่าประสิทธิภาพของระบบจะมี $T_s = 1.59 \text{ sec} < 3 \text{ sec}$ $\%OS = 34.05\% < 35\%$ ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ที่โจทย์กำหนดไว้ และตรวจสอบได้ว่าโพลทั้งสองของระบบป้อนกลับแบบลูปปิดเมื่อใช้ค่าอัตราขยายแบบแปรผันตรง-อนุพันธ์เป็น $k_p = 300$ และ $k_d = 100$ จะอยู่ ณ ตำแหน่ง $-2.7000 \pm 3.5651i$ ซึ่งมีค่าจริงเป็นลบใกล้เคียงกับค่าจินตภาพ กล่าวได้ว่าระบบมีเสถียรภาพและมีการกวัดแกว่งที่น้อยด้วย แต่ทว่าค่าความผิดพลาดในช่วงตอนท้ายนั้นยังมีค่าเป็น 2.5 m ซึ่งสามารถลดค่าความผิดพลาดได้โดยการเพิ่มค่าอัตราขยาย k_p หรือการใช้ระบบควบคุมแบบพีไอ ดังที่กล่าวในตัวอย่างที่ 14.2 ต่อไป

ตัวอย่างที่ 14.2 ระบบการควบคุมองศาการหมุนของเฟลตามอเตอร์แบบดีซี (DC Motor) ที่เชื่อมต่อเข้ากับโหลดที่เป็นการเคลื่อนที่เชิงมุมซึ่งมีโมเมนต์ความเฉื่อยรวมเป็น $J = 4 \text{ kg-m}^2$ และมีแรงเสียดทานเนื่องจากความหนืดของลูกปืนบนเพลลาที่เชื่อมต่อระหว่างมอเตอร์และโหลดเป็น $B = 1.5 \text{ N-s/m}$ ดังที่ได้อธิบายไว้ในตัวอย่างที่ 10.10 โดยที่แผนภาพบล็อกนั้นแสดงในรูปที่ 14-10 เมื่อต้องการให้มอเตอร์หมุนโหลดทางกลนี้กลับไป-กลับมาเป็นมุม ± 45 องศา ด้วยความถี่ 0.5 Hz (หรือ มีคาบทางเวลา เป็น 2 วินาที) โดยกำหนดว่าผลตอบสนองเชิงเวลานั้นต้องมีเวลาที่เข้าช่วงนิ่ง (T_s) น้อยกว่า 1.5 วินาที และมีเปอร์เซนต์โอเวอร์ชูต (%OS) $< 10\%$ และมีค่าความผิดพลาดในช่วงตอนท้าย (หรือ e_{ss}) น้อยกว่า 1 องศา ถ้าสมมุติให้คุณสมบัติทางไฟฟ้าของมอเตอร์มีค่าความต้านทาน $R_a = 400 \text{ m}\Omega$ และค่าความเหนี่ยวนำของขดลวดในมอเตอร์เป็น $L_a = 5,000 \text{ }\mu\text{H}$ มอเตอร์มีค่าคงที่ของแรงบิดเป็น $K_v = 1.45 \text{ N-m/A}$ และมีค่าคงที่ความต่างศักย์ที่ต้านการหมุนจากสนามแม่เหล็ก (Back EMF) เป็น $K_f = 2.5 \text{ V-s/rad}$

- (ก) จงออกแบบระบบควบคุมแบบพีไอ (PI-control) ในการควบคุมให้มอเตอร์หมุนโหลดกลับไป-กลับมา ตามสัญญาณคำสั่งแบบพลัสที่กำหนด
- (ข) จงออกแบบระบบควบคุมแบบพีไอดี (PID-control) ในการควบคุมมอเตอร์แทน PI-control และทำการเปรียบเทียบกับผลตอบสนองที่ได้กับในข้อ (ก)



รูปที่ 14-10 แผนภาพบล็อกของมอเตอร์แบบดีซี ที่ประกอบด้วยระบบทางไฟฟ้าและระบบทางกล เมื่อโมเมนต์ความเฉื่อยของเฟลลามอเตอร์และโหลดนั้นรวมเข้าด้วยกันเป็น J และมีอินพุตเป็นคำสั่งของความต่างศักย์ V ที่กำหนด

วิธีทำ

(ก) ในขั้นแรกจะทำการพิจารณาระบบแบบลูปเปิด ที่ยังไม่มีการใช้ระบบควบคุมกับมอเตอร์แบบดีซี ที่มีฟังก์ชันถ่ายโอน เป็นดังในสมการที่ (10-10-5) หรือ (14-2-1) ที่เป็นระบบอันดับที่ 3 และทำการแทนค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของระบบตามที่โจทย์กำหนด จะสามารถสร้างฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบแบบลูปเปิด (Open-loop transfer function) นี้ในโปรแกรม MATLAB ได้ดังนี้

% พารามิเตอร์ของมอเตอร์แบบดีซี และ โหลดของระบบ

$J = 4$; % โมเมนต์ความเฉื่อยของมอเตอร์และโหลด (หน่วย: $\text{kg}\cdot\text{m}^2$)

$B = 1.5$; % ค่าความหน่วงจากแรงเสียดทาน (หน่วย: $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$)

$R_a = 0.4$; % ความต้านทานของขดลวดในมอเตอร์แบบดีซี (หน่วย: Ohm)

$L_a = 0.005$; % ความเหนี่ยวนำของขดลวดในมอเตอร์แบบดีซี (หน่วย: H)

$K_v = 1.45$; % ค่าคงที่ของแรงบิดของมอเตอร์แบบดีซี (หน่วย: $\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}$)

$K_f = 2.5$; % ค่าคงที่ความต่างศักย์ที่ต้านการหมุนจากสนามแม่เหล็ก (หน่วย: $\text{V}\cdot\text{s}/\text{rad}$)

% สร้างฟังก์ชันถ่ายโอนของมอเตอร์แบบดีซี

$\text{DCMotor_num} = [K_v]$; % เศษของฟังก์ชันถ่ายโอน

$\text{DCMotor_den} = [(J \cdot L_a) (J \cdot R_a + B \cdot L_a) (B \cdot R_a + K_v \cdot K_f) 0]$; % ส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอน

$\text{DCMotor_sys} = \text{tf}(\text{num}, \text{den})$; % สร้างฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบแบบลูปเปิด

$t = 0:0.05:25$; % สร้างเวกเตอร์เวลาแบบแถว ตั้งแต่ 0-25 วินาที โดยเพิ่มเวลาที่ละ 0.05 วินาที

$\text{step}(\text{DCMotor_sys}, t)$; % วาดกราฟของผลตอบสนองต่ออินพุตแบบ step ในช่วงเวลา t ที่กำหนด

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K_v}{(Js^2 + Bs)(R + Ls) + K_v K_f s} = \frac{K_v}{(JL)s^3 + (JR + BL)s^2 + (BR + K_v K_t)s}$$

หรือ $G_p(s) = \frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{1.45}{0.02 s^3 + 1.608 s^2 + 4.225 s}$ (14-2-1)

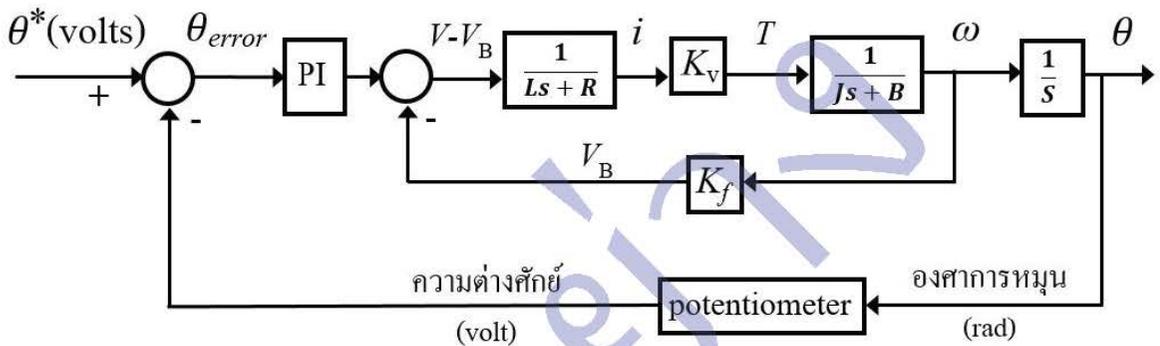
เมื่อมีค่าความต่างศักย์แบบพลัสที่มีขนาดหนึ่งหน่วยมากกระทำกับฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบแบบรูปเปิดของมอเตอร์แบบดีซีและโหลด องศาการหมุนของเฟลลามอเตอร์จะหมุนเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ ตามเวลา ดังในรูปที่ 14-12 (ด้านซ้าย) ซึ่งเกิดจากระบบนั้นมีโพล 1 ตัว อยู่ที่ศูนย์ที่เป็นอินทิเกรต ทำให้ระบบมีเสถียรภาพแบบเล็กน้อย ส่วนโพลอีก 2 ตัวเป็นค่าจริงที่ติดลบอยู่ที่ตำแหน่ง -2.72 และ -77.68 เมื่อเชื่อมต่อระบบควบคุมแบบแปรผันตรง-ปริพันธ์ (PI-control) ที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น $G_c(s) = k_p + k_f/s$ เข้ากับฟังก์ชันถ่ายโอนของมอเตอร์แบบดีซี ดังในสมการที่ (14-2-1) โดยที่แผนภาพบล็อกของการควบคุมแบบป้อนกลับนั้น แสดงในรูปที่ 14-12 (ด้านขวา) ซึ่งใช้การป้อนกลับองศาการหมุนของเฟลลามอเตอร์ (θ) ด้วย Potentiometer ที่เป็นเซนเซอร์ที่ให้เอาต์พุตเป็นค่าความต่างศักย์ที่แปรผันตรงกับองศาการหมุนของเฟลาที่เป็นอินพุต ในการสร้างสัญญาณคำสั่งขององศาการหมุนที่ต้องการ (θ^*) ให้แก่วงกลับไป-กลับมา เป็นมุม ± 45 องศา ด้วยความถี่ 0.5 Hz ด้วยการจำลองโดยใช้โปรแกรม MATLAB จะสามารถใช้คำสั่ง ดังนี้

```
[U,T] = gensig('square',10,25,0.05); % สร้างสัญญาณแบบบันไดสี่เหลี่ยมอยู่ระหว่าง 0 และ 1
% โดยมีคาบ =10 s และมีเวลาสุดท้าย =25 s และมีช่วงเวลา = 0.05 s
Thetastar = (pi/4)*(2*(U-0.5)); % สร้างสัญญาณแบบบันไดสี่เหลี่ยม ( $\theta^*$ ) อยู่ระหว่าง  $\pm 45$  องศา
% สร้างระบบควบคุมแบบแปรผันตรง-ปริพันธ์ ด้วยฟังก์ชันถ่ายโอน หรือ คำสั่ง "pid"
kp = 10; % อัตราขยายแบบแปรผันตรง (หรือ proportional gain)
ki = 0.9; % อัตราขยายแบบปริพันธ์ (หรือ integral gain)
PIcontrol_sys = tf([kp ki],[1 0]); % สร้างระบบควบคุมแบบแปรผันตรง-ปริพันธ์ ด้วยฟังก์ชัน
% ถ่ายโอน
PIcontrol_sys = pid(kp,ki,0) % หรือ สร้างระบบควบคุมแบบแปรผันตรง-ปริพันธ์ ด้วยคำสั่ง pid
Serial_sys = series(DCMotor_sys,PIcontrol_sys); % การเชื่อมต่อแบบอนุกรมของระบบ+
% ตัวควบคุมพีไอ
Feedback_sys = feedback(Serial_sys,1,-1); % การเชื่อมต่อแบบป้อนกลับเชิงลบ
[Theta]=lsim(Feedback_sys,Thetastar,t); % ใช้คำสั่ง lsim จำลองผลตอบสนองเชิงเวลา ( $\theta$ )
% เมื่อกำหนดอินพุตที่เป็นสัญญาณควบคุมองศาการหมุนของเฟลา ( $\theta^*$ ) และเวลา ( $t$ )
```

```

plot(t,Theta_star,'k--'); hold on; % วาดกราฟสัญญาณควบคุมองศาการหมุนของเพลา ( $\theta^*$ )
% ในช่วงเวลา t
plot(t,Theta,'b-', 'LineWidth',2); % วาดกราฟองศาการหมุนของเพลา ( $\theta$ ) ในช่วงเวลา t
legend('\theta^{*}','\theta'); % ใส่ป้ายชื่อของแต่ละสัญญาณในกราฟ
ylabel('Motor Shaft Angle (\theta) (rad)'); % ชื่อของแกนตั้งที่เป็นองศาการหมุนของเพลา
xlabel('Time (second)'); % ชื่อของแกนนอนที่เป็นเวลา

```



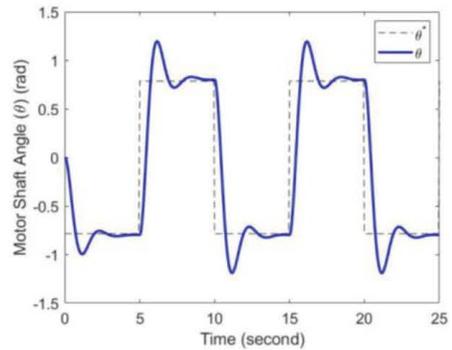
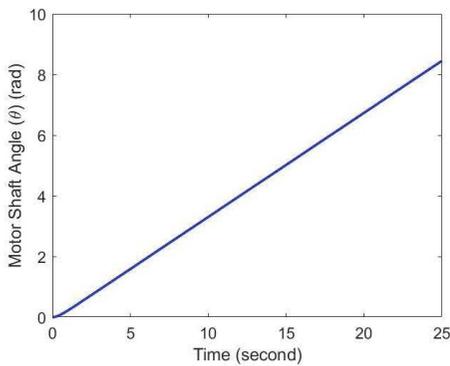
รูปที่ 14-11 แผนภาพบล็อกของการควบคุมองศาการหมุนของเพลามอเตอร์แบบดีซี ด้วยระบบควบคุมแบบพีไอ (PI-control)

จากชุดคำสั่งด้านบนนี้จะให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบแบบลูปเปิด ซึ่งใช้คำสั่ง series ที่เป็นการเชื่อมต่อแบบอนุกรมระหว่างระบบควบคุมพีไอ และมอเตอร์แบบดีซีและโหลด ส่วนฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบป้อนกลับแบบลูปปิดเชิงลบ ซึ่งได้จากการใช้คำสั่ง feedback นั้นจะได้เป็นดังในสมการที่ (14-2-2)

$$G_p(s) \cdot G_c(s) = \frac{\theta(s)}{\theta^*(s)} = \frac{14.50s + 1.305}{0.02s^4 + 1.608s^3 + 4.225s^2 + 14.50s + 1.305} \quad (14-2-2)$$

เมื่อทำการป้อนกลับแบบเชิงลบในระบบแบบลูปปิดแล้ว จะสามารถจำลองผลตอบสนองเชิงเวลาโดยใช้คำสั่ง Isim ในโปรแกรม MATLAB ได้ดังแสดงในรูปที่ 14-12 (ด้านขวา)

ผลตอบสนองเชิงเวลาเมื่ออินพุตเป็นแบบแกว่งกลับไปกลับมาแบบขั้นบันไดในรูปที่ 14-12 มีพฤติกรรมเหมือนกับระบบที่มีแบบความหน่วงขาด อันเนื่องมาจากระบบแบบลูปปิดนี้จะมีโพลเป็นค่าจินตภาพอยู่ที่ตำแหน่ง $-1.25 \pm 2.74i$ ส่วนโพลที่เป็นค่าจริงอยู่ ณ ตำแหน่ง $-0.09, -77.80$ ซึ่งโพลมีค่าจริงที่น้อยนี้จะทำให้ระบบมีผลตอบสนองที่ช้า ในการตรวจสอบประสิทธิภาพของผลตอบสนองเชิงเวลาจะสามารถใช้คำสั่ง $S = \text{lsiminfo}(\text{Theta}, t)$ ซึ่งจะแสดงคุณสมบัติต่าง ๆ ดังนี้



รูปที่ 14-12 ผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบแบบลูปเปิด ในกรณีที่ $V(t) = u(t)$ N (ซ้าย) และ ผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบแบบลูปปิด เมื่อประยุกต์ใช้ระบบควบคุมแบบพีไอ ในกรณีที่ $\theta^*(t)$ เป็นพลัสแบบแกว่งกลับไป-มา แบบขั้นบันไดที่เป็นมุม ± 45 องศา หรือ ± 0.785 rad (ขวา)

Min: -1.1916 % ค่าที่ต่ำที่สุดขององศาการหมุนของเฟลามาอเตอร์

MinTime: 21.1500 % เวลาที่เกิดค่าที่ต่ำที่สุด

Max: 1.1954 % ค่าที่สูงที่สุดขององศาการหมุนของเฟลามาอเตอร์

MaxTime: 6.1500 % เวลาที่เกิดค่าที่สูงที่สุด

จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองจะมีเวลาที่ถึงจุดสูงสุด (T_p) เป็น MaxTime - 5 = 1.15 วินาที หรือ MinTime - 20 = 1.15 วินาที เช่นกัน ส่วนเวลาที่เข้าช่วงนิ่ง (T_s) มีค่าเป็น 10 วินาที และค่าความผิดพลาดตอนท้าย (e_{ss}) เป็น 0.0155 rad = 0.8881 องศา < 1 องศา ดังนั้นค่าความผิดพลาดตอนท้ายนั้นมีย่าน้อยมากหรือกล่าวได้ว่าเฟลามาอเตอร์จะหมุนตามสัญญาณได้ดีหลังจากเวลาผ่านไป 10 วินาที แต่ทว่าเปอร์เซ็นต์โอเวอร์ชูต (%OS) = $(1.1954 - 0.7854) \text{ rad} \times 100 / 0.7854 \text{ rad} = 52.2\%$ ซึ่งเป็นค่าที่สูงมากเกินเกณฑ์ที่กำหนดไว้ในโจทย์ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องนำการควบคุมแบบอนุพันธ์เข้ามาช่วยลดขนาดการกวัดแกว่งหรือเปอร์เซ็นต์โอเวอร์ชูตลง

(ข) สำหรับระบบควบคุมแบบแปรผันตรง-ปริพันธ์-อนุพันธ์ (PID-control) ที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น $G_c(s) = k_p + k_f/s + k_d s$ นั้นจะสามารถใช้ช่วยลดค่าความผิดพลาดตอนท้ายและลดเปอร์เซ็นต์โอเวอร์ชูต ให้เป็นไปตามข้อกำหนดในโจทย์ จะสามารถใช้โปรแกรม MATLAB ในการจำลองผลตอบสนองเชิงเวลาและประเมินประสิทธิภาพของระบบควบคุม โดยใช้คำสั่งที่คล้ายกับในข้อ (ก)

```

% สร้างระบบควบคุมแบบแปรผันตรง-ปริพันธ์ ด้วยฟังก์ชันถ่ายโอน หรือ คำสั่ง "pid"
kp = 15; % อัตราขยายแบบแปรผันตรง (หรือ proportional gain)
ki = 1.4; % อัตราขยายแบบปริพันธ์ (หรือ integral gain)
kd = 5; % อัตราขยายแบบอนุพันธ์ (หรือ derivative gain)
PIDcontrol_sys = tf([kd kp ki],[1 0]); % สร้างระบบควบคุมแบบ PID ด้วยฟังก์ชันถ่ายโอน
PIDcontrol_sys = pid(kp,ki,kd) % หรือ สร้างระบบควบคุมแบบ PID ด้วยคำสั่ง pid
Serial_sys = series(DCMotor_sys,PIDcontrol_sys); % การเชื่อมต่ออนุกรมของระบบ+
% ตัวควบคุมพีไอดี
Feedback_sys = feedback(Serial_sys,1); % การเชื่อมต่อแบบป้อนกลับเชิงลบ
[Theta]=lsim(Feedback_sys,Theta_star,t); % ใช้คำสั่ง lsim จำลองผลตอบสนองเชิงเวลา ( $\theta$ )
% เมื่อกำหนดอินพุตที่เป็นสัญญาณควบคุมองศาการหมุนของเฟลา ( $\theta^*$ ) และเวลา ( $t$ )
plot(t,Theta_star,'k--'); hold on; % วาดกราฟสัญญาณควบคุมองศาการหมุนของเฟลา ( $\theta^*$ )
% ในช่วงเวลา  $t$  ที่กำหนด
plot(t,Theta,'b-','LineWidth',2); % วาดกราฟองศาการหมุนของเฟลา ( $\theta$ ) ในช่วงเวลา  $t$ 
legend('\theta^{*}','\theta'); % ใส่ป้ายชื่อของแต่ละสัญญาณในกราฟ
ylabel('Motor Shaft Angle (\theta) (rad)'); % ชื่อของแกนตั้งที่เป็นองศาการหมุนของเฟลา
xlabel('Time (second)'); % ชื่อของแกนนอนที่เป็นเวลา

```

เมื่อใช้คำสั่ง serial ที่ให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบแบบลูปเปิด สำหรับการเชื่อมต่อแบบอนุกรมระหว่างระบบควบคุมพีไอดี และมอเตอร์แบบดีซีและโหลด และฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบป้อนกลับแบบลูปปิดเชิงลบ ที่เป็นระบบอันดับที่ 4 ซึ่งสามารถหาได้จากการใช้คำสั่ง feedback ได้เป็นดังในสมการที่ (14-2-3)

$$G_p(s) \cdot G_c(s) = \frac{\theta(s)}{\theta^*(s)} = \frac{7.25s^2 + 21.75s + 2.03}{0.02s^4 + 1.61s^3 + 11.47s^2 + 21.75s + 2.03} \quad (14-2-3)$$

ผลตอบสนองเชิงเวลาสามารถจำลองโดยใช้คำสั่ง lsim ในโปรแกรม MATLAB ได้ดังแสดงในรูปที่ 14-13 เมื่ออินพุตเป็นพัลส์แบบแกว่งกลับไปกลับมาแบบขั้นบันได ผลตอบสนองเชิงเวลาที่ได้นั้นมีพฤติกรรมเหมือนกับระบบที่มีความหน่วงแบบวิกฤติ อันเนื่องมาจากระบบแบบลูปปิดนี้จะมีโพลเป็น

ค่าจริงทั้งหมด 4 ค่า อยู่ที่ตำแหน่ง -0.098 , -3.361 , -4.221 , -72.72 ซึ่งโพลที่ -0.098 นี้จะทำให้ระบบมีเวลาที่เพิ่มขึ้น (T_r) ที่ช้า คล้ายกับในข้อ (ก) ส่วนประสิทธิภาพของผลตอบสนองเชิงเวลาเมื่ออินพุตเป็นแบบแกว่งกลับไป-มาแบบขั้นบันได จะสามารถประเมินโดยใช้คำสั่ง $S = \text{lsiminfo}(\text{Theta}, t)$ ที่จะแสดงคุณสมบัติต่างๆ ดังนี้

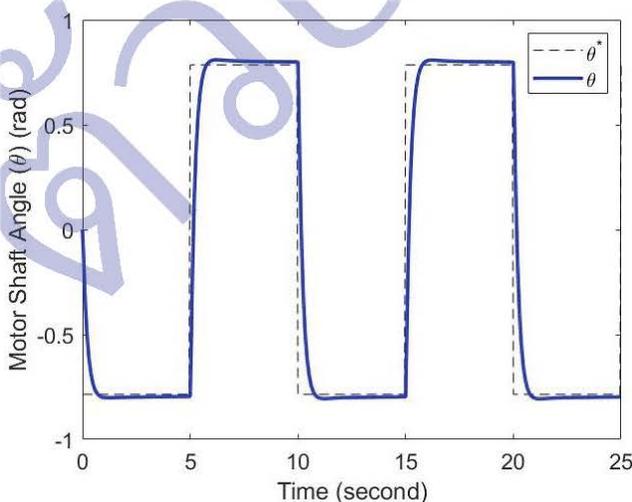
Min: -0.8065 % ค่าที่ต่ำที่สุดขององศาการหมุนของเฟลามาเตอร์

MinTime: 21.2000 % เวลาที่เกิดค่าที่ต่ำที่สุด

Max: 0.8090 % ค่าที่สูงที่สุดขององศาการหมุนของเฟลามาเตอร์

MaxTime: 6.2000 % เวลาที่เกิดค่าที่สูงที่สุด

จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองจะมีเวลาที่ถึงจุดสูงสุด (T_p) เท่ากันกับเวลาที่เข้าช่วงนิ่ง (T_s) ที่เป็น $\text{MaxTime} - 20.0 = 1.2$ วินาที < 1.5 วินาที หรือ $\text{MinTime} - 6.0 = 1.2$ วินาที < 1.5 วินาที เช่นกัน ส่วนค่าความผิดพลาดตอนท้าย (e_{ss}) เป็น 0.0137 rad = 0.7851 องศา < 1 องศา และเปอร์เซ็นต์โอเวอร์ชูต ($\%OS$) = $(0.8090 - 0.7854) \text{ rad} \times 100 / 0.7854 \text{ rad} = 3.0\% < 10\%$ ซึ่งน้อยกว่าในข้อ (ก) และเป็นไปตามเกณฑ์ของโจทย์ที่กำหนดทั้งหมด



รูปที่ 14-13 ผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบแบบลูปปิด เมื่อประยุกต์ใช้ระบบควบคุมแบบพีไอดี ในกรณีที่ $\theta(t)$ เป็นพัลส์แบบแกว่งกลับไป-มาแบบขั้นบันไดที่เป็นมุม ± 45 องศา หรือ ± 0.785 rad

14.3 การจำลองและวิเคราะห์ประสิทธิภาพของระบบในรูปสมการสถานะและสมการเอาต์พุต (State- and Output-equations)

ทั่วไปแล้วสมการสถานะ (State equation) เป็นเซตของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ที่เชื่อมโยงกันระหว่างตัวแปรสถานะ n ตัวและอินพุต r ตัวของระบบ ซึ่งสามารถใช้ร่วมกับสมการเอาต์พุต m ตัวของระบบ ซึ่งจะเหมาะสมกับระบบที่มีหลายอินพุตและหลายเอาต์พุต (MIMO) ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 11 ดังในสมการที่ (11-2) หรือ (14-5) สำหรับสมการสถานะ (State equation) และ (11-3) หรือ (14-6) สำหรับสมการเอาต์พุต (Output equation)

$$\dot{\bar{x}} = \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{B}\bar{u} \tag{14-5}$$

$$\bar{y} = \mathbf{C}\bar{x} + \mathbf{D}\bar{u} \tag{14-6}$$

จะสามารถสร้างระบบของสมการสถานะ และ สมการเอาต์พุต ในรูปของเมทริกซ์ของระบบ (\mathbf{A}) และ เมทริกซ์ควบคุม (\mathbf{B}) และ เมทริกซ์เอาต์พุต (\mathbf{C}) และ เมทริกซ์ส่งผ่านไปด้านหน้าโดยตรง (\mathbf{D}) ในสมการที่ (14-5) และ (14-6) ด้วยคำสั่ง “ss” ในโปรแกรม MATLAB ได้ดังสมการที่ (14-7)

$$\text{system} = \text{ss}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}); \tag{14-7}$$

เมื่อเมทริกซ์ของระบบ (\mathbf{A}) ที่มีมิติเป็น $n \times n$ และ เมทริกซ์ควบคุม (\mathbf{B}) ที่มีมิติเป็น $n \times r$ ซึ่งประกอบด้วยค่าคงที่ ดังในสมการที่ (14-8)

$$\mathbf{A} = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}; \ a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n}; \ \dots \ a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ a_{nn}];$$

และ $\mathbf{B} = [b_{11} \ b_{12} \ \dots \ b_{1r}; \ b_{21} \ b_{22} \ \dots \ b_{2r}; \ \dots \ b_{n1} \ b_{n2} \ \dots \ b_{nr}]; \tag{14-8}$

ส่วนเมทริกซ์เอาต์พุต (\mathbf{C}) ที่มีมิติเป็น $m \times n$ และ เมทริกซ์ส่งผ่านไปด้านหน้าโดยตรง (\mathbf{D}) ที่มีมิติเป็น $m \times r$ ดังในสมการที่ (14-9)

$$\mathbf{C} = [c_{11} \ c_{12} \ \dots \ c_{1n}; \ c_{21} \ c_{22} \ \dots \ c_{2n}; \ \dots \ c_{m1} \ c_{m2} \ \dots \ c_{mn}];$$

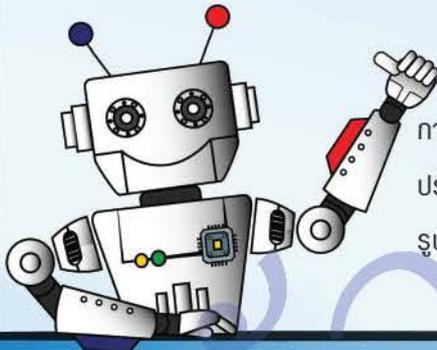
และ $\mathbf{D} = [d_{11} \ d_{12} \ \dots \ d_{1r}; \ d_{21} \ d_{22} \ \dots \ d_{2r}; \ \dots \ d_{m1} \ d_{m2} \ \dots \ d_{mr}]; \tag{14-9}$

ในทางปฏิบัติภาพรวมของระบบใหญ่ (Overall system) จะเกิดจากการเชื่อมต่อของระบบย่อยๆ (Subsystem) หลายๆ ระบบเข้าด้วยกัน โดยในที่นี้ระบบย่อยๆ จะแสดงโดยสมการสถานะร่วมกับสมการเอาต์พุตดังสมการที่ (14-5) และ (14-6) ซึ่งการเชื่อมต่อของระบบ MIMO นั้นสามารถกระทำได้หลากหลายรูปแบบที่รวมทั้งการเชื่อมต่อแบบอนุกรม แบบขนาน และแบบป้อนกลับเหมือนของฟังก์ชันถ่ายโอนในหัวข้อ 14.1 แต่จะเพิ่มการเชื่อมต่ออีก 3 รูปแบบต่อไปนี้ ดังในรูปที่ 14-14 เข้าไปด้วย เพราะว่าระบบจะสามารถมีได้หลายอินพุตและเอาต์พุต การเชื่อมต่อทั้ง 3 รูปแบบจะแสดงพร้อมกับคำสั่งในโปรแกรม MATLAB ดังนี้

พลศาสตร์ของระบบและการควบคุม

SYSTEM DYNAMICS AND CONTROLS

หนังสือเล่มนี้อธิบายถึงทฤษฎีระบบพลศาสตร์แบบเชิงเส้น โดยจะเน้นการวิเคราะห์ทางความถี่และทางเวลา กล่าวถึงการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้งในรูปแบบฟังก์ชันถ่ายโอน (transfer function) และรูปแบบสเปซสเตต (state-space representation) และการจำลองสถานการณ์ เพื่อวิเคราะห์ระบบในด้านต่างๆ เช่น เสถียรภาพ ประสิทธิภาพ เป็นต้น และการควบคุมแบบพีไอดี (PID-control) ที่ใช้ร่วมกับการป้อนกลับแบบลูปปิดของระบบพลศาสตร์แบบเชิงเส้นนี้ การประยุกต์ใช้ทฤษฎีระบบพลศาสตร์ในการวิเคราะห์ระบบทั้ง 4 ประเภทหลักๆ คือ ระบบทางกล, ระบบทางไฮดรอลิก/ของไหล, ระบบทางเทอร์โมไดนามิกส์/การถ่ายเทพลังงาน ความร้อน และระบบของอุปกรณ์ไฟฟ้าแบบอะนาล็อก



ในส่วนของการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับจะกล่าวถึงการประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการออกแบบและช่วยประเมินเสถียรภาพ/ประสิทธิภาพในการควบคุมระบบพลศาสตร์ที่อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันถ่ายโอนและรูปแบบสเปซสเตต

ดร.ปรัชญา เปรมปราณีรัชต์

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ประจำภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ISBN 978-616-314-525-3



9 786163 145253

ราคา 310 บาท
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

<http://www.thammasatpress.tu.ac.th>