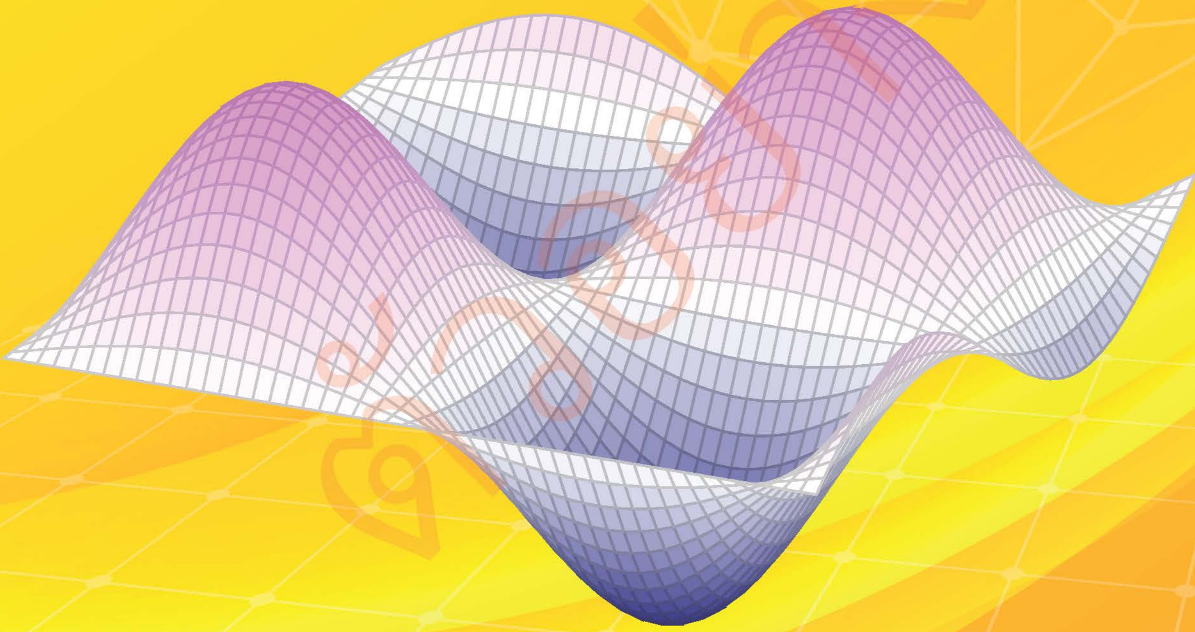
สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

แคลคูลัส 2

ฉบับพิมพ์ครั้งที่ 2 แก้ไขปรับปรุง



ดร.อัจฉรา ปาจีนบูรวรรณ์

หนังสือที่ได้รับทุนสนับสนุนการเขียนตำราจากมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ พ.ศ. 2558

สารบัญ

คำนำ .... (6)

1 อนุพันธ์ย่อย **1**

1.1 ฟังก์ชันหลายตัวแปร 1

1.2 ลิมิตและความต่อเนื่อง 8

1.3 อนุพันธ์ย่อย 21

1.4 การหาอนุพันธ์ได้ ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม และการประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ 38

1.5 กฎลูกโซ่ 50

1.6 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร 68

1.7 ตัวคูณลากรานจ์ 85

2 ปริพันธ์หลายชั้น **101**

2.1 ปริพันธ์สองชั้น 101

2.2 ปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 115

2.3 พิกัดเชิงขั้วและการประยุกต์ 139

2.3.1 พิกัดเชิงขั้ว 139

2.3.2 ปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว 152

2.4 ปริพันธ์สามชั้น 166

บรรณานุกรม **183**

คำตอบแบบฝึกหัด **184**

ดัชนี **204**

คำนำ

แคลคูลัสเป็นสาขาหนึ่งที่สำคัญของคณิตศาสตร์ที่ศึกษาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลง ในทำนองเดียวกับพีชคณิตที่ศึกษาเกี่ยวกับการดำเนินการและการแก้ปัญหาสมการ หรือเรขาคณิตที่ศึกษาเกี่ยวกับรูปร่าง แคลคูลัสมักจะถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ (Differential Calculus) และแคลคูลัสเชิงปริพันธ์ (Integral Calculus) โดยที่แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์จะกล่าวถึงอัตราการเปลี่ยนแปลง และความชันของเส้นโค้ง ซึ่งเราสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันต่างๆ เช่น การหาผลกำไรที่มากที่สุด การหาต้นทุนที่น้อยที่สุด การหาความเร็ว หรือการหาความเร่ง สำหรับแคลคูลัสเชิงปริพันธ์จะกล่าวถึงการคำนวณหาพื้นที่ หรือปริมาตรของรูปทรงทางเรขาคณิตต่างๆ นอกจากนี้แคลคูลัสยังจัดเป็นเครื่องมือที่สำคัญที่เชื่อมระหว่างพีชคณิต และเรขาคณิต นั่นคือแคลคูลัสช่วยให้เข้าใจฟังก์ชันพีชคณิต และเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันนั้นๆ และแคลคูลัส จัดเป็นพื้นฐานของวิทยาศาสตร์เกือบทุกสาขา โดยเฉพาะสาขาวิชาฟิสิกส์ วิชาทางวิศวกรรม และวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูง

ด้วยเหตุนี้วิชาแคลคูลัส 2 จึงได้ถูกบรรจุเป็นวิชาพื้นฐานทั่วไป สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรีคณะวิทยาศาสตร์ ตำราเล่มนี้นักศึกษาสามารถใช้ประกอบการเรียนวิชาแคลคูลัสและผู้สนใจทั่วไปสามารถใช้เป็นแหล่งอ้างอิงในการศึกษาคณิตศาสตร์ตัวอย่างในแต่ละหัวข้อของตำราเล่มนี้ มีความหลากหลายทั้งทางความยากง่ายของข้อปัญหาและทางด้านเทคนิควิธีการหาผลเฉลยของข้อปัญหาที่กำหนดให้

ผู้เขียนขอขอบคุณ ดร.ปริวัฒน์ ปาจีนบูรวรรณ์ เป็นอย่างยิ่งที่คอยสนับสนุนและเป็นกำลังใจตลอดระยะเวลาที่ตระเตรียมตำราเล่มนี้

สุดท้ายผู้เขียนกราบขอบพระคุณ คุณพ่อสกนธ์ และคุณแม่อรวรรณ ไชยกาญจน์ ที่คอยเป็นกำลังใจ และเป็นแบบอย่างที่ดีในการทำงาน เพื่อผลิตผลงานที่มีคุณภาพและเป็นประโยชน์ต่อบุคคลอื่น

รองศาสตราจารย์ ดร.อัจฉรา ปาจีนบูรวรรณ์

สิงหาคม 2563

บทนิยาม 1.7

ถ้า $z = f(x,y)$ และ (a,b) เป็นจุดใด ๆ ในโดเมนของ f แล้ว ***อนุพันธ์ย่อย*** (partial derivative) ของ f เทียบกับ x ที่จุด (a,b) [หรือเรียกว่าอนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ x ที่จุด (a,b)] คืออนุพันธ์ที่จุด $x = a$ ของฟังก์ชันเมื่อ $y = b$ เป็นค่าคงตัว และ x มีค่าแปรผัน อนุพันธ์ย่อยนี้สามารถเขียนแทนด้วย $f_x(a,b)$ นั่นคือ

$$f_x(a,b) = \frac{d}{dx}[f(x,b)]\Big|_{x=a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x, b) - f(a,b)}{\Delta x} \qquad (1.3)$$

ในทำนองเดียวกัน อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (a,b) [หรือเรียกว่าอนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ y ที่จุด (a,b)] คือ อนุพันธ์ที่จุด $y = b$ ของฟังก์ชันเมื่อ $x = a$ เป็นค่าคงตัว และ y มีค่าแปรผัน อนุพันธ์ย่อยนี้สามารถเขียนแทนด้วย $f_y(a,b)$ นั่นคือ

$$f_y(a,b) = \frac{d}{dy}[f(a,y)]\Big|_{y=b} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b+\Delta y) - f(a,b)}{\Delta y} \qquad (1.4)$$

ตัวอย่าง 1.20

จงหา $f_x(1,0)$ และ $f_y(2,-1)$ สำหรับฟังก์ชัน $f(x,y) = 3x^2 + x^3y + 4y^2$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$f_x(x,0) = \frac{d}{dx}[f(x,0)] = \frac{d}{dx}[3x^2] = 6x$$

ดังนั้น $f_x(1,0) = 6(1) = 6$ และเนื่องจาก

$$f_y(2,y) = \frac{d}{dy}[f(2,y)] = \frac{d}{dy}[12 + 8y + 4y^2] = 8 + 8y$$

ดังนั้น $f_y(2,-1) = 8 + 8(-1) = 0$ ✠

ฟังก์ชันอนุพันธ์ย่อย

สูตร (1.3) และ (1.4) เป็นการให้นิยามอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่จุด (a,b) อย่างไรก็ตาม บางครั้งเราอาจต้องการอนุพันธ์ย่อยในรูปฟังก์ชันของตัวแปร x และ y ซึ่งฟังก์ชันเหล่านี้คือ

$$\boxed{f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}}$$

และ

$$\boxed{f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นอีกวิธีหนึ่งสำหรับการหาคำตอบของตัวอย่าง 1.20

ตัวอย่าง 1.21

จงหา $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ สำหรับ $f(x,y) = 3x^2 + x^3y + 4y^2$ และใช้อนุพันธ์ย่อยที่หาได้คำนวณ $f_x(1,0)$ และ $f_y(2,-1)$

วิธีทำ ถ้าให้ y เป็นค่าคงตัว และหาอนุพันธ์เทียบกับ x แล้วจะได้

$$f_x(x,y) = \frac{d}{dx}[3x^2 + x^3y + 4y^2] = 6x + 3x^2y$$

ถ้าให้ x เป็นค่าคงตัว และหาอนุพันธ์เทียบกับ y แล้วจะได้

$$f_y(x,y) = \frac{d}{dy}[3x^2 + x^3y + 4y^2] = x^3 + 8y$$

ดังนั้น

$$f_x(1,0) = 6(1) + 3(1)^2(0) = 6 \quad \text{และ} \quad f_y(2,-1) = (2)^3 + 8(-1) = 0$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับผลลัพธ์ในตัวอย่าง 1.20 ✠

สัญลักษณ์ของอนุพันธ์ย่อย

ถ้า $z = f(x,y)$ แล้วอนุพันธ์ย่อย f_x และ f_y สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

ในขณะที่อนุพันธ์ย่อยของ $z = f(x,y)$ ที่จุด (a,b) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=a,y=b}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(a,b)$$

ตัวอย่าง 1.22

จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ถ้า $z = e^{xy} + \dfrac{x}{y}$

วิธีทำ

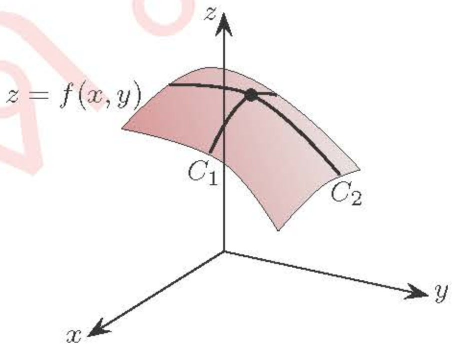
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{xy} + \frac{x}{y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{xy}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{y}\right] \\
&= e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}[xy] + \frac{1}{y} = ye^{xy} + \frac{1}{y} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{xy} + \frac{x}{y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{xy}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{y}\right] \\
&= e^{xy}\frac{\partial}{\partial y}[xy] - \frac{x}{y^2} = xe^{xy} - \frac{x}{y^2}
\end{aligned}
$$

✠

อนุพันธ์ย่อยในความหมายของอัตราการเปลี่ยนแปลงและความชัน

จากที่ได้ศึกษามาแล้วถ้า $y = f(x)$ แล้วค่าของ $f'(a)$ หมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ที่ $x = a$ หรือหมายถึงความชันของเส้นสัมผัสกราฟของ f ที่ $x = a$ อนุพันธ์ย่อยก็มีความหมายในลักษณะเดียวกัน

สมมุติให้ C_1 เป็นเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของผิว $z = f(x, y)$ กับระนาบ $y = b$ และ C_2 เป็นเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของผิวดังกล่าวกับระนาบ $x = a$ ดังรูป



ดังนั้น $f_x(x, b)$ หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ z เทียบกับ x ตามแนวเส้นโค้ง C_1 และ $f_y(a, y)$ หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ z เทียบกับ y ตามแนวเส้นโค้ง C_2 และจะได้ว่า $f_x(a, b)$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ z เทียบกับ x ตามแนวเส้นโค้ง C_1 ที่จุด (a, b) และ $f_y(a, b)$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ z เทียบกับ y ตามแนวเส้นโค้ง C_2 ที่จุด (a, b)

ตัวอย่าง 1.23

จากกฎของแก๊สอุดมคติ ความดัน อุณหภูมิ และปริมาตรของแก๊สสัมพันธ์กันด้วยสมการ $PV = kT$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน สมมุติให้ V มีหน่วยเป็นลูกบาศก์เมตร และ T มีหน่วยเป็นแคลวิน และให้ค่าคงตัวของการแปรผันของแก๊สเท่ากับ $k = 10$ จูลต่อแคลวิน

(a) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความดัน เทียบกับอุณหภูมิ ถ้าอุณหภูมิมีค่าเท่ากับ 80 แคลวิน และปริมาตรมีค่าคงตัวเท่ากับ 50 ลูกบาศก์เมตร

(b) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเทียบกับความดัน ถ้าปริมาตรมีค่าเท่ากับ 50 ลูกบาศก์เมตร และอุณหภูมิมีค่าคงตัวเท่ากับ 80 แคลวิน

วิธีทำ (a) จากสมการที่กำหนดให้จะได้ $P = \dfrac{kT}{V}$ ดังนั้น

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{kT}{V}\right] = \frac{k}{V}$$

เนื่องด้วย $T = 80$ และ $V = 50$ ดังนั้น

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{10}{50} = 0.2$$

นั่นคือเมื่อปริมาตรมีค่าคงตัวเท่ากับ 50 ลูกบาศก์เมตร แล้วอัตราการเปลี่ยนแปลงของความดันเทียบกับอุณหภูมิเท่ากับ 0.2 ลูกบาศก์เมตรต่อแคลวิน เมื่ออุณหภูมิมีค่าเท่ากับ 80 แคลวิน

(b) จากสมการที่กำหนดให้จะได้ $V = \dfrac{kT}{P}$ ดังนั้น

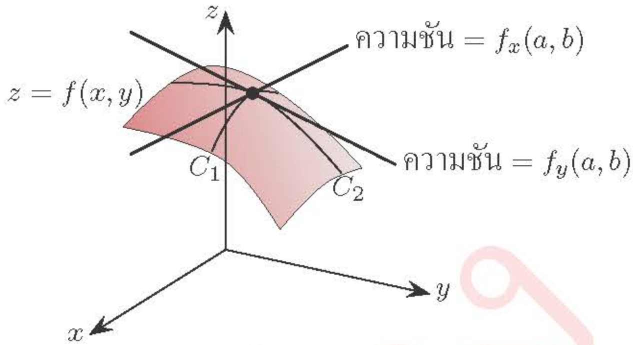
$$\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{kT}{P}\right] = -\frac{kT}{P^2}$$

ถ้า $V = 50$ และ $T = 80$ แล้ว $P = \dfrac{10 \cdot 80}{50} = 16$ และจะได้ว่า

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{10 \cdot 80}{16^2} = -3.125$$

นั่นคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเทียบกับความดันเท่ากับ -3.125 ลูกบาศก์เมตรต่อปาสกาล เมื่อปริมาตรมีค่าเท่ากับ 50 และอุณหภูมิมีค่าเท่ากับ 80 แคลวิน ✠

ในเชิงเรขาคณิต $f_x(a,b)$ หมายถึงความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_1 ที่จุด (a,b) และ $f_y(a,b)$ หมายถึงความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_2 ที่จุด (a,b) เราจะเรียก $f_x(a,b)$ ว่า ***ความชันของผิวในทิศทางของ x ที่จุด*** (a,b) และเรียก $f_y(a,b)$ ว่า ***ความชันของผิวในทิศทางของ y ที่จุด*** (a,b) ดังรูป



ตัวอย่าง 1.24

กำหนดให้ $f(x,y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x$

(a) จงหาความชันของผิว $z = f(x,y)$ ในทิศทางของ x ที่จุด $(2,-1)$

(b) จงหาความชันของผิว $z = f(x,y)$ ในทิศทางของ y ที่จุด $(2,-1)$

วิธีทำ (a) หาอนุพันธ์ของ f เทียบกับ x โดยให้ y เป็นค่าคงตัว จะได้

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[x^3y^2 - 2x^2y + 3x] = 3x^2y^2 - 4xy + 3$$

ดังนั้นความชันในทิศทางของ x ที่จุด $(1,0)$ คือ $f_x(2,-1) = 23$

(b) หาอนุพันธ์ของ f เทียบกับ y โดยให้ x เป็นค่าคงตัว จะได้

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[x^3y^2 - 2x^2y + 3x] = 2x^3y - 2x^2$$

ดังนั้นความชันในทิศทางของ y ที่จุด $(2,-1)$ คือ $f_y(2,-1) = -24$ ✠

อนุพันธ์ย่อยโดยปริยาย

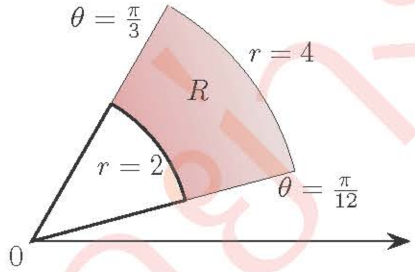
ถ้า z เป็นฟังก์ชันของ x และ y แต่ไม่สามารถเขียนในรูป $z = f(x,y)$ ได้ เราจะเรียกฟังก์ชันในลักษณะนี้ว่า ***ฟังก์ชันปริยาย*** (implicit function) วิธีการหาอนุพันธ์ย่อยของ

บทนิยาม 2.5

บริเวณเชิงขั้วเชิงเดียว ในพิกัดเชิงขั้วคือ บริเวณที่ปิดล้อมระหว่างรังสี $\theta = \alpha$ และ $\theta = \beta$ และเส้นโค้งเชิงขั้วที่ต่อเนื่อง $r = r_1(\theta)$ และ $r = r_2(\theta)$ เมื่อสมการของรังสีและเส้นโค้งเชิงขั้วสอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $\alpha \leq \beta$ (ii) $\beta - \alpha \leq 2\pi$ (iii) $0 \leq r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$

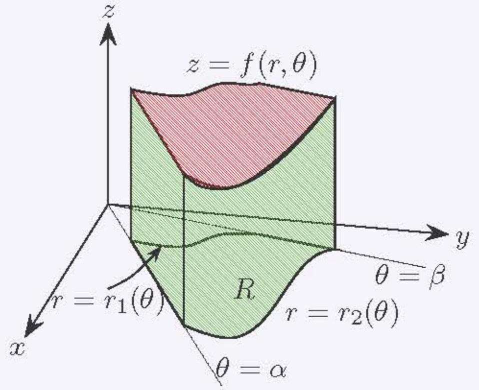
รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้ว (polar rectangle) เป็นบริเวณเชิงขั้วเชิงเดียวที่ปิดล้อมด้วยส่วนโค้งเชิงวงกลม (circular arcs) ตัวอย่างเช่น รูปต่อไปนี้แสดงรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้ว R ที่กำหนดโดย $2 \leq r \leq 4$ และ $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$



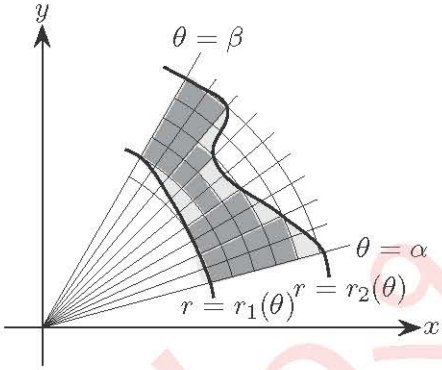
ปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว

เริ่มด้วยการพิจารณาปัญหาปริมาตรในระบบพิกัดเชิงขั้วดังนี้

ปัญหาปริมาตรในพิกัดเชิงขั้ว ให้ $f(r, \theta)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนบริเวณเชิงขั้วเชิงเดียว R จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมระหว่างบริเวณ R และผิวที่มีสมการคือ $z = f(r, \theta)$ ดังรูป



การหาปริมาตร V ของทรงตัน สามารถหาได้โดยใช้กระบวนการลิมิตในทำนองเดียวกับการหาปริมาตรของทรงตัน ในหัวข้อ 2.2 ยกเว้นในที่นี้เราใช้ส่วนโค้งเชิงวงกลมและรังสีในการแบ่งบริเวณ R ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วย่อย ๆ และพิจารณาเฉพาะรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วย่อยที่เป็นสับเซตของบริเวณ R ดังรูป

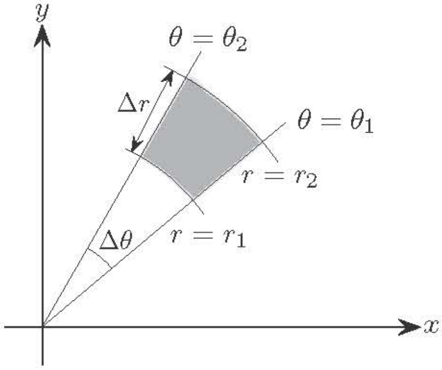


สมมุติให้ มีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วย่อยทั้งหมด n รูป ให้ ΔA_i แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วย่อยที่ i และให้ (r_i^*, θ_i^*) เป็นจุดในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วย่อยที่ i ผลคูณ $f(r_i^*, \theta_i^*)\Delta A_i$ คือปริมาตรของทรงตันที่มีพื้นที่ฐาน ΔA_i และสูง $f(r_i^*, \theta_i^*)$ ดังนั้นผลบวก

$$\sum_{i=1}^{n} f(r_i^*, \theta_i^*)\Delta A_i$$

คือค่าประมาณของปริมาตร V ทั้งหมดของทรงตัน และเรียกผลบวกนี้ว่า ***ผลบวกรีมันน์เชิงขั้ว*** (polar Riemann sums)

สำหรับพื้นที่ ΔA ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วดังรูป



สามารถหาได้ดังนี้ ให้ $\bar{r} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ เป็นรัศมีเฉลี่ยของส่วนโค้งเชิงวงกลม $r = r_1$ และ $r = r_2$ เนื่องด้วยพื้นที่ของส่วนวงเท่ากับ $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ เมื่อ r เป็นความยาวรัศมี

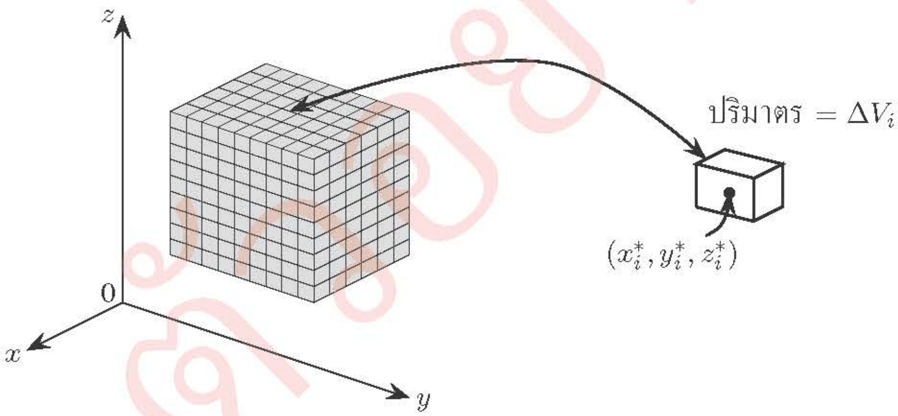
2.4 ปริพันธ์สามชั้น

บทนิยามของปริพันธ์สามชั้น

จากที่ได้ศึกษามาแล้ว ปริพันธ์ชั้นเดียวของฟังก์ชัน $f(x)$ จะถูกนิยามบนช่วงปิดใด ๆ บนแกน x ในขณะที่ปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y)$ จะถูกนิยามบนบริเวณปิด R ในระนาบ xy ในหัวข้อนี้เราจะให้นิยาม *ปริพันธ์สามชั้น* ของ $f(x,y,z)$ บนทรงตันปิด G ในระบบพิกัด xyz กรณีที่ง่ายที่สุดคือ กรณีที่ทรงตัน G มีลักษณะเป็นกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากในระบบพิกัด xyz ที่นิยามโดย

$$G = \{(x,y,z)\,|\,a \le x \le b, c \le y \le d, k \le z \le \ell\}$$

การนิยามปริพันธ์สามชั้นของ $f(x,y,z)$ บน G เริ่มด้วยการแบ่งกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก G โดยใช้ระนาบที่ขนานกับระนาบ xy ระนาบที่ขนานกับระนาบ xz และระนาบที่ขนานกับระนาบ yz ออกเป็นกล่องย่อย n กล่อง ดังรูปต่อไปนี้



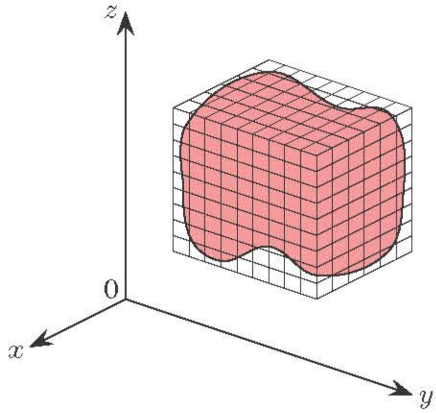
ให้ ΔV_i แทนปริมาตรของกล่องย่อยที่ i และให้ (x_i^*, y_i^*, z_i^*) แทนจุดใด ๆ ในกล่องย่อยที่ i จากการบวกผลคูณ

$$f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta V_i$$

ของทุกกล่องย่อยจะได้ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum)

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta V_i$$

ถ้าให้ $\|P\|$ แทนความยาวของเส้นทแยงมุมของกล่องย่อยที่ยาวที่สุด แล้วเราสามารถนิยามปริพันธ์สามชั้นของ $f(x,y,z)$ บน G ดังนี้



สมมุติว่ามีทรงตันย่อยทั้งหมด n กล่อง เราเรียกทรงตันย่อยเหล่านี้ว่า *ส่วนแบ่งภายใน* (inner partitions) ของ G และเขียนแทนทรงตันย่อยด้วย $G_1, G_2, \ldots, G_n$ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, n$ ให้ ΔV_i แทนปริมาตรของทรงตันย่อยที่ i และให้ (x_i^*, y_i^*, z_i^*) แทนจุดใด ๆในทรงตันย่อยที่ i จากการบวกผลคูณ

$$f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta V_i$$

ของทุกทรงตันย่อยจะได้ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum)

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta V_i$$

ดังนั้นเราสามารถให้นิยามของปริพันธ์สามชั้นบนทรงตัน G ในรูปของลิมิตของผลบวกรีมันน์ตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.7

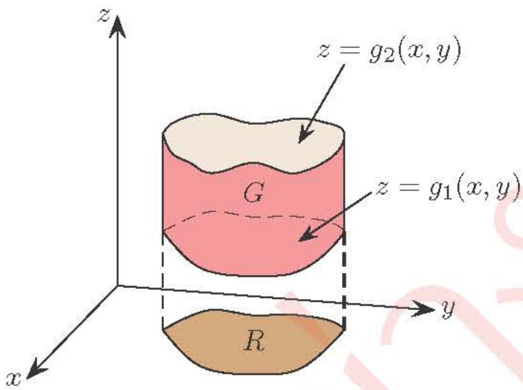
ถ้า $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนทรงตัน G ซึ่งเป็นทรงตันที่มีขอบเขตแล้ว ***ปริพันธ์สามชั้น*** (triple integral) ของ f บน G คือ

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta V_i \qquad (2.27)$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้ และกล่าวว่า f ***หาปริพันธ์ได้*** (integrable) บน G

ผู้อ่านจะสังเกตได้ว่าบทนิยาม 2.7 เหมือนกับบทนิยาม 2.6 ยกเว้นสมการ (2.27) เป็นการบวกของส่วนแบ่งภายในของ G

สำหรับการหาค่าปริพันธ์สามชั้นบนทรงตันที่ไม่ใช่กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ในที่นี้เราจะพิจารณากรณีที่ทรงตัน G ถูกปิดล้อมด้านบนด้วยผิว $z = g_2(x, y)$ ปิดล้อมด้านล่างด้วยผิว $z = g_1(x, y)$ และภาพฉายของทรงตันบนระนาบ xy เป็นบริเวณแบบที่ 1 หรือบริเวณแบบที่ 2 ดังรูป



นอกจากนี้เราจะสมมุติให้ $g_1(x, y)$ และ $g_2(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R และ $g_1(x, y) \le g_2(x, y)$ บน R ในเชิงเรขาคณิตผิว $g_1(x, y)$ และ $g_2(x, y)$ อาจจะสัมผัสกันแต่ไม่ตัดกัน ซึ่งจะเรียกทรงตันนี้ว่า ***ทรงตัน xy เชิงเดียว*** (simple xy-solid)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้สามารถนำมาใช้หาค่าปริพันธ์สามชั้นบนทรงตัน xy เชิงเดียว

ทฤษฎีบท 2.7

ให้ G เป็นทรงตัน xy เชิงเดียวที่มีผิวด้านบนคือ $z = g_2(x, y)$ และผิวด้านล่างคือ $z = g_1(x, y)$ และให้ R เป็นภาพฉายของ G บนระนาบ xy ถ้า $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G แล้ว

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dV = \iint\limits_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA \qquad (2.28)$$

การหาค่าปริพันธ์สามชั้นในสมการ (2.28) จะเริ่มด้วยการหาปริพันธ์เทียบกับ z ซึ่งจะได้ฟังก์ชันของ x และ y จากนั้นหาปริพันธ์ของฟังก์ชันของ x และ y บนบริเวณ R ในระนาบ xy การประยุกต์ใช้สมการ (2.28) เราควรเริ่มด้วยการวาดรูปของทรงตัน G และ ลิมิตของการหาปริพันธ์สามารถหาได้โดยมีขั้นตอนดังนี้

แคลคูลัส 2

แคลคูลัสเป็นสาขาหนึ่งที่สำคัญของคณิตศาสตร์ที่ศึกษาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลง ในทำนองเดียวกับพีชคณิตที่ศึกษาเกี่ยวกับการดำเนินการและการแก้ปัญหาสมการ หรือเรขาคณิตที่ศึกษาเกี่ยวกับรูปร่าง แคลคูลัสมักจะถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ (Differential Calculus) และแคลคูลัสเชิงปริพันธ์ (Integral Calculus) โดยที่แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์จะกล่าวถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงและความชันของเส้นโค้ง ซึ่งเราสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันต่างๆ เช่น การหาผลกำไรที่มากที่สุด การหาต้นทุนที่น้อยที่สุด การหาความเร็ว หรือการหาความเร่ง สำหรับแคลคูลัสเชิงปริพันธ์จะกล่าวถึงการคำนวณหาพื้นที่ หรือปริมาตรของรูปทรงทางเรขาคณิตต่างๆ นอกจากนี้แคลคูลัสยังจัดเป็นเครื่องมือที่สำคัญที่เชื่อมระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิต นั่นคือ แคลคูลัสช่วยให้เข้าใจฟังก์ชันพีชคณิตและเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันนั้นๆ และแคลคูลัสจัดเป็นพื้นฐานของวิทยาศาสตร์เกือบทุกสาขา โดยเฉพาะสาขาวิชาฟิสิกส์ วิชาทางวิศวกรรม และวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูง

รองศาสตราจารย์ ดร.อัจฉรา ปาจีนบูรวรรณ์

อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

การศึกษา:

- วิทยาศาสตรบัณฑิต (ศึกษาศาสตร์) มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี
- วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) มหาวิทยาลัยมหิดล
- Master of Arts in Mathematics, Western Michigan University, USA.
- Doctor of Philosophy in Mathematics, Western Michigan University, USA.

ผลงานตำรา:

- *แคลคูลัส 1*. พิมพ์ครั้งที่ 4, 2555
- *พีชคณิตเชิงเส้น*. พิมพ์ครั้งที่ 3, 2556
- *คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์*. 2557
- *แคลคูลัส 2*. พิมพ์ครั้งที่ 2, 2563

ISBN 978-616-314-645-8

9 786163 146458

ราคา 160 บาท

หมวดคณิตศาสตร์

http://www.thammasatpress.tu.ac.th