SE-ED's TEXTBOOK

เหมาะสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรีและปริญญาโท

สมการเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์เชิงวิศวกรรมศาสตร์

Differential Equations and Applied in Engineering

รศ. ดร. ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์

ซีเอ็ด

สมการเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์เชิงวิศวกรรมศาสตร์

โดย รศ. ดร. ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์.

สมการเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์เชิงวิศวกรรมศาสตร์. -- กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น, 2558.

824 หน้า.

1. สมการเชิงอนุพันธ์.

I. ชื่อเรื่อง.

515.35

Barcode (e-book) 9786160841783

ผลิตและจัดจำหน่ายโดย

บริษัท ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด (มหาชน)
SE-EDUCATION PUBLIC COMPANY LIMITED

เลขที่ 1858/87-90 ถนนเทพรัตน แขวงบางนาใต้ เขตบางนา กรุงเทพฯ 10260

โทรศัพท์ 0-2826-8000

หากมีคำแนะนำหรือติชม สามารถติดต่อได้ที่ comment@se-ed.com

คำนำ

สมการเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์เชิงวิศวกรรมศาสตร์ (Differential Equations and Applied in Engineering) ผู้เขียนได้เขียนและเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอนในระดับปริญญาตรี หลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศ.บ.) หลักสูตรอุตสาหกรรมศาสตรบัณฑิต (อส.บ.) หลักสูตรครุศาสตร์อุตสาหกรรมบัณฑิต (ค.อ.บ.) และหลักสูตรเทคโนโลยีบัณฑิต (ทล.บ.) รวมทั้งใช้ในการเรียนการสอนในระดับปริญญาโท หลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วศ.ม.) มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล มหาวิทยาลัยราชภัฏ สถาบันการอาชีวศึกษา และมหาวิทยาลัยอื่นๆ ทั้งของรัฐและเอกชนที่เปิดสอนหลักสูตรดังกล่าว อีกทั้งผู้สนใจสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการประกอบการเรียนการสอนเพิ่มเติมได้

โดยมีเนื้อหาดังนี้ สมการเชิงอนุพันธ์ การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับต่างๆ ผลการแปลงลาปลาซ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นและการประยุกต์ ผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเบื้องต้น

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดาและมารดา (คุณพ่อคนพั๊ก และคุณแม่เหนียว แซ่อุ่ย) ที่มีพระคุณอันยิ่งใหญ่มหาศาลหาสิ่งอื่นใดเสมอมิได้ และผู้เขียนขอโอกาสนี้แสดงคารวะและกตัญญูกตเวทีต่ออาจารย์ทุกๆ ท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้ให้แก่ผู้เขียน รวมถึง ผศ. เมธี ลิมอักษร, ผศ. เสกสรร ดำกระบี่, รศ. ดร. สมใจ จิตพิทักษ์, รศ. ดร. วิชัย ชำนิ, รศ. สมศักดิ์ โพธิวิจิตร, ศ. ดร. สุพจน์ ชะนะมา, รศ. ดร. สุเทพ ทองอยู่, ศ. ดร. สมหวัง พิธิยานุวัฒน์, ศ. ดร. อุทุมพร จามรมาน, อาจารย์ ดร. อัญชลี ตนานนท์, รศ. ดร. กิตติพร ปัญญาภิญโญผล ที่เป็นบูรพคณาจารย์ ขอขอบคุณ ดร. จัตตุฤทธิ์ ทองปรอน และ ผศ. ดร. ประชา ยืนยงกุล อาจารย์คณะวิศวกรรมศาสตร์ ที่ให้ข้อแนะนำเพิ่มเติมเกี่ยวกับการประยุกต์เชิงวิศวกรรมศาสตร์ และท้ายสุดครอบครัว (คุณพ่อสุรพล และคุณแม่มาณี มั่งมูล นางกัลยา และนางสาวกมลวรรณ อุรัจนานนท์) อันเป็นที่รักยิ่งของผู้เขียนตลอดไป

รศ.ดร. ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์

SE-ED

inspiration starts here

สารบัญ

SE-ED

inspiration starts here

1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นทั่วไป

สมการเชิงอนุพันธ์เป็นพื้นฐานที่สำคัญของคณิตศาสตร์สำหรับวิศวกร เพราะความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่างๆ และกฎต่างๆ ทางฟิสิกส์ มักจะปรากฏในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ จากที่ผ่านมาได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง ในบทนี้จะได้ขยายมโนภาพออกไปศึกษาวิธีการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นทั่วไป หรือสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n โดย n เป็นจำนวนเต็มบวก

1.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n (Linear Differential Equation of Order n)

บทนิยาม 1.1.1

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n หมายถึง สมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

โดยที่ $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ และ $f(x)$ ต่างเป็นฟังชันของตัวแปร x ที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิดของจำนวนจริง $a \le x \le b$ และ $a_0(x) \neq 0$

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + x^3y = e^x$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ 2

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\frac{dy}{dx} - 5y = \sin x$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ 3

จากบทนิยาม 1.1.1 ถ้า $f(x) = 0$ จะได้

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0$$

เรียกสมการนี้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์อันดับ n (Homogeneous Linear Differential Equation of Order n)

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์อันดับ 2

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + x^2y = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์อันดับ 3

แต่ถ้า $f(x) \neq 0$ จะได้

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\, d\, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

เรียกสมการนี้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับ n (Nonhomogeneous Linear Differential Equation of Order n)

ตัวอย่างเช่น

$$y'' + 3y' + 2y = 4x^2$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับ 2

$$y'' + y = x^2 + e^x$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับ 2

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} - 4y = e^x$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับ 3

ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (Differential Operator)

เพื่อความสะดวกในการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n จะใช้สัญลักษณ์แทนอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอิสระ x ดังนี้

$$D = \frac{d}{dx},\ D^2 = \frac{d^2}{dx^2},\ D^3 = \frac{d^3}{dx^3},\ \ldots,\ D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

เรียก D^i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ว่า ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

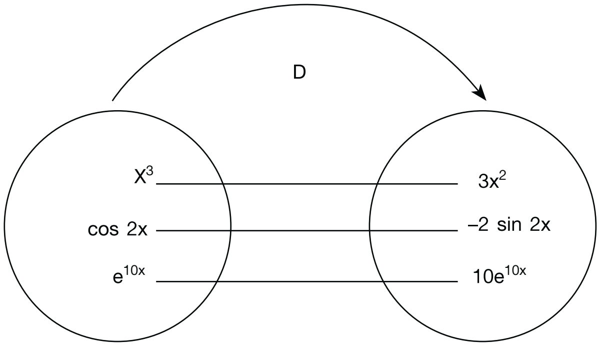
ถ้า y เป็นฟังก์ชันของ x ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ n จะได้

$$Dy = \frac{dy}{dx},\ D^2y = \frac{d^2y}{dx^2},\ D^3y = \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots,\ D^ny = \frac{d^ny}{dx^n}$$

และสังเกตได้ว่า $D^0y = y$

เราเรียกสัญลักษณ์ D^0 ว่า ตัวดำเนินการเอกลักษณ์ (Identity Operator)

จากการที่เราแทนสัญลักษณ์ $\frac{d}{dx}$ ด้วย D จะได้ว่า D มีลักษณะเหมือนกับฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และเรนจ์เป็นเซตของฟังก์ชัน ดังแผนภูมิดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1

ตัวอย่างตัวดำเนินการเอกลักษณ์ เช่น

กำหนดให้ $y = 4x^3 + 3x^2 + 1$

จะได้ Dy และ D^2y ดังนี้

$$Dy = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^3 + 3x^2 + 1)$$

$$= 12x^2 + 6x$$

$$D^2y = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(12x^2 + 6x)$$

$$= 24x + 6$$

กำหนดให้ $y = 3e^{-4x} + 5e^{2x} + 4x^2$

จะได้ Dy, D^2y และ D^3y ดังนี้

$$Dy = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3e^{-4x} + 5e^{2x} + 4x^2)$$

$$= -12e^{-4x} + 10e^{2x} + 8x$$

$$D^2y = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(-12e^{-4x} + 10e^{2e} + 8x)$$

$$= 48e^{-4x} + 20e^{2x} + 8$$

$$D^3y = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(48e^{-4x} + 20e^{2x} + 8)$$

$$= -192e^{-4x} + 40e^{2x}$$

กำหนดให้ $y = 2\sin 3x - \cos 2x$

จะได้ Dy, D^2y และ D^3y ดังนี้

$$Dy = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin 3x - \cos 2x)$$

$$= 6\cos 3x + 2\sin 2x$$

$$D^2y = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(6\cos 3x + 2\sin 2x)$$

$$= -18\sin 3x + 4\cos 2x$$

$$D^3y = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(-18\sin 3x + 4\cos 2x)$$

$$= -54\cos 3x - 8\sin 2x$$

จากการใช้สัญลักษณ์ดังกล่าว สามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n ได้ดังนี้

$$a_0(x)D^n y + a_1(x)D^{n-1} y + a_2(x)D^{n-2} y + \dots + a_{n-1}(x)Dy + a_n(x)y = f(x)$$

หรือ $a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + \dots + a_{n-1} Dy + a_n y = f(x)$

หรือ $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-1} D + a_n)y = f(x)$

และถ้าให้ $Q(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-1} D + a_n$

จะได้ $Q(D)y = f(x)$

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 10y = x^2 + 3$$

สามารถเขียนได้เป็น

$$D^2y - 3Dy - 10y = x^2 + 3$$

$$(D^2 - 3D - 10)y = x^2 + 3$$

จะได้ $Q(D) = D^2 - 3D - 10$

หรือ $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = \sin x$

สามารถเขียนได้เป็น

$$D^3y + 4D^2 y - 4Dy + 5y = \sin x$$

$$(D^3 + 4D^2 - 4D + 5)y = \sin x$$

จะได้ $Q(D) = D^3 + 4D^2 - 4D + 5$

บทนิยาม 1.1.2

ถ้าให้ $Q(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$

โดยที่ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นฟังก์ชันของ x และ $a_0 \neq 0$ และเรียก Q(D) ว่า ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n (Differential Operator of Order n) และให้นิยาม Q(D) y ดังนี้

$$\begin{aligned} Q(D)y &= (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n)y \\ &= a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + \ldots + a_{n-1} Dy + a_n y \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.1 กำหนด Q(D) และ y จงหาค่าของผลการดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (Q(D)y) ต่อไปนี้

ก. $Q(D) = D^2 - 3D - 10,\ y = e^{2x}$

ข. $Q(D) = x^2D^2 + 4D + 7,\ y = \sin x$

ค. $Q(D) = D^3 - 3D^2 + 3D - 1,\ y = e^x$

วิธีทำ

ก. $Q(D) = D^2 - 3D - 10,\ y = e^{2x}$

$$\begin{aligned} Q(D)y &= (D^2 - 3D - 10)(e^{2x}) \\ &= D^2(e^{2x}) - 3D(e^{2x}) - 10(e^{2x}) \\ &= D(2e^{2x}) - 3(2e^{2x}) - 10e^{2x} \\ &= 4e^{2x} - 6e^{2x} - 10e^{2x} \\ &= -12e^{2x} \end{aligned}$$

ข. $Q(D) = x^2D^2 + 4D + 7,\ y = \sin x$

$$\begin{aligned} Q(D)y &= (x^2D^2 + 4D + 7)\sin x \\ &= x^2 D^2(\sin x) + 4D(\sin x) + 7 \sin x \\ &= x^2 D(\cos x) + 4 \cos x + 7 \sin x \\ &= -x^2 \sin x + 4 \cos x + 7 \sin x \end{aligned}$$

ค. $Q(D) = D^3 - 3D^2 + 3D - 1,\ y = e^x$

$$\begin{aligned} Q(D)y &= (D^3 - 3D^2 + 3D - 1)e^x \\ &= D^3(e^x) - 3D^2(e^x) + 3D(e^x) - (1)(e^x) \\ &= D^2(e^x) - 3D(e^x) + 3e^x - e^x \\ &= D(e^x) - 3e^x + 3e^x - e^x \\ &= e^x - 3e^x + 3e^x - e^x \\ &= 0 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.1.1

ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ $Q(D)$ มีสมบัติเชิงเส้น กล่าวคือ ถ้าให้ y และ z เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ n และ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวแล้ว จะได้

$$Q(D)(c_1y + c_2z) = c_1Q(D)y + c_2Q(D)z$$

พิสูจน์ $Q(D)(c_1y + c_2z)$

$$\begin{aligned} &= (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-1}D + a_n)(c_1y + c_2z) \\ &= a_0D^n(c_1y + c_2z) + a_1D^{n-1}(c_1y + c_2z) + \dots + a_{n-1}D(c_1y + c_2z) + a_n(c_1y + c_2z) \\ &= a_0 D^n c_1y + a_0 D^n c_2z + a_1 D^{n-1} c_1y + a_1D^{n-1} c_2z + \dots + a_{n-1} Dc_1y \\ &\quad + a_{n-1} Dc_2z + a_n c_1y + a_n c_2z \\ &= c_1(a_0 D^n y + a_1D^{n-1} y + \dots + a_{n-1}Dy + a_ny) + c_2(a_0 D^nz + a_1D^{n-1}z \\ &\quad + \dots + a_{n-1} Dz + a_nz) \\ &= c_1Q(D)y + c_2Q(D)z \end{aligned}$$

จากผลที่ได้นี้ สามารถขยายออกไปได้ดังนี้

$$Q(D)(c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n) = c_1Q(D)y_1 + c_2Q(D)y_2 + \dots + c_nQ(D)y_n$$

เมื่อ $c_1, c_2, \dots, c_n$ เป็นค่าคงตัว

บทนิยาม 1.1.3

ให้ $Q_1(D)$ และ $Q_2(D)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n

การบวกของ $Q_1(D)$ และ $Q_2(D)$

กำหนดโดย $(Q_1(D) + Q_2(D))y = Q_1(D)y + Q_2(D)y$ ทุกฟังก์ชัน y ของ x ใดๆ

การคูณ $Q_1(D)$ ด้วยค่าคงตัว c

กำหนดโดย $(cQ_1(D))y = c(Q_1(D)y)$ ทุกฟังก์ชัน y ของ x ใดๆ

การคูณของ $Q_1(D)$ และ $Q_2(D)$

กำหนดโดย $(Q_1(D)Q_2(D))y = Q_1(D)(Q_2(D)y)$ ทุกฟังก์ชัน y ของ x ใดๆ

ตัวอย่างเช่น

$$Q_1(D) = D^2,\ Q_2(D) = D,\ y = x^2$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(Q_1(D) + Q_2(D))y &= (D^2 + D)(x^2)\\ &= D^2x^2 + Dx^2 = 2 + 2x\\ (5Q_1(D))y &= 5(Q_1(D)y)\\ &= 5(D^2x^2) = 10\\ (Q_1(D)Q_2(D))y &= Q_1(D)(Q_2(D)y)\\ &= D^2(Dx^2) = D^2(2x) = 0\end{aligned}$$

บทนิยาม 1.1.4

ให้ p(x) เป็นพหุนามในพจน์ของ x ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และ Q(D) เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ใดๆ ให้นิยามการคูณของ p(x) กับ Q(D) ดังนี้

$$(p(x)Q(D))y = p(x)(Q(D)y)$$

ตัวอย่างเช่น

$$Q(D) = D^2 + D \text{ และ } p(x) = x^2 - 1 \text{ จะได้}$$

$$(p(x)Q(D))y = ((x^2 - 1)(D^2 + D))y$$

$$= (x^2 - 1)((D^2 + D)y)$$

ทฤษฎีบท 1.1.2

ถ้าให้ $Q_1(D)$, $Q_2(D)$ และ $Q_3(D)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n จะได้ว่า

1. $Q_1(D) + Q_2(D) = Q_2(D) + Q_1(D)$

   (กฎการสลับที่สำหรับการบวก)

2. $Q_1(D) + (Q_2(D) + Q_3(D) = (Q_1(D) + Q_2(D)) + Q_3(D)$

   (กฎการจัดกลุ่มสำหรับการบวก)

3. $Q_1(D)(Q_2(D)Q_3(D)) = (Q_1(D)Q_2(D))Q_3(D)$

   (กฎการจัดกลุ่มสำหรับการคูณ)

4. $Q_1(D)(Q_2(D) + Q_3(D)) = Q_1(D)Q_2(D) + Q_1(D)Q_3(D)$

   (กฎการกระจาย)

พิสูจน์ ให้ y เป็นฟังก์ชันของ x ใดๆ

1. $(Q_1(D) + Q_2(D))y = Q_1(D)y + Q_2(D)y$

$$= Q_2(D)y + Q_1(D)y$$

$$= (Q_2(D) + Q_1(D))y$$

ดังนั้น $Q_1(D) + Q_2(D) = Q_2(D) + Q_1(D)$

2. $(Q_1(D) + (Q_2(D) + Q_3(D)))y = Q_1(D)y + (Q_2(D) + Q_3(D))y$

$$= Q_1(D)y + Q_2(D)y + Q_3(D)y$$

$$= (Q_1(D)y + Q_2(D)y) + Q_3(D)y$$

$$
\begin{aligned}
& && = (Q_1(D) + Q_2(D))y + Q_3(D)y \\
& && = ((Q_1(D) + Q_2(D)) + Q_3(D))y \\
\text{ดังนั้น} \quad & Q_1(D) + (Q_2(D) + Q_3(D)) && = (Q_1(D) + Q_2(D)) + Q_3(D) \\
3.\ & (Q_1(D)(Q_2(D)Q_3(D)))y && = Q_1(D)(Q_2(D)Q_3(D))y \\
& && = Q_1(D)(Q_2(D)Q_3(D)y) \\
& && = (Q_1(D)Q_2(D))Q_3(D)y \\
& && = ((Q_1(D)Q_2(D))Q_3(D))y \\
\text{ดังนั้น} \quad & Q_1(D)(Q_2(D)Q_3(D)) && = (Q_1(D)Q_2(D))Q_3(D) \\
4.\ & (Q_1(D)(Q_2(D) + Q_3(D)))y && = Q_1(D)((Q_2(D) + Q_3(D))y) \\
& && = Q_1(D)(Q_2(D)y + Q_3(D)y) \\
& && = Q_1(D)(Q_2(D)y) + Q_1(D)(Q_3(D)y) \\
& && = (Q_1(D)Q_2(D))y + (Q_1(D)Q_3(D))y \\
& && = (Q_1(D)Q_2(D) + Q_1(D)Q_3(D))y \\
\text{ดังนั้น} \quad & Q_1(D)(Q_2(D) + Q_3(D)) && = Q_1(D)Q_2(D) + Q_1(D)Q_3(D)
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 1.1.3

ถ้า $Q_1(D)$ และ $Q_2(D)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวแล้ว

$$Q_1(D)Q_2(D) = Q_2(D)Q_1(D)$$

พิสูจน์

ให้ $\quad Q_1(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-1} D + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i}$

โดยที่ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัว และ $a_0 \neq 0$

$$Q_2(D) = b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + b_2 D^{m-2} + \ldots + b_{m-1} D + b_m = \sum_{j=0}^{m} b_j D^{m-j}$$

โดยที่ $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ เป็นค่าคงตัว

ให้ y เป็นฟังก์ชันของ x ใดๆ ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ $m + n$

เพราะว่าทุกค่าของ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $j = 0, 1, 2, \ldots, m$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left(a_i D^{n-i}\right)\left(b_j D^{m-j}\right)y &= a_i b_j\left(D^{n-i}\left(D^{m-j}\right)y\right) \\
&= a_i b_j\left(D^{m-j}\left(D^{n-i}\right)y\right) \\
&= a_i b_j\left(D^{(m+n)-(i+j)}\right)y
\end{aligned}$$

ดังนั้น $$\left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j D^{m-j}\right)\right)y = \left(\sum_{k=0}^{m+n} c_k D^{(m+n)-k}\right)y$$

โดยที่ $$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

และ $$c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$$

โดยที่ $$k = 0, 1, 2, \ldots, m + n$$

และ $$\left(\left(\sum_{j=0}^{m} b_j D^{m-j}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i}\right)\right)y = \left(\sum_{k=0}^{m+n} d_k D^{(m+n)-k}\right)y$$

โดยที่ $$d_0 = b_0 a_0$$

$$d_1 = b_0 a_1 + b_1 a_0$$

และ $$d_k = \sum_{l=0}^{k} b_l a_{k-l}$$

โดยที่ $$k = 0, 1, 2, \ldots, m + n$$

ดังนั้น $$c_k = d_k$$

ทุกค่าของ $k = 0, 1, 2, \ldots, m + n$

สรุปได้ว่า $$Q_1(D)Q_2(D) = Q_2(D)Q_1(D)$$

ตัวอย่างที่ 1.2 กำหนดให้ $Q_1(D) = D + 2$, $Q_2(D) = 3D - 1$ จงแสดงว่า

$$Q_1(D)Q_2(D) = Q_2(D)Q_1(D)$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
(Q_1(D)Q_2(D))y &= Q_1(D)(Q_2(D)y) \\
&= (D + 2)((3D - 1)y) \\
&= (D + 2)(3Dy - y) \\
&= 3D^2y - Dy + 6Dy - 2y \\
&= 3D^2y + 5Dy - 2y \\
&= (3D^2 + 5D - 2)y
\end{aligned}$$

ดังนั้น $Q_1(D)Q_2(D) = 3D^2 + 5D - 2$

$$\begin{aligned}
(Q_2(D)Q_1(D))y &= Q_2(D)(Q_1(D)y) \\
&= (3D - 1)((D + 2)y) \\
&= (3D - 1)(Dy + 2y) \\
&= 3D^2y + 6Dy - Dy - 2y \\
&= 3D^2y + 5Dy - 2y \\
&= (3D^2 + 5D - 2)y
\end{aligned}$$

ดังนั้น $Q_2(D)Q_1(D) = 3D^2 + 5D - 2$

นั่นคือ $Q_1(D)Q_2(D) = Q_2(D)Q_1(D)$

หมายเหตุ ถ้า $Q_1(D)$ และ $Q_2(D)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงตัวทั้งหมดแล้ว $Q_1(D)Q_2(D)$ และ $Q_2(D)Q_1(D)$ อาจจะไม่เท่ากัน ดังตัวอย่างที่ 1.3 ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้ $Q_1(D) = xD - 2$, $Q_2(D) = D + x$ และ $y = e^x$ จงหาค่าของ $Q_1(D)(Q_2(D)y)$ และ $Q_2(D)(Q_1(D)y)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
Q_1(D)(Q_2(D)y) &= (xD-2)((D+x)e^x) \\
&= (xD-2)(De^x + xe^x) \\
&= (xD-2)(e^x + xe^x) \\
&= (xD)(e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) \\
&= x(De^x + D(xe^x)) - 2e^x - 2xe^x \\
&= x(e^x + xe^x + e^x) - 2e^x - 2xe^x \\
&= x(2e^x + xe^x) - 2e^x - 2xe^x \\
&= 2xe^x + x^2e^x - 2e^x - 2xe^x \\
&= x^2e^x - 2e^x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_2(D)(Q_1(D)y) &= (D+x)((xD-2)e^x) \\
&= (D+x)(xDe^x - 2e^x) \\
&= (D+x)(xe^x - 2e^x) \\
&= D(xe^x - 2e^x) + x(xe^x - 2e^x) \\
&= (Dxe^x - 2D(e^x)) + x^2e^x - 2xe^x \\
&= (xe^x + e^x - 2e^x) + x^2e^x - 2xe^x \\
&= (xe^x - e^x) + x^2e^x - 2xe^x \\
&= x^2e^x - xe^x - e^x
\end{aligned}
$$

จากตัวอย่างที่ 1.3 เห็นได้ว่า $Q_1(D)(Q_2(D)y) \neq Q_2(D)(Q_1(D)y)$

ดังนั้น $Q_1(D)Q_2(D) \neq Q_2(D)Q_1(D)$

บทนิยาม 1.1.5

ให้ $Q_1(D)$ และ $Q_2(D)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n

$Q_1(D) = Q_2(D)$ ก็ต่อเมื่อ $Q_1(D)y = Q_2(D)y$ สำหรับฟังก์ชัน y ของ x ใดๆ ที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ n

ตัวอย่างเช่น

$$Q_1(D) = (D + 1)(D + 2)$$

และ $$Q_2(D) = (D^2 + 3D + 2)$$

$$Q_1(D)y = ((D + 1)(D + 2))y$$

สำหรับฟังก์ชัน y ของ x ใดๆ

$$\begin{aligned} &= (D + 1)((D + 2)y) \\ &= (D + 1)(Dy + 2y) \\ &= D^2y + D(2y) + Dy + 2y \\ &= D^2y + 3Dy + 2y \\ &= (D^2 + 3D + 2)y \\ &= Q_2(D)y \end{aligned}$$

ดังนั้น $$Q_1(D) = Q_2(D)$$

นั่นคือ $$(D + 1)(D + 2) = D^2 + 3D + 2$$

หมายเหตุ ถ้า $Q_1(D)$ และ $Q_2(D)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวทั้งหมด สมบัติทางพีชคณิตของการบวกและการคูณมีสมบัติเช่นเดียวกับนิพจน์ทางพีชคณิตของรูปพหุนาม ดังนั้น จึงสามารถใช้สมบัติของการบวกและการคูณทางพีชคณิตของพหุนามกับตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ได้ เช่น การแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาผลคูณของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

ก. $(D - 3)(D + 5)$

ข. $(D + 4)(D + 2)^2$

วิธีทำ

ก. $$\begin{aligned}(D - 3)(D + 5) &= D(D + 5) - 3(D + 5)\\ &= D^2 + 5D - 3D - 15\\ &= D^2 + 2D - 15\end{aligned}$$

ข. $$\begin{aligned}(D + 4)(D + 2)^2 &= (D + 4)(D^2 + 4D + 4)\\ &= (D)(D^2 + 4D + 4) + 4(D^2 + 4D + 4)\\ &= D^3 + 4D^2 + 4D + 4D^2 + 16D + 16\\ &= D^3 + 8D^2 + 20D + 16\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.5 จงแยกตัวประกอบของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

ก. $D^2 - D - 12$

ข. $2D^2 + 3D - 2$

ค. $D^3 - D^2 + D - 1$

ง. $D^3 - 4D^2 - 3D + 18$

วิธีทำ

ก. $D^2 - D - 12 = (D - 4)(D + 3)$

ข. $2D^2 + 3D - 2 = (2D - 1)(D + 2)$

ค. $D^3 - D^2 + D - 1 = (D - 1)(D^2 + 1)$

ง. $D^3 - 4D^2 - 3D + 18 = (D + 2)(D - 3)^2$

หมายเหตุ

1. จากข้อ ค. การแยกตัวประกอบของ $D^3 - D^2 + D - 1$ ดำเนินการโดยใช้วิธีการจัดกลุ่มได้ดังนี้

$$\begin{aligned} D^3 - D^2 + D - 1 &= (D^3 - D^2) + (D - 1) \\ &= D^2(D - 1) + (D - 1) \\ &= (D - 1)(D^2 + 1) \end{aligned}$$

2. จากข้อ ง. การแยกตัวประกอบของ $D^3 - 4D^2 - 3D + 18$ ไม่สามารถใช้วิธีการจัดกลุ่มเพื่อแยกตัวประกอบเหมือนกับที่ดำเนินการในข้อ ค. จึงใช้วิธีการหารได้ดังนี้

ให้ $$Q(D) = D^3 - 4D^2 - 3D + 18$$

พิจารณาตัวประกอบของ 18 ได้เป็น $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18$ จากตัวประกอบดังกล่าว พบว่า

$$\begin{aligned} Q(3) &= (3)^3 - 4(3)^2 - 3(3) + 18 \\ &= 27 - 36 - 9 + 18 = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น ได้ว่า $(D - 3)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $Q(D)$ ซึ่ง $(D - 3)$ หาร $Q(D)$ ลงตัว และหาตัวประกอบที่เหลือโดยการนำ $(D - 3)$ ไปหาร $D^3 - 4D^2 - 3D + 18$ โดยการหารยาวหรือการหารสังเคราะห์ตามลำดับได้ดังนี้

การหารยาวดำเนินการได้ดังนี้

$$\begin{array}{l} D - 3)D^3 - 4D^2 - 3D + 18(D^2 - D - 6 \\ \qquad\quad \underline{D^3 - 3D^2} \\ \qquad\qquad -D^2 - 3D + 18 \\ \qquad\qquad \underline{-D^2 + 3D} \\ \qquad\qquad\qquad -6D + 18 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{\underline{-6D + 18}} \end{array}$$

จะได้ $D^3 - 4D^2 - 3D + 18 = (D - 3)(D^2 - D - 6)$

$$= (D - 3)(D - 3)(D + 2)$$

$$= (D - 3)^2(D + 2)$$

หรือการหารสังเคราะห์ดำเนินการได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & 3 & -3 & -18 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array} \; +$$

จะได้ $D^3 - 4D^2 - 3D + 18 = (D - 3)(D^2 - D - 6)$

$$= (D - 3)(D - 3)(D + 2)$$

$$= (D - 3)^2(D + 2)$$

ดังนั้น $D^3 - 4D^2 - 3D + 18 = (D + 2)(D - 3)^2$

แบบฝึกหัด 1.1

1. จากข้อ 1.1 – 1.5 จงหาตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (Q(D)) ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\frac{dy}{dx} - 5y = 0$

1.2 $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = \sin x$

1.3 $x^2y'' - xy' + y = x^2$

1.4 $y''' + 2y'' - 4y' + y = 1 + x + e^x$

1.5 $x^2\frac{d^4y}{dx^4} + \left(1 - x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

2. จากข้อ 2.1–2.5 จงหาผลคูณของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $(4D + 1)(D - 2)$

2.2 $(D + 2)(D^2 - 2D + 5)$

2.3 $(D - 2)(D + 1)^2$

2.4 $(D + x)(D - x)$

2.5 $(xD + 2)(xD - 1)$

3. จากข้อ 3.1–3.5 จงหาค่าของผลการดำเนินการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

3.1 $(D^2 + 4D - 1)\sin x$

3.2 $(D^2 - x^2)e^x$

3.3 $(D^2 + 4D - 5)e^{-5x}$

3.4 $(D + x)(D - x)e^x$

3.5 $(D + 1)^2 (D + 2)(x^2e^{-x})$

4. จากข้อ 4.1 – 4.5 จงแยกตัวประกอบของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

4.1 $2D^2 + 3D - 2$

4.2 $D^4 - 4D^2$

4.3 $D^3 - 2D^2 - 5D + 6$

4.4 $D^4 + D^3 - 2D^2 + 4D - 24$

4.5 $2D^4 + 11D^3 + 18D^2 + 4D - 8$

1.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ (Homogeneous Linear Differential Equation)

บทนิยาม 1.2.1

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับn $Q(D)y = f(x)$ เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์อันดับ n ถ้า $f(x) = 0$ จะได้ $Q(D)y = 0$

ตัวอย่างเช่น

$$(D^2 + 3D + 2)y = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์อันดับ 2

$$(D^2 + xD + x)y = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์อันดับ 2

$$(D^3 + 4D^2 - 4D + 5)y = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์อันดับ 3

จากตัวอย่างข้างต้น โดยทั่วไปจะพบว่า $y(x) = 0$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ $Q(D)y = 0$ เสมอ ดังนั้น สิ่งที่สนใจศึกษาต่อไปคือ การหาผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์ของสมการ $Q(D)y = 0$ และผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = f(x)$ เมื่อ $f(x) \neq 0$ จากตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์ จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อาจมีได้หลายอย่างแตกต่างกัน เช่น $(D - 1)y = 0$ มีได้หลายผลเฉลย เช่น

ผลเฉลย $y = e^x$

$$(D - 1)e^x = D(e^x) - 1(e^x) = e^x - e^x = 0$$

ผลเฉลย $y = 3e^x$

$$(D - 1)(3e^x) = D(3e^x) - 1(3e^x) = 3e^x - 3e^x = 0$$

ผลเฉลย $y = -4e^x$

$$(D-1)(-4e^x) = D(-4e^x) - 1(-4e^x) = -4e^x + 4e^x = 0$$

จะเห็นได้ว่า $y = e^x$, $y = 3e^x$, $y = -4e^x$ ต่างเป็นผลเฉลยของสมการ $(D-1)y = 0$

$(D^2+4)y = 0$ มีได้หลายผลเฉลย เช่น

ผลเฉลย $y = \sin 2x$

$$(D^2+4)\sin 2x = D^2(\sin 2x) + 4(\sin 2x) = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$$

ผลเฉลย $y = \cos 2x$

$$(D^2+4)\cos 2x = D^2(\cos 2x) + 4(\cos 2x) = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0$$

ผลเฉลย $y = 4\sin 2x - 3\cos 2x$

$$\begin{aligned}(D^2+4)(4\sin 2x - 3\cos 2x) &= (D^2+4)(4\sin 2x) - (D^2+4)(3\cos 2x)\\ &= 4(D^2+4)(\sin 2x) - 3(D^2+4)(\cos 2x)\\ &= 4(0) - 3(0) = 0\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า $y = \sin 2x$, $y = \cos 2x$, $y = 4\sin 2x - 3\cos 2x$ ต่างเป็นผลเฉลยของสมการ $(D^2+4)y = 0$

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นได้ว่า $Q(D)y = 0$ อาจมีผลเฉลยได้หลายผลเฉลย และถ้า $y = f_1(x)$ เป็นผลเฉลยของ $Q(D)y = 0$ แล้ว $y = kf_1(x)$ เป็นผลเฉลยของ $Q(D)y = 0$ ด้วย นอกจากนั้น ถ้า $y = f_1(x)$ และ $y = f_2(x)$ เป็นผลเฉลยของ $Q(D)y = 0$ แล้ว $y = f_1(x) + f_2(x)$ เป็นผลเฉลยของ $Q(D)y = 0$ ด้วย สิ่งที่ศึกษาต่อไปคือ ลักษณะของฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยของ $Q(D)y = 0$

บทนิยาม 1.2.2

ให้ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนเซต I การรวมเชิงเส้น (Linear Combination) ของ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ หมายถึง $c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n$ เมื่อ $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวที่นิยามบนเซต I โดยที่

$$(c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n)x = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x) \text{ ทุกค่า } x \text{ ใน } I$$

ตัวอย่างเช่น

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = x^2$$

จะเห็นว่า $f(x) = 5x + 7x^2 = 5f_1(x) + 7f_2(x)$

ดังนั้น f เป็นการรวมเชิงเส้นของ f_1, f_2

$$f_1(x) = e^x$$

$$f_2(x) = e^{2x}$$

$$f_3(x) = e^{4x}$$

จะเห็นว่า $f(x) = 3e^x - 5e^{2x} + 2e^{4x}$

$$= 3f_1(x) - 5f_2(x) + 2f_3(x)$$

ดังนั้น f เป็นการรวมเชิงเส้นของ f_1, f_2, f_3

พหุนาม $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, ..., $f_n(x) = x^n$ นั่นคือ

พหุนาม $f(x) = a_nf_n(x) + a_{n-1}f_{n-1}(x) + \ldots + a_1f_1(x) + a_0f_0(x)$

บทนิยาม 1.2.3

ให้ $\{f_1, f_2, f_3, \ldots f_n\}$ เป็นเซตของฟังก์ชันที่นิยามบนเซต I เรากล่าวว่า $\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น (Linearly Dependent Set) บนเซต I ก็ต่อเมื่อมี c_1, c_2, c_3, ..., c_n เป็นค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันที่ทำให้ $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x) = 0$ ทุกค่า x ใน I

ในกรณีที่ $\{f_1, f_2, f_3, \ldots f_n\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น เรากล่าวว่า $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่างเช่น

ก. $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = 3x^2 + 4x$

จะเห็นว่า

$$-4f_1(x) - 3f_2(x) + f_3(x) = -4x - 3x^2 + 3x^2 + 4x = 0 \text{ ทุกจำนวนจริง } x$$

ดังนั้น f_1, f_2 และ f_3 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ข. $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = e^{2x},\ f_3(x) = 4e^x - 5e^{2x}$

จะเห็นว่า

$$-4f_1(x) + 5f_2(x) + f_3(x) = -4e^x + 5e^{2x} + 4e^x - 5e^{2x} = 0 \text{ ทุกจำนวนจริง } x$$

ดังนั้น f_1, f_2 และ f_3 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ค. $f_1(x) = \sin 2x,\ f_2(x) = \cos 2x,\ f_3(x) = 3\sin 2x - 5\cos 2x$

จะเห็นว่า

$$3f_1(x) - 5f_2(x) - f_3(x) = 3\sin 2x - 5\cos 2x - 3\sin 2x + 5\cos 2x = 0 \text{ ทุกจำนวนจริง } x$$

ดังนั้น f_1, f_2 และ f_3 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 1.2.1

$\{f_1, f_2, f_3, \ldots f_n\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นบนเซต I ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชันอย่างน้อยหนึ่งตัวเป็นการรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันที่เหลือ

พิสูจน์

สมมติให้ $\{f_1, f_2, f_3, \ldots f_n\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นบนเซต ดังนั้น มี $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ที่ทำให้

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x) = 0 \text{ ทุกค่า } x \text{ ใน I}$$

เลือก c_i ที่เป็นค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์จาก $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ จะได้

$$f_i(x) = -\frac{c_1}{c_i} f_1(x) - \frac{c_2}{c_i} f_2(x) - \ldots \frac{c_{i-1}}{c_i} -f_{i-1}(x) - \frac{c_{i+1}}{c_i} f_{i+1}(x) - \ldots - \frac{c_n}{c_i} f_n(x)$$

ดังนั้น f_i เป็นการรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันที่เหลือ

สมมติมี f_i เป็นการรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันที่เหลือ ดังนั้น จึงมีค่าคงตัว

$c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n$ ที่ทำให้

$$f_i(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_{i-1} f_{i-1}(x) + c_{i+1} f_{i+1}(x) + \ldots + c_n f_n(x)$$

ทุกค่า x ใน I

ดังนั้น $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_{i-1} f_{i-1}(x) - f_i(x) + c_{i+1} f_{i+1}(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ f_i คือ -1 สรุป $\{f_1, f_2, f_3, \ldots f_n\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นบนเซต

ตัวอย่างเช่น

$$f_1(x) = 1$$

$$f_2(x) = 2x - 3$$

$$f_3(x) = x^2$$

$$f_4(x) = 4x^2 + 3x + 4$$

จะเห็นว่า

$$f_4(x) = \frac{17}{2} f_1(x) + \frac{3}{2} f_2(x) + 4\ f_3(x)$$

ทุกจำนวนจริง x ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{17}{2} f_1(x) + \frac{3}{2} f_2((x) + 4f_3(x) &= \frac{17}{2}(1) + \frac{3}{2}(2x - 3) + 4(x^2) \\
&= \frac{17}{2} + 3x - \frac{9}{2} + 4x^2 \\
&= 4x^2 + 3x + 4 \\
&= f_4(x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

บทนิยาม 1.2.4

ให้ $\{f_1, f_2, f_3, ...f_n\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น (Linearly Independent Set) บนเซต I ถ้า $\{f_1, f_2, f_3, ...f_n\}$ ไม่เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นบนเซต I

ดังนั้น จากคำจำกัดความของ $\{f_1, f_2, f_3, ...f_n\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นบนเซต จะได้ว่า $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นบนเซต I ก็ต่อเมื่อ

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + ... + c_nf_n(x) = 0$$

ทุกค่า x ใน I แล้ว $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดให้ $f_1(x) = 2x^2 + 1$, $f_2(x) = 1 - 3x^2$ ทุกค่า $x \in R$

จงพิจารณาว่า f_1, f_2 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ

ให้ c_1, c_2 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = 0$ ทุกค่า $x \in R$

ดังนั้น $c_1(2x^2 + 1) + c_2(1 - 3x^2) = 0$

$$2c_1x^2 + c_1 + c_2 - 3c_2x^2 = 0$$

$$(2c_1 - 3c_2)x^2 + (c_1 + c_2) = 0 \qquad (1)$$

จากสมการที่ (1) เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$2c_1 - 3c_2 = 0 \qquad (2)$$

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad (3)$$

จากสมการที่ (3) จะได้

$$c_2 = -c_1$$

แทน $c_2 = -c_1$ ในสมการที่ (2) จะได้

$$5c_1 = 0$$

นั่นคือ $c_1 = 0$ และจะได้ $c_2 = 0$

สรุป f_1, f_2 เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซตของจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนดให้ $f_1(x) = 2x + 3$, $f_2(x) = 4x - 5$, $f_3(x) = x + 8$ ทุกค่า $x \in R$ จงพิจารณาว่า f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ

ให้ c_1, c_2, c_3 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) = 0$ ทุกค่า $x \in R$

ดังนั้น
$$c_1(2x+3)+c_2(4x-5)+c_3(x+8) = 0$$
$$2c_1x + 3c_1 + 4c_2x - 5c_2 + c_3x + 8c_3 = 0$$
$$(2c_1 + 4c_2 + c_3)x + (3c_1 - 5c_2 + 8c_3) = 0 \quad (1)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$2c_1 + 4c_2 + c_3 = 0 \quad (2)$$
$$3c_1 - 5c_2 + 8c_3 = 0 \quad (3)$$

แก้สมการจะได้ผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์คือ $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{13}{37}$ และ $c_3 = -\frac{22}{37}$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}(1)f_1(x) + \left(-\frac{13}{37}\right)f_2(x) + \left(-\frac{22}{37}\right)f_3(x) &= (1)(2x+3) + \left(-\frac{13}{37}\right)(4x-5) + \left(-\frac{22}{37}\right)(x+8) \\ &= 2x + 3 - \frac{52}{37}x + \frac{65}{37} - \frac{22}{37}x - \frac{176}{37} \\ &= \frac{22}{37}x + \frac{176}{37} - \frac{22}{37}x - \frac{176}{37} \\ &= 0 \text{ ทุกค่า } x \in R\end{aligned}$$

ดังนั้น f_1, f_2, f_3 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

หมายเหตุ

1. ในการพิจารณาค่า c_1, c_2, c_3 จากสมการที่ (1) เนื่องจากสมการที่ (1) ต้องเป็นจริงทุกค่า $x \in R$ ดังนั้น การแทนค่า x บางค่าที่เหมาะสม ก็จะสามารถช่วยในการหาค่า c_1, c_2 และ c_3 ได้ เช่น

แทนค่า $x = 0$ ในสมการที่ (1) จะได้

$$3c_1 - 5c_2 + 8c_3 = 0$$

แทนค่า $x = 1$ ในสมการที่ (1)จะได้

$$5c_1 - c_2 + 9c_3 = 0$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์ของระบบสมการเหมือนกันคือ $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{13}{37}$ และ $c_3 = -\frac{22}{37}$

2. ค่า c_1, c_2และ c_3 ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันที่ทำให้ $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) = 0$ มีได้หลายค่า เช่น $c_1 = -37$, $c_2 = 13$ และ $c_3 = 22$

ตัวอย่างที่ 1.8 กำหนดให้ $f_1(x) = x + e^x$, $f_2(x) = 1 - x + 4e^x$, $f_3(x) = 1 + 3x - 2e^x$ ทุกค่า $x \in R$ จงพิจารณาว่า f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ

ให้ c_1, c_2, c_3 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) = 0$ ทุกค่า $x \in R$

ดังนั้น $$c_1(x + e^x) + c_2(1 - x + 4e^x) + c_3(1 + 3x - 2e^x) = 0$$

$$c_1x + c_1e^x + c_2 - c_2x + 4c_2e^x + c_3 + 3c_3x - 2c_3e^x = 0$$

$$(c_2 + c_3) + (c_1 - c_2 + 3c_3)x + (c_1 + 4c_2 - 2c_3)e^x = 0 \qquad (1)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$c_2 + c_3 = 0 \qquad (2)$$

$$c_1 - c_2 + 3c_3 = 0 \qquad (3)$$

$$c_1 + 4c_2 - 2c_3 = 0 \qquad (4)$$

จากระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร 3 สมการ พิจารณาในรูปสมการ $AX = 0$

ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว ระบบสมการ $AX = 0$ จะมีผลเฉลยที่เป็นศูนย์เพียงอย่างเดียวเท่านั้น

ดังนั้น จะได้รูปสมการ $AX = 0$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

และจะได้ว่า

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}\right) = 10 \neq 0$$

ดังนั้น

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{0}{10} = 0$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $c_2 = c_3 = 0$ นั่นคือ $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

ดังนั้น f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้น

หมายเหตุ ในการพิจารณาว่าฟังก์ชันเป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่นั้น ขึ้นอยู่กับโดเมนของฟังก์ชันด้วย

ตัวอย่างเช่น

พิจารณา $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |x|$ เมื่อ $x \in [0, \infty)$

เนื่องจากโดเมนในการพิจารณาของ f_1 และ f_2 คือ $x \in [0, \infty)$ จะได้ $|x| = x$

ดังนั้น $$(1)\,f_1(x) + (-1)f_2(x) = (1)(x) + (-1)|x|$$

$$= x - x = 0 \text{ ทุกค่า } x \in [0, \infty)$$

นั่นคือ f_1 และ f_2 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต $[0, \infty)$

พิจารณา $f_1(x) = x,\ f_2(x) = |x|$ เมื่อ $x \in (-\infty, \infty)$

สมมติมี c_1 และ c_2 ที่ทำให้ $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = c_1(x) + c_2|x| = 0$ ทุกค่า $x \in (-\infty, \infty)$

แทนค่า $x = 1$ จะได้

$$c_1 + c_2 = 0 \tag{1}$$

แทนค่า $x = -1$ จะได้

$$c_1 - c_2 = 0 \tag{2}$$

แก้สมการที่ (1) และ (2) ได้

$$c_1 = c_2 = 0$$

นั่นคือ f_1 และ f_2 เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่างที่ 1.9 กำหนดให้ $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = e^{2x},\ f_3(x) = e^{3x}$ เมื่อ $x \in (-\infty, \infty)$ จงพิจารณาว่า f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ

ให้ c_1, c_2, c_3 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) = 0$ ทุกค่า $x \in (-\infty, \infty)$

ดังนั้น
$$c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} = 0 \tag{1}$$

แทนค่า $x = 0$ ได้

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0 \tag{2}$$

จากสมการที่ (1) หาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้

$$c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 3c_3e^{3x} = 0 \tag{3}$$

แทนค่า $x = 0$ ได้

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \tag{4}$$

จากสมการที่ (3) หาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้

$$c_1e^x + 4c_2e^{2x} + 9c_3e^{3x} = 0 \qquad (5)$$

แทนค่า $x = 0$ ได้

$$c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 0 \qquad (6)$$

จากระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร 3 สมการ จากสมการที่ (2), (4) และ (6) พิจารณาในรูปสมการ $AX = 0$

ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว ระบบสมการ $AX = 0$ จะมีผลเฉลยที่เป็นศูนย์เพียงอย่างเดียวเท่านั้น ดังนั้น จะได้รูปสมการ $AX = 0$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

และจะได้ว่า

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\right) = 2 \neq 0$$

ดังนั้น

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{0}{2} = 0$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $c_2 = c_3 = 0$ นั่นคือ $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

ดังนั้น f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต $(-\infty, \infty)$

จากตัวอย่างที่กล่าวมา จะเห็นได้ว่าแนวทางการพิจารณาว่า $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่นั้น ต้องใช้การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ต่อไปนี้จะหาแนวทางการพิจารณาว่า $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่ โดยใช้รอนสเกียน (Wronskian)

บทนิยาม 1.2.5

ให้ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ถึงอันดับ $n-1$ บนเซต I ค่ากำหนดดังนี้

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_n''(x) \\ & \ldots & \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

เรียกว่า รอนสเกียนของ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ ณ จุด x

ใช้สัญลักษณ์ $W(x : f_1, f_2, f_3, \ldots f_n)$ หรือ $W(x)$

ตัวอย่างเช่น

$$f_1(x) = 1 + 2x,\ f_2(x) = 3 + 4x,\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\begin{aligned} W(x : f_1, f_2) &= \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1(x) & f_2(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+2x & 3+4x \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (1 + 2x)(4) - (3 + 4x)(2) \\ &= 4 + 8x - 6 - 8x \\ &= -2 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.10 จงหารอนสเกียนของ f_1, f_2, f_3, เมื่อ $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1 + x$, $f_3(x) = e^x$ เมื่อ $x \in (-\infty, \infty)$

วิธีทำ

$$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x^2 & 1+x & e^x \\ 2x & 1 & e^x \\ 2 & 0 & e^x \end{vmatrix}$$

$$= x^2(e^x - 0) - (1 + x)(2xe^x - 2e^x) + e^x(0 - 2)$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2x^2 e^x + 2xe^x - 2e^x$$

$$= -x^2e^x$$

ตัวอย่างที่ 1.11 จงหารอนสเกียนของ $f_1(x) = 2x + 7$, $f_2(x) = -4x + 5$, $f_3(x) = -6x + 3$ เมื่อ $x \in (-\infty, \infty)$

วิธีทำ

$$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2x+7 & -4x+5 & -6x+3 \\ 2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2x + 7)(0) - (-4x + 5)(0) + (-6x + 3)(0)$$

$$= 0$$

การตรวจสอบว่า $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่ โดยการใช้รอนสเกียน จะใช้ผลของทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2.2

ให้ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ $n-1$ บนเซต I ถ้า $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต I แล้ว $W(x : f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n) = 0$ ทุกค่า x ใน I

พิสูจน์

เนื่องจาก $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต I ดังนั้น มี $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ที่ทำให้

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x) = 0 \text{ ทุกค่า } x \text{ ใน } I$$

และเนื่องจาก $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ $n-1$ ดังนั้น จะได้ระบบสมการ n สมการ n ตัวแปร ดังนี้

$$\begin{aligned}
c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots. + c_nf_n(x) &= 0 \\
c_1f'_1(x) + c_2f'_2(x) + \ldots + c_nf'_n(x) &= 0 \\
c_1f''_1(x) + c_2f''_2(x) + \ldots + c_nf''_n(x) &= 0 \\
&\ldots \\
c_1f_1^{(n-1)}(x) + c_2f_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_nf_n^{(n-1)}(x) &= 0
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ เป็นผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันของระบบสมการ ดังนั้น

$$\begin{vmatrix}
f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\
f'_1(x) & f'_2(x) & \ldots & f'_n(x) \\
f''_1(x) & f''_2(x) & \ldots & f''_n(x) \\
 & & \ldots & \\
f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & \ldots & f_n^{n-1}(x)
\end{vmatrix} = 0 \text{ ทุกค่า } x \text{ ใน } I$$

ดังนั้น $W(x : f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n) = 0$ ทุกค่า x ใน I

จากสิ่งที่ต้องการคือ ฟังก์ชัน $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต I จะใช้ข้อความที่สมมูลกับทฤษฎีบท 1.2.2 ในการพิจารณาดังนี้

ถ้า $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต I แล้ว $W(x : f_1, f_2, f_3, ..., f_n) = 0$ ทุกค่า x ใน I จะได้ข้อความที่สมมูลคือ

ถ้ามี x บางตัวใน I ที่ทำให้ $W(x : f_1, f_2, f_3, ..., f_n) \neq 0$ แล้ว $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต I

ตัวอย่างที่ 1.12 กำหนดให้ $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos 2x$ ทุกค่า $x \in R$ จงพิจารณาว่า f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ

$$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^x & \sin x & \cos 2x \\ e^x & \cos x & -2\sin 2x \\ e^x & -\sin x & -4\cos 2x \end{vmatrix} \qquad (1)$$

เลือกแทนค่า x = 0 ในสมการที่ (1) จะได้

$$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} e^0 & \sin 0 & \cos 2(0) \\ e^0 & \cos 0 & -2\sin 2(0) \\ e^0 & -\sin 0 & -4\cos 2(0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-4 - 0) - 0(-4 - 0) + 1(0 - 1)$$

$$= -5 \neq 0$$

ดังนั้น f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซตของจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 1.13 กำหนดให้ $f_1(x) = x^2 + x + 1$, $f_2(x) = 5x^2 + 4x$, $f_3(x) = -x^2 - 2x + 3$ ทุกค่า $x \in R$ จงพิจารณาว่า f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ

$$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x^2+x+1 & 5x^2+4x & -x^2-2x+3 \\ 2x+1 & 10x+4 & -2x-2 \\ 2 & 10 & -2 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

เลือกแทนค่า $x = 0$ ในสมการที่ (1) จะได้

$$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 0^2+0+1 & 5(0)^2+4(0) & -0^2-2(0)+3 \\ 2(0)+1 & 10(0)+4 & -2(0)-2 \\ 2 & 10 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 10 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-8 + 20) - 0(-2 + 4) + 3(10 - 8)$$

$$= 12 - 0 + 6 = 18 \neq 0$$

ดังนั้น f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซตของจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 1.14 กำหนดให้ $f_1(x) = x^2 + x + 1$, $f_2(x) = x^2 + x + 2$, $f_3(x) = x^2 + x + 3$ ทุกค่า $x \in R$ จงพิจารณาว่า f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ

$$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x^2+x+1 & x^2+x+2 & x^2+x+3 \\ 2x+1 & 2x+1 & 2x+1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (x^2 + x + 1)[(4x + 2) - (4x + 2)] - (x^2 + x + 2)[(4x + 2) - (4x + 2)] + (x^2 + x + 3)[(4x + 2) - (4x + 2)]$$

$$= (x^2 + x + 1)(0) - (x^2 + x + 2)(0) + (x^2 + x + 3)(0)$$

$$= 0$$

ดังนั้น f_1, f_2, f_3 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซตของจำนวนจริง

การมีผลเฉลยและการมีผลเฉลยเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 1.2.3

ให้ $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนเซต I ของจำนวนจริง และ $a_0(x) \neq 0$ สำหรับทุกค่า x ใน I x_0 เป็นสมาชิกตัวหนึ่งใน I $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ เป็นค่าคงตัวจำนวนจริงไม่เจาะจง จะได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n

$$(a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)D + a_n(x))y = f(x)$$

จะมีผลเฉลย $y = y(x)$ ที่นิยามบนเซต I เพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y''(x_0) = y_2$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

ตัวอย่างที่ 1.15 จงแสดงว่า $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $(D^2 - 3D + 2)y = 0$ และหาผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 4$

วิธีทำ

กำหนดให้ $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยแสดงโดยวิธีแทนค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned}(D^2 - 3D + 2)y &= (D^2 - 3D + 2)(c_1e^x + c_2e^{2x})\\ &= D^2(c_1e^x + c_2e^{2x}) - 3D(c_1e^x + c_2e^{2x}) + 2(c_1e^x + c_2e^{2x})\\ &= D(c_1e^x + 2c_2e^{2x}) - 3(c_1e^x + 2c_2e^{2x}) + 2(c_1e^x + c_2e^{2x})\\ &= (c_1e^x + 4c_2e^{2x}) - (3c_1e^x + 6c_2e^{2x}) + (2c_1e^x + 2c_2e^{2x})\\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $(D^2 - 3D + 2)y = 0$

จาก $$y = c_1e^x + c_2e^{2x} \qquad (1)$$

กำหนดให้ $y(0) = 1$ แทนในสมการที่ (1) จะได้

$$c_1e^0 + c_2e^0 = 1$$

นั่นคือ $$c_1 + c_2 = 1 \qquad (2)$$

จากสมการที่ (1) จะได้

$$y' = c_1e^x + 2c_2e^{2x} \qquad (3)$$

กำหนดให้ $y'(0) = 4$ แทนในสมการที่ (3) จะได้

$$c_1e^0 + 2c_2e^0 = 4$$

นั่นคือ $$c_1 + 2c_2 = 4 \qquad (4)$$

นำสมการที่ (4) – (2) จะได้

$$c_2 = 3$$

แทนค่า $c_2 = 3$ ในสมการที่ (2) จะได้

$$c_1 + 3 = 1$$

นั่นคือ $$c_1 = -2$$

ดังนั้น ผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขคือ

$$y = -2e^{x} + 3e^{2x}$$

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 1.2.3 $y = -2e^{x} + 3e^{2x}$ เป็นผลเฉลยเดียวเท่านั้นที่

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0$$

เมื่อ $y'(0) = 1$ และ $y'(0) = 4$

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n, Q(D)y = 0 จากผลของทฤษฎีบท 1.2.3 จะได้ว่า

ต้องมีผลเฉลย $u_1(x)$ ที่ทำให้

$$u_1(x_0) = 1$$

$$u_1'(x_0) = u_1''(x_0) = \dots = u_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

ต้องมีผลเฉลย $u_2(x)$ ที่ทำให้

$$u_2(x_0) = 0,\ u_2'(x_0) = 1,\ u_2''(x_0) = \dots = u_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$

สำหรับ $r = 3, 4, \dots, n$

ต้องมีผลเฉลย $u_r(x)$ ที่ทำให้

$$u_r(x_0) = u_r'(x_0) = u_r''(x_0) = \dots = u_r^{(r-2)}(x_0) = 0$$

$$u_r^{(r-1)}(x_0) = 1$$

$$u_r^{(r)}(x_0) = u_r^{(r+1)}(x_0) = \dots = u_r^{(n-1)}(x_0) = 0$$

ผลเฉลย $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ มีผลทำให้

$$W(x_0 : u_1, u_2, ..., u_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \neq 0$$

ดังนั้น $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้น

สรุปได้ว่า สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n, $Q(D)y = 0$ ต้องมีเซตมูลฐานของผลเฉลยเสมอ

บทนิยาม 1.2.6

เซตมูลฐานของผลเฉลย (Fundamental Set of Solution) ของสมการ $Q(D)y = 0$ หมายถึง เซตของผลเฉลย $u_1, u_2, ..., u_n$ ที่เป็นอิสระเชิงเส้น และเป็นผลเฉลยของ $Q(D)\ y = 0$

ตัวอย่างเช่น

สมการ $(D^2 + 1)y = 0$

เลือกให้ $u_1(x) = \sin x$ และ $u_2(x) = \cos x$ จะได้

$$(D^2 + 1)(\sin x) = D^2(\sin x) + \sin x$$
$$= -\sin x + \sin x = 0$$
$$(D^2 + 1)(\cos x) = D^2(\cos x) + \cos x$$
$$= -\cos x + \cos x = 0$$

นั่นคือ $\{\sin x, \cos x\}$ เป็นเซตมูลฐานของผลเฉลย

เลือกให้ $u_1(x) = 4 \sin x$ และ $u_2(x) = -3 \cos x$ จะได้

$$(D^2 + 1)(4 \sin x) = D^2(4\sin x) + 4 \sin x$$
$$= -4 \sin x + 4 \sin x = 0$$
$$(D^2 + 1)(-3 \cos x) = D^2(-3 \cos x) - 3 \cos x$$
$$= 3 \cos x - 3 \cos x = 0$$

นั่นคือ $\{4 \sin x, -3 \cos x\}$ เป็นเซตมูลฐานของผลเฉลย

เลือกให้ $u_1(x) = \sin x + \cos x$ และ $u_2(x) = \sin x - \cos x$ จะได้ $\{\sin x + \cos x, \sin x - \cos x\}$ เป็นเซตมูลฐานของผลเฉลย โดยที่

$$(D^2 + 1)(\sin x + \cos x) = D^2(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)$$

$$= -\sin x - \cos x + \sin x + \cos x = 0$$

$$(D^2 + 1)(\sin x - \cos x) = D^2(\sin x - \cos x) + (\sin x - \cos x)$$

$$= (-\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x) = 0$$

นั่นคือ $\{\sin x + \cos x, \sin x - \cos x\}$ เป็นเซตมูลฐานของผลเฉลย

จากตัวอย่างดังกล่าว จะเห็นได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ $Q(D)y = 0$ มีเซตมูลฐานของผลเฉลยได้หลายเซต

บทแทรก 1.2.1

ถ้า $F(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = 0$

เมื่อ $Q(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$

โดยที่ $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ มีความต่อเนื่องบนเซต I, x_0 เป็นสมาชิกของ I และ $F(x)$ สอดคล้องเงื่อนไข $F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \ldots = F^{(n-1)}(x_0) = 0$ แล้ว $F(x) = 0$ ทุกค่า x ใน I

พิสูจน์

เนื่องจาก $F(x) = 0$ ทุกค่า x ใน I เป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = 0$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข $F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \ldots = F^{(n-1)}(x_0) = 0$

โดยทฤษฎี เราสรุปได้ว่า $F(x) = 0$ ทุกค่า x ใน I เป็นผลเฉลยเดียวเท่านั้นของสมการ $Q(D)y = 0$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \ldots = F^{(n-1)}(x_0) = 0$

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงแสดงว่า e^{3x} และ e^{4x} เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' - 7y' + 12y = 0$

2. จงแสดงว่า e^x, xe^x และ $x^2 e^x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

3. จงแสดงว่า $\cos x$ และ $\sin x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' + y = 0$

4. กำหนดให้ $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{4x}$ จงหาค่าของ

ก. $(4f_1 + 5f_2)(x)$

ข. $(-3f_1 + f_2)(x)$

5. กำหนดให้ $f_1(x) = 4$, $f_2(x) = x^3 + 2$, $f_3(x) = x^4 + 3$

จงหารอนสเกียน $W(x : f_1, f_2, f_3)$

6. กำหนดให้ $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = 3x + 4$, $f_3(x) = -5x^2 + 2$

จงหารอนสเกียน $W(x : f_1, f_2, f_3)$

7. กำหนดให้ $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^x + 4$, $f_3(x) = -4e^x + 3$

จงหารอนสเกียน $W(x : f_1, f_2, f_3)$

8. กำหนดให้ $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin 2x$, $f_3(x) = \sin 3x$ เมื่อ $x \in (-\infty, \infty)$

จงพิจารณาว่า f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

9. กำหนดให้ $f_1(x) = e^x \sin x$, $f_2(x) = e^x \cos x$

เมื่อ $x \in (-\infty, \infty)$ จงพิจารณาว่า f_1, f_2 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

10. จงแสดงว่า $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-8x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $(D^2 + 11D + 24)y = 0$ และ จงหาผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 4$

1.3 ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์

กำหนดให้ $Q(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n เมื่อ $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ที่นิยามบนเซต I เมื่อ $Q(D)y = f(x)$ ถ้า $f(x) = 0$ เรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์อันดับ n

ถ้า $f(x) \neq 0$ เรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับ n

ทฤษฎีบท 1.3.1

ให้ $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนเซต I ถ้าแต่ละฟังก์ชัน $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ เป็นผลเฉลยของ $Q(D)y = 0$ บนเซต I แล้วการรวมเชิงเส้นของ $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ บนเซต I เป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = 0$ ด้วย

พิสูจน์

ให้ $c_1, c_2, \dots, c_n$ เป็นค่าคงตัว เนื่องจาก $u_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ เป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = 0$ จะได้

$Q(D)u_i(x) = 0$

ทุก $I = 1, 2, \dots, n$ เพราะว่า $Q(D)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น ดังนั้น

$Q(D)(c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \dots + c_nu_n(x)) = c_1Q(D)u_1(x) + c_2Q(D)u_2(x) + \dots + c_nQ(D)u_n(x) = 0$

สรุปได้ว่า $c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \dots + c_nu_n(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = 0$

ทฤษฎีบท 1.3.2

ให้ $u_1, u_2, \dots, u_n$ เป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = 0$ บนเซต I จะได้ว่า

$u_1, u_2, \dots, u_n$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต I ก็ต่อเมื่อ $W(x : u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$ ทุกค่า x ใน I

พิสูจน์

จากทฤษฎีที่กล่าวว่า ถ้า u_1, u_2, ..., u_n ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต I แล้ว $W(x : u_1, u_2, ..., u_n) = 0$ ทุกค่า x ใน I

สมมติว่า มี x_0 ใน I ที่ทำให้ $W(x : u_1, u_2, ..., un) = 0$ ดังนั้น จะได้ระบบสมการ n สมการ n ตัวแปร w_1, w_2, ..., w_n ต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
w_1u_1(x_0) + w_2u_2(x_0) + ... + w_nu_n(x_0) &= 0 \\
w_1u_1'(x_0) + w_2u_2'(x_0) + ... + w_nu_n'(x_0) &= 0 \\
w_1u''_1(x_0) + w_2u''_2(x_0) + ... + w_nu''_n(x_0) &= 0 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
w_1u_1^{(n-1)}(x_0) + w_2u_2^{(n-1)}(x_0) + ... + w_nu_n^{(n-1)}(x_0) &= 0
\end{aligned}
$$

ต้องมีผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ให้ c_1, c_2, ..., c_n เป็นผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันของ w_1, w_2, ..., w_n ตามลำดับ และ $v(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + ... + c_nu_n(x) = 0$ ทุกค่า x ใน I โดยทฤษฎีบท 1.3.1 v(x) เป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)\, y = 0$ จากระบบสมการได้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$
\begin{aligned}
v(x_0) &= 0 \\
v'(x_0) &= 0 \\
v''(x_0) &= 0 \\
&\vdots \\
v^{(n-1)}(x_0) &= 0
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก v(x) เป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = 0$ และ $v(x_0) = v'(x_0) = ... = v^{(n-1)}(x_0) = 0$ โดยบทแทรก 1.2.1 $v(x) = 0$ ทุกค่า x ใน I ดังนั้น $c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + ... + c_nu_n(x) = 0$ ทุกค่า x ใน I เพราะว่า c_1, c_2, ..., c_n ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ดังนั้น u_1, u_2, ..., u_n ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต I นั่นคือ

ถ้ามี x_0 ใน I ที่ทำให้ $W(x_0 : u_1, u_2, ..., u_n) = 0$ แล้ว u_1, u_2, ..., u_n ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต I หรือข้อความที่สมมูลกันกับข้อความนี้คือ ถ้า u_1, u_2, ..., u_n เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต I แล้ว $W(x : u_1, u_2, ..., u_n) \neq 0$ ทุกค่า x ใน I

สรุปได้ว่า $u_1, u_2, ..., u_n$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต I ก็ต่อเมื่อ $W(x : u_1, u_2, ..., u_n) = 0$ ทุกค่า x ใน I

ทฤษฎีบท 1.3.3

ให้ $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต I ของสมการ $Q(D)y = 0$ เมื่อ $Q(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + ... + a^{n-1}(x)D + a_n(x)$ โดย $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนเซต I จะได้ว่า ผลเฉลยของ $Q(D)y = 0$ ต้องเป็นการรวมเชิงเส้นของ $u_1, u_2, ..., u_n$ บนเซต I

พิสูจน์

ให้ $y = v(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = 0$ และ x_0 เป็นสมาชิกของ I

เนื่องจาก $u_1, u_2, ..., u_n$ เป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้น $W(x_0 : u_1, u_2, ..., u_n) \neq 0$ ผลที่ตามมาจะได้ระบบสมการ n สมการ n ตัวแปร $k_1, k_2, ..., k_n$ ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
k_1u_1(x_0) + k_2u_2(x_0) + ... + k_nu_n(x_0) &= v(x) \\
k_1u_1'(x_0) + k_2u_2'(x_0) + ... + k_nu_n'(x_0)) &= v'(x) \\
k_1u_1''(x_0) + k_2u_2''(x_0) + ... + k_nu_n''(x_0) &= v''(x) \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\
k_1u_1^{(n-1)}(x_0) + k_2u_2^{(n-1)}(x_0) + ... + k_nu_n^{(n-1)}(x_0) &= v^{(n-1)}(x)
\end{aligned}$$

สามารถหาผลเฉลยได้เพียงผลเฉลยเดียว และผลเฉลยนั้นต้องไม่เป็นศูนย์ ให้ $k_1 = c_1$, $k_2 = c_2, ..., k_n = c_n$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ ดังนั้น $c_1, c_2, ..., c_n$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ

$$\begin{aligned}
c_1u_1(x_0) + k_2u_2(x_0) + ... + k_nu_n(x_0) &= v(x_0) \\
c_1u_1'(x_0) + c_2u_2'(x_0) + ... + c_nu_n'(x_0) &= v'(x_0) \\
c_1u_1''(x_0) + c_2u_2''(x_0) + ... + c_nu_n''(x_0) &= v''(x_0) \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\
c_1u_1^{(n-1)}(x_0) + c_2u_2^{(n-1)}(x_0) + ... + c_nu_n^{(n-1)}(x_0) &= v^{(n-1)}(x_0)
\end{aligned}$$

เพราะว่า $y = w(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + ... + c_nu_n(x)$ ทุกค่า x ใน I เป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = 0$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$w(x_0) = v(x_0),\ w'(x_0) = v'(x_0),\ w''(x_0) = v''(x_0),\ ...,\ w^{(n-1)}(x_0) = v^{(n-1)}(x_0)$$

ดังนั้น v(x) และ w(x) ต่างเป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = 0$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น $w(x_0) = v(x_0)$, $w'(x_0) = v'(x_0)$, $w''(x_0) = v''(x_0)$, ..., $w^{(n-1)}(x_0) = v^{(n-1)}(x_0)$ สรุปโดยทฤษฎีบท 1.2.3 $v(x) = w(x)$ ทุกค่า x ใน I นั่นคือ v(x) เป็นการรวมเชิงเส้นของ $u_1, u_2, ..., u_n$ บนเซต I

บทนิยาม 1.3.1

สมการ $Q(D)y = 0$ เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์สัมพัทธ์อันดับ n (Related Homogeneous Linear Differential Equation of Order n) หรือสมการลดรูป (Reduced Equation) ของสมการ $Q(D)y = f(x)$

ตัวอย่างเช่น

สมการ $(D^2 + 5D + 6)y = x^2 + 2x$

มีสมการ $(D^2 + 5D + 6)y = 0$ เป็นสมการลดรูป

สมการ $y'' - 3y' - 10y = \sin x$

มีสมการ $y'' - 3y' - 10y = 0$ เป็นสมการลดรูป

สมการ $(D^2 - 2D + 1)y = 3 + e^{2x}$

มีสมการ $(D^2 - 2D + 1)y = 0$ เป็นสมการลดรูป

ทฤษฎีบท 1.3.4

ถ้า $y = u(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับ n หรือ $Q(D)y = f(x)$ โดยที่ $f(x) \neq 0$ บนเซต I และ $y = v(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์อันดับ n หรือ $Q(D)y = 0$ บนเซต I แล้วผลเฉลยทั่วไปของสมการ $Q(D)y = f(x)$ คือ $y = u(x) + v(x)$

พิสูจน์

เนื่องจากบนเซต I

$$Q(D)(u(x) + v(x)) = Q(D)u(x) + Q(D)v(x) = 0 + f(x)$$

ดังนั้น $y = u(x) + v(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = f(x)$ บนเซต I

ให้ $y = w(x)$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $Q(D)y = f(x)$

เนื่องจาก $Q(D)(w(x) - v(x)) = Q(D)w(x) - Q(D)v(x) = f(x) - f(x) = 0$

ดังนั้น $y = w(x) - v(x)$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $Q(D)y = 0$

เนื่องจาก $y = u(x)$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $Q(D)y = 0$ ดังนั้น $w(x) - v(x) = u(x)$

นั่นคือ $w(x) = u(x) + v(x)$

สรุปผลเฉลยทั่วไปของ $Q(D)y = f(x)$ คือ $y = u(x) + v(x)$

บทนิยาม 1.3.2

ผลเฉลยทั่วไปของสมการลดรูป $Q(D)y = 0$ เรียกว่า ผลเฉลยเติมเต็ม (Complementary Solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับ n $Q(D)y = f(x)$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย y_c และผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับ n $Q(D)y = f(x)$ เรียกว่า ผลเฉลยเฉพาะ (Particular Solution) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย y_p

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับ n $Q(D)y = f(x)$ คือ

$$y = y_c + y_p$$

ตัวอย่างเช่น

สมการ $(D^2 - 4D + 3)y = e^{5x}$

มีผลเฉลยเติมเต็มคือ $y_c = c_1e^x + c_2e^{3x}$

เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว

และผลเฉลยเฉพาะคือ $$y_p = \frac{1}{8}e^{5x}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $$y = c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{1}{8}e^{5x}$$

หมายเหตุ

$$y = c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{1}{8}e^{5x}$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปแสดงโดยวิธีแทนค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
(D^2-4D+3)y &= (D^2-4D+3)\left(c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{1}{8}e^{5x}\right) \\
&= D^2\left(c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{1}{8}e^{5x}\right) - 4D\left(c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{1}{8}e^{5x}\right) \\
&\quad + 3\left(c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{1}{8}e^{5x}\right) \\
&= \left(c_1e^x + 9c_2e^{3x} + \frac{25}{8}e^{5x}\right) - 4\left(c_1e^x + 3c_2e^{3x} + \frac{5}{8}e^{5x}\right) \\
&\quad + 3\left(c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{1}{8}e^{5x}\right) \\
&= c_1e^x + 9c_2e^{3x} + \frac{25}{8}e^{5x} - 4c_1e^x - 12c_2e^{3x} - \frac{20}{8}e^{5x} + 3c_1e^x \\
&\quad + 3c_2e^{3x} + \frac{3}{8}e^{5x} \\
&= e^{5x}
\end{aligned}$$

สมการ $y'' - 2y' + y = e^x$

มีผลเฉลยเติมเต็มคือ

$$y_c = c_1e^x + c_2xe^x$$

เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว

และผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1 e^x + c_2 xe^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$$

สมการ $(D^2 + 1)y = 4e^{-x}$

มีผลเฉลยเติมเต็มคือ

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว

และผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_p = 2e^{-x}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2e^{-x}$$

ทฤษฎีบท 1.3.5

ถ้า $u_i(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับ n หรือ $Q(D)y = f_i(x)$, $I = 1, 2, ..., n$ บนเซต I แล้ว $y = k_1u_1(x) + k_2u_2(x) + ... + k_nu_n(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับ n $Q(D)y = k_1f_1(x) + k_2f_2(x) + ... + k_nf_n(x)$ บนเซต I ทุกค่าคงตัว $k_1, k_2, ..., k_n$

พิสูจน์

ให้ $k_1, k_2, ..., k_n$ เป็นค่าคงตัว

x เป็นสมาชิกของ I

เนื่องจาก $Q(D)u_i(x) = f_i(x)$, $I = 1, 2, ..., n$ ดังนั้น จะได้

$$\begin{aligned}
&Q(D)(k_1u_1(x) + k_2u_2(x) + ... + k_nu_n(x)) \\
&\qquad = k_1Q(D)u_1(x) + k_2Q(D)u_2(x) + ... + k_n\,Q(D)u_n(x) \\
&\qquad = k_1f_1(x) + k_2f_2(x) + ... + k_nf_n(x)
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$y = k_1u_1(x) + k_2u_2(x) + \dots + k_nu_n(x)$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับ n $Q(D)y = k_1f_1(x) + k_2f_2(x) + \dots + k_nf_n(x)$ บนเซต I

ตัวอย่างเช่น

ก. การหาผลเฉลยเฉพาะรายของสมการ $(D^2 + 4)y = 5e^x - 4x^2$ อาจทำได้ดังนี้

เนื่องจากผลเฉลยเฉพาะรายของ $(D^2 + 4)y = e^x$ คือ

$$y_p = \frac{1}{5}e^{5x}$$

และผลเฉลยเฉพาะรายของ $(D^2 + 4)y = x^2$ คือ

$$y_p = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะรายของ $(D^2 + 4)y = 5e^x - 4x^2$ คือ

$$y_p = 5\left(\frac{1}{5}e^x\right) - 4\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\right)$$

$$= e^x - x^2 + \frac{1}{2}$$

ข. สมการ $(D^2 + 1)y = 8 + e^{2x} + x^2$

$$Q(D) = D^2 + 1$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$Q(D)y = 8 + e^{2x} + x^2$$

มีผลเฉลยเติมเต็มคือ

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว

ผลเฉลยเฉพาะของสมการคือ $Q(D)y = 8$ คือ

$$y_p = 8$$

ผลเฉลยเฉพาะของสมการคือ $Q(D)y = e^{2x}$ คือ

$$y_p = \frac{1}{5}e^{2x}$$

ผลเฉลยเฉพาะของสมการคือ $Q(D)y = x^2$ คือ

$$y_p = x^2 - 2$$

จะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $Q(D)y = 8 + e^{2x} + x^2$ ดังนี้

$$y_p = 8 + \frac{1}{5}e^{2x} + (x^2 - 2)$$

$$= 6 + \frac{1}{5}e^{2x} + x^2$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 6 + \frac{1}{5}e^{2x} + x^2$$

แบบฝึกหัด 1.3

1. กำหนดให้ $y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = e^{-x}$, $y_3(x) = e^{2x}$ จงแสดงว่า y_1, y_2, y_3 เป็นผลเฉลยของสมการ $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$ และจงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

2. กำหนดให้ $y_1(x) = e^{x}$, $y_2(x) = e^{-x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' - y = 0$ จงหาผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $y(0) = 1$ และ $y'(0) = -2$

3. กำหนดให้ $y_1(x) = \sin 2x$, $y_2(x) = \cos 2x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $(D^2 + 4)y = 0$ จงหาผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $y(0) = 1$ และ $y'(0) = -2$

4. กำหนดให้ $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$, $y_3(x) = x^2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $(D^3 - 6D^2 + 12D - 8)\, y = 0$ จงหาผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ และ $y''(0) = 1$

5. กำหนดให้ $y_1(x) = e^{2x} \cos 3x$, $y_2(x) = e^{2x} \sin 3x$ จงแสดงว่า y_1, y_2 เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' - 4y' + 13y = 0$ และจงหาผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $y(0) = -1$ และ $y'(0) = 2$

6. จงแสดงว่า $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^{x}$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^2 + 1)y = 2e^{x}$

7. จงแสดงว่า $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + 2x + 3$ เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นค่าคงตัว เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = -12x + 4$

จงใช้เงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้ หาผลเฉลยทั่วไปของสมการในข้อ 8 – 10

กำหนดให้ $y_1(x) = \frac{1}{6}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$y'' - 5y' + 6y = 1$

$y_2(x) = \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$y'' - 5y' + 6y = x$

$y_3(x) = \frac{1}{2}e^x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$y'' - 5y' + 6 = e^x$

$y_4(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$y'' - 5y' + 6y = 0$

8. $y'' - 5y' + 6y = e^x + x + 1$

9. $y'' - 5y' + 6y = -5e^x + 4x + 2$

10. $2y'' - 10y' + 12y = -3e^x + x$

2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

บทนิยาม 2.1.1

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวเขียนในรูปของ $Q(D)y = 0$ เมื่อ

$$Q(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \dots + a_{n-1}D + a_n$$

เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n โดยที่ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นค่าคงตัว และ $a_0 \neq 0$

การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

บทนิยาม 2.1.2

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$Q(D)y = 0$$

เมื่อ $Q(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + ... + a_{n-1}D + a_n$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n โดยที่ $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นค่าคงตัว และ $a_0 \neq 0$ และพหุนามในพจน์ของ r ระดับขั้น n

$$Q(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + ... + a_{n-1}r + a_n$$

เรียกว่า พหุนามช่วย (Auxiliary Polynomial) และเรียกสมการ $Q(r) = 0$ ว่าสมการช่วย (Auxiliary Equation) ของสมการ $Q(D)y = 0$

ความสัมพันธ์ระหว่าง Q(D) กับ Q(r) คือ ถ้า Q(r) แยกตัวประกอบได้เป็น

$$Q(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2)...(r - r_n)$$

แล้วเราจะได้ว่า

$$Q(D) = a_0(D - r_1)(D - r_2)...(D - r_n)$$

นอกจากนี้ สมการช่วย $Q(r) = 0$ จะสามารถเขียนได้ในรูป

$$a_0(r - r_1)(r - r_2)...(r - r_n) = 0$$

ตัวอย่างที่ 2.1 จงหาพหุนามช่วย และสมการช่วยของสมการ $(D^2 + D - 6)y = 0$

วิธีทำ

สมการ $(D^2 + D - 6)y = 0$

มีพหุนามช่วยเป็น

$$Q(r) = r^2 + r - 6$$

สามารถแยกตัวประกอบของ

$$r^2 + r - 6 = (r + 3)(r - 2)$$

และเขียนได้ในรูปสมการช่วยที่แยกตัวประกอบได้เป็น

$$(r + 3)(r - 2) = 0$$

ตัวอย่างที่ 2.2 จงหาพหุนามช่วย และสมการช่วยของสมการ $(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)y = 0$

วิธีทำ

สมการ $(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)y = 0$

มีพหุนามช่วยเป็น

$$Q(r) = r^3 + 2r^2 - 5r - 6$$

สามารถแยกตัวประกอบของ $r^3 + 2r^2 - 5r - 6$ ได้ดังนี้

พิจารณาตัวประกอบของ -6 ได้เป็น $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ จากตัวประกอบดังกล่าวพบว่า

$$Q(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = 0$$

ดังนั้น กล่าวได้ว่า $(r + 1)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $Q(r)$ ซึ่ง $(r + 1)$ หาร $Q(r)$ ลงตัว สามารถหาตัวประกอบที่เหลือโดยการนำ $(r + 1)$ไปหาร $r^3 + 2r^2 - 5r - 6$ โดยการหารยาวหรือการหารสังเคราะห์ตามลำดับได้ดังนี้

การหารยาวได้ดังนี้

$$\begin{array}{l} r + 1)r^3 + 2r^2 - 5r - 6(r^2 + r - 6 \\ \quad\underline{r^3 + r^2} \\ \qquad r^2 - 5r - 6 \\ \qquad \underline{r^2 + r} \\ \qquad\quad -6r - 6 \\ \qquad\quad \underline{\underline{-6r - 6}} \end{array}$$

จะได้
$$\begin{aligned} r^3 + 2r^2 - 5r - 6 &= (r + 1)(r^2 + r - 6) \\ &= (r + 1)(r + 3)(r - 2) \end{aligned}$$

หรือการหารสังเคราะห์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \quad +$$

จะได้ $\qquad r^3 + 2r^2 - 5r - 6 = (r + 1)(r^2 + r - 6)$

$$= (r + 1)(r + 3)(r - 2)$$

ดังนั้น $\qquad Q(r) = (r + 1)(r + 3)(r - 2)$

เขียนได้ในรูปสมการช่วยที่แยกตัวประกอบได้เป็น

$$(r + 1)(r + 3)(r - 2) = 0$$

แดเนียล แบร์นูลลี (Daniel Bernoulli) และออยเลอร์ (Euler) นักคณิตศาสตร์ เป็นผู้เริ่มต้นหาผลเฉลยออกมาเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคือ $y = e^{rx}$ โดย r เป็นค่าคงตัว

จาก $\quad Q(D)y = 0$

$$\begin{aligned} Q(D)e^{rx} &= (a_0D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)e^{rx} \\ &= a_0D^n e^{rx} + a_1D^{n-1} e^{rx} + a_2 D^{n-2} e^{rx} + \ldots + a^{n-1} De^{rx} + a_n e^{rx} \\ &= a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + a_2 r^{n-2} e^{rx} + \ldots + a_{n-1} re^{rx} + a_n e^{rx} \\ &= (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n)e^{rx} \\ &= Q(r)\, e^x \end{aligned}$$

นั่นคือ $Q(r)\, e^{rx} = 0$

เนื่องจาก $e^{rx} \neq 0$ ดังนั้น $Q(r) = 0$ และในทางกลับกัน ถ้า $Q(r) = 0$ จะได้

$$Q(D)e^{rx} = Q(r)e^{rx} = 0$$

ดังนั้น $y = e^{rx}$ จึงเป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = 0$

และสรุปได้ว่า $y = e^{rx}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = 0$ ก็ต่อเมื่อ $Q(r) = 0$ ซึ่งเรียกสมการ $Q(r) = 0$ นี้ว่า สมการช่วยของสมการ $Q(D)y = 0$ ดังนั้น การหาผลเฉลยพิจารณาจากรากของการแก้สมการช่วย $Q(r) = 0$ ซึ่งจะได้รากทั้งหมด n ค่า โดยสมมติให้รากของสมการได้เป็น $r = r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ และเนื่องจากรากของสมการช่วย $Q(r) = 0$ ซึ่งเป็นพหุนามระดับขั้น n นั้น ลักษณะของรากสมการที่ได้อาจเป็นดังนี้

กรณีที่ 1 สมการช่วยมีรากเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทุกตัว

กรณีที่ 2 สมการช่วยมีรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกันบางค่า

กรณีที่ 3 สมการช่วยมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันทุกตัว

กรณีที่ 4 สมการช่วยมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ซ้ำกันบางค่า

ตัวอย่างที่ 2.3 จงหารากของสมการช่วยของสมการ $y'' + y' - 12y = 0$

วิธีทำ

สมการ $y'' + y' - 12y = 0$

หรือสมการ $(D^2 + D - 12)y = 0$

มีสมการช่วยเป็น

$$r^2 + r - 12 = 0$$

$$(r + 4)(r - 3) = 0$$

$$r = -4, 3$$

ดังนั้น รากสมการช่วย $Q(r) = 0$ เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทุกตัวคือ $r = -4, 3$

ตัวอย่างที่ 2.4 จงหารากของสมการช่วยของสมการ $6y'' + y' - 2y = 0$

วิธีทำ

สมการ $6y'' + y' - 2y = 0$

หรือสมการ $(6D^2 + D - 2)y = 0$

มีสมการช่วยเป็น

$$6r^2 + r - 2 = 0$$

$$(3r + 2)(2r - 1) = 0$$

$$r = -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$$

ดังนั้น รากสมการช่วย $Q(r) = 0$ เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทุกตัวคือ $r = -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 2.5 จงหารากของสมการช่วยของสมการ $(D^3 - 4D^2 - 3D + 18)y = 0$

วิธีทำ

สมการ $(D^3 - 4D^2 - 3D + 18)y = 0$

มีสมการช่วยเป็น

$$r^3 - 4r^2 - 3r + 18 = 0$$

พิจารณาการหารสังเคราะห์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{c|rrrr} 3 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & 3 & -3 & -18 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array} \quad +$$

จะได้

$$r^3 - 4r^2 - 3r + 18 = (r - 3)(r^2 - r - 6)$$

$$= (r - 3)(r - 3)(r + 2)$$

$$(r - 3)(r - 3)(r + 2) = 0$$

$$r = 3, 3, -2$$

ดังนั้น รากสมการช่วย $Q(r) = 0$ เป็นจำนวนจริงคือ $r = 3, -2$ และที่ซ้ำกันคือ $r = 3$ มี 2 จำนวน

ตัวอย่างที่ 2.6 จงหารากของสมการช่วยของสมการ $(D^3 + 6D^2 + 12D + 8)y = 0$

วิธีทำ

สมการ $(D^3 + 6D^2 + 12D + 8)y = 0$

มีสมการช่วยเป็น

$$r^3 + 6r^2 + 12r + 8 = 0$$

พิจารณาการหารสังเคราะห์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 6 & 12 & 8 \\ & & -2 & -8 & -8 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array} \quad +$$

จะได้

$$\begin{aligned} r^3 + 6r^2 + 12r + 8 &= (r + 2)(r^2 + 4r + 4) \\ &= (r + 2)(r + 2)(r + 2) \\ &= (r + 2)^3 \\ (r + 2)^3 &= 0 \\ r &= -2, -2, -2 \end{aligned}$$

ดังนั้น รากสมการช่วย $Q(r) = 0$ เป็นจำนวนจริงคือ $r = -2$ และซ้ำกันคือ $r = -2$ มี 3 จำนวน

ตัวอย่างที่ 2.7 จงหารากของสมการช่วยของสมการ $(D^2 + 1)y = 0$

วิธีทำ

สมการ $(D^2 + 1)y = 0$

มีสมการช่วยเป็น

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r^2 - i^2 = 0 \qquad (i^2 = -1)$$

$$(r - i)(r + i) = 0$$

$$r = -i, i$$

ดังนั้น รากสมการช่วย Q(r) = 0 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันทุกตัว คือ r = –i, i

---

ตัวอย่างที่ 2.8 จงหารากของสมการช่วยของสมการ $(D^2 + D + 1)y = 0$

วิธีทำ

สมการ $(D^2 + D + 1)y = 0$

มีสมการช่วยเป็น

$$r^2 + r + 1 = 0$$

ใช้สูตร $ar^2 + br + c = 0$

จะได้

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} \quad \left(\sqrt{-3} = \sqrt{-3} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3}\,i\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

ดังนั้น รากสมการช่วย Q(r) = 0 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันทุกตัวคือ

$$r = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ตัวอย่างที่ 2.9 จงหารากของสมการช่วยของสมการ $(D^2 - 4D + 13)y = 0$

วิธีทำ

สมการ $(D^2 - 4D + 13)y = 0$

มีสมการช่วยเป็น

$$r^2 - 4r + 13 = 0$$

ใช้สูตร $ar^2 + br + c = 0$

จะได้

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 6i}{2} \quad \left(\sqrt{-36} = \sqrt{36} \times \sqrt{-1} = 6i\right)$$

$$= -2 \pm 3i$$

ดังนั้น รากสมการช่วย $Q(r) = 0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันทุกตัวคือ $r = 2 + 3i$, $2 - 3i$

ตัวอย่างที่ 2.10 จงหารากของสมการช่วยของสมการ $(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$

วิธีทำ

สมการ $(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$

มีสมการช่วยเป็น

$$\begin{aligned} r^4 + 2r^2 + 1 &= 0 \\ (r^2 + 1)^2 &= 0 \\ (r^2 - i^2)^2 &= 0 \qquad (i^2 = -1) \\ ((r - i)(r + i))^2 &= 0 \\ (r - i)^2(r + i)^2 &= 0 \\ r &= -i, -i, i, i \end{aligned}$$

ดังนั้น รากสมการช่วย $Q(r) = 0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนคือ $r = -i, i$ และที่ซ้ำกันคือ $r = -i, i$ ต่างซ้ำกัน 2 จำนวน

ตัวอย่างที่ 2.11 จงหารากของสมการช่วยของสมการ $(D^4 - 5D^2 + 12D + 28)y = 4$

วิธีทำ

สมการ $(D^4 - 5D^2 + 12D + 28)y = 0$

มีสมการช่วยเป็น

$$r^4 - 5r^2 + 12r + 28 = 0$$

พิจารณาการหารสังเคราะห์ของ $r^4 - 5r^2 + 12r + 28$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 0 & -5 & 12 & 28 \\ & & -2 & 4 & 2 & -28 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 14 & 0 \end{array} \quad +$$

จะได้ $r^4 - 5r^2 + 12r + 28 = (r + 2)(r^3 - 2r^2 - r + 14)$

พิจารณาการหารสังเคราะห์ของ $r^3 - 2r^2 - r + 14$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -1 & 14 \\ & & -2 & 8 & -14 \\ \hline & 1 & -4 & 7 & 0 \end{array} \quad +$$

จะได้ $$r^3 - 2r^2 - r + 14 = (r + 2)(r^2 - 4r + 7)$$

ดังนั้น $$\begin{aligned} r^4 - 5r^2 + 12r + 28 &= (r + 2)(r + 2)(r^2 - 4r + 7) \\ &= (r + 2)^2(r^2 - 4r + 7) \end{aligned}$$

จากสมการช่วย

$$r^4 - 5r^2 + 12r + 28 = 0$$

นั่นคือ $$(r + 2)^2(r^2 - 4r + 7) = 0$$

จะได้ $$(r + 2)^2 = 0$$

หรือ $$r^2 - 4r + 7 = 0$$

จาก $$\begin{aligned} (r + 2)^2 &= 0 \\ r &= -2, -2 \end{aligned}$$

จาก $$r^2 - 4r + 7 = 0$$

จากสูตร $$ar^2 + br + c = 0$$

จะได้ $$\begin{aligned} r &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ r &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}\,i}{2} \quad \left(\sqrt{-12} \;=\; \sqrt{12} \times \sqrt{-1} = 2\sqrt{3}\,i\right)$$

$$= \frac{4}{2} \pm \frac{2\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}\,i$$

ดังนั้น รากสมการช่วย $Q(r) = 0$ เป็นจำนวนจริงคือ $r = -2$ และซ้ำกันคือ $r = -2$ มี 2 จำนวน

และเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันคือ $r = 2 - \sqrt{3}\,i,\ 2 + \sqrt{3}\,i$

แบบฝึกหัด 2.1

จากข้อ 1 – 3 จงหาพหุนามช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(D^2 + 4D + 4)y = 0$

2. $y'' + 2y' + y = 0$

3. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$

จากข้อ 4 – 10 จงหารากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

4. $(D^2 - D + 6)y = 0$

5. $y'' + 3y' - 4y = 0$

6. $y''' - 11y'' + 31y' - 21y = 0$

7. $(D^2 + 6D + 13)y = 0$

8. $(D^3 - 2D^2 + 16D - 32)y = 0$

9. $(D^3 + 12D^2 + 48D + 64)y = 0$

10. $y''' - 4y'' + 9y' - 10y = 0$

2.2 กรณีที่ 1 สมการช่วยมีรากเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทุกตัว

ถ้ารากของสมการช่วย $Q(r) = 0$ เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทั้งหมด n ค่าคือ $r = r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ แล้วจะได้ว่า $y = e^{r_1x}, y = e^{r_2x}, y = e^{r_3x}, \ldots, y = e^{r_nx}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $Q(D)y = 0$ เพราะว่า $y = e^{r_1x}, y = e^{r_2x}, y = e^{r_3x}, \ldots, y = e^{r_nx}$ เป็นผลเฉลยอิสระเชิงเส้นต่อกัน ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $Q(D)y = 0$ คือ

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + c_3e^{r_3x} + \ldots + c_ne^{r_nx}$$

เมื่อ $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่างที่ 2.12 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^2 - D - 2)y = 0$

วิธีทำ

สมการช่วยคือ
$$\begin{aligned} r^2 - r - 2 &= 0 \\ (r + 1)(r - 2) &= 0 \\ r &= -1, 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น รากสมการช่วยเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทุกตัวคือ $r = -1, 2$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$$

ตัวอย่างที่ 2.13 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $3y''' + 5y'' - 2y' = 0$

วิธีทำ

$$(3D^3 + 5D^2 - 2D)y = 0$$

สมการช่วยคือ

$$\begin{aligned} 3r^3 + 5r^2 - 2r &= 0 \\ r(3r^2 + 5r - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$r(3r-1)(r+2) = 0$$
$$r = -2, 0, \frac{1}{3}$$

ดังนั้น รากสมการช่วยเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทุกตัวคือ $r = -2, 0, \frac{1}{3}$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1e^{0x} + c_2e^{-2x} + c_3\, e^{\frac{1}{3}x}$$
$$y = c_1 + c_2e^{-2x} + c_3e^{\frac{1}{3}x}$$

ตัวอย่างที่ 2.14 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - 5y = 0$

วิธีทำ

$$(D^2 - 5)y = 0$$

สมการช่วยคือ

$$r^2 - 5 = 0$$
$$\left(r+\sqrt{5}\right)\left(r-\sqrt{5}\right) = 0$$
$$r = -\sqrt{5}, \sqrt{5}$$

ดังนั้น รากสมการช่วยเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทุกตัวคือ $r = -\sqrt{5}, \sqrt{5}$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1e^{-\sqrt{5}x} + c_2e^{\sqrt{5}x}$$

ตัวอย่างที่ 2.15 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)y = 0$

วิธีทำ

สมการช่วยคือ

$$r^3 + 2r^2 - 5r - 6 = 0$$

พิจารณาการหารสังเคราะห์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 2 & -5 & -6 \\
 & & 2 & 8 & 6 \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & 0
\end{array} \; +$$

จะได้

$$r^3 + 2r^2 - 5r - 6 = (r-2)(r^2+4r+3)$$

$$= (r-2)(r+1)(r+3)$$

$$(r-2)(r+1)(r+3) = 0$$

$$r = -3, -1, 2$$

ดังนั้น รากสมการช่วยเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทุกตัวคือ $r = -3, -1, 2$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$

ตัวอย่างที่ 2.16 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$

วิธีทำ

สมการช่วยคือ

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

พิจารณาการหารสังเคราะห์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\
 & & 1 & -5 & 6 \\
\hline
 & 1 & -5 & 6 & 0
\end{array} \; +$$

จะได้

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r-1)(r^2-5r+6)$$

$$= (r-1)(r-2)(r-3)$$

$$(r-1)(r-2)(r-3) = 0$$

$$r = 1, 2, 3$$

ดังนั้น รากสมการช่วยเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทุกตัวคือ $r = 1, 2, 3$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

ตัวอย่างที่ 2.17 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$

วิธีทำ

$$(D^3 - 4D^2 + D + 6)y = 0$$

สมการช่วยคือ

$$r^3 - 4r^2 + r + 6 = 0$$

พิจารณาการหารสังเคราะห์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array} +$$

จะได้

$$\begin{aligned} r^3 - 4r^2 + r + 6 &= (r + 1)(r^2 - 5r + 6) \\ &= (r + 1)(r - 2)(r - 3) \\ (r + 1)(r - 2)(r - 3) &= 0 \\ r &= -1, 2, 3 \end{aligned}$$

ดังนั้นรากสมการช่วยเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทุกตัวคือ $r = -1, 2, 3$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

ตัวอย่างที่ 2.18 จงหาผลเฉลยเฉพาะรายของสมการ $y'' + 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

วิธีทำ

$$(D^2 + 3D - 4)y = 0$$

สมการช่วยคือ

$$r^2 + 3r - 4 = 0$$

$$(r + 4)(r - 1) = 0$$

$$r = -4, 1$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1e^{-4x} + c_2e^x$$

เพราะว่า $y(0) = 1$ ดังนั้น

$$1 = c_1e^{-4(0)} + c^2e^0$$

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad (1)$$

จาก $$y = c_1e^{-4x} + c_2e^x$$

ได้ $$y' = -4c_1e^{-4x} + c_2e^x$$

และ $$y'(0) = -1$$

ดังนั้น $$-1 = -4c_1e^{-4(0)} + c_2e^0$$

$$-4c_1 + c_2 = -1 \qquad (2)$$

แก้สมการที่ (1) และ (2) ได้ดังนี้

นำสมการที่ (1) – (2) จะได้

$$c_1 + c_2 - (-4c_1 + c_2) = 1 - (-1)$$

$$c_1 + c_2 + 4c_1 - c_2 = 2$$

$$5c_1 = 2$$

$$c_1 = \frac{2}{5}$$

สมการเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์เชิงวิศวกรรมศาสตร์ เป็นพื้นฐานที่สำคัญอย่างยิ่งสำหรับการศึกษาปัญหาต่างๆ ทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ หนังสือเล่มนี้จึงได้นำเสนอหลักการ ทฤษฎี แนวคิดต่างๆ และสรุปการนำไปใช้ อีกทั้งโจทย์ตัวอย่างได้แสดงวิธีทำอย่างละเอียดทุกขั้นตอน เพื่อช่วยให้มีความเข้าใจมากยิ่งขึ้น จึงเหมาะสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี และเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการเรียนสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาโท คณะวิศวกรรมศาสตร์ คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม สาขาวิศวกรรมโยธา สาขาวิศวกรรมเครื่องกล สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า สาขาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ สาขาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ สาขาวิศวกรรมอุตสาหการ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล มหาวิทยาลัยราชภัฏ สถาบันการอาชีวศึกษา และมหาวิทยาลัยอื่นๆ ทั้งของรัฐและเอกชนทั่วประเทศ ในสาขาที่เกี่ยวข้อง

ประกอบด้วยเนื้อหาต่างๆ ดังนี้

- สมการเชิงอนุพันธ์
- การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับต่างๆ
- ผลการแปลงลาปลาซและผลการแปลงผกผันลาปลาซ
- ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น
- การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น เกี่ยวกับวงจรไฟฟ้า การเคลื่อนที่เชิงกล และการแอ่นของคาน
- สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร
- ผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์
- สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเบื้องต้น

รศ. ดร. ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์

ประวัติการศึกษา

- ประกาศนียบัตรวิชาการศึกษา (ปกศ.) วิทยาลัยครูสงขลา
- การศึกษาบัณฑิต (กศ.บ. เกียรตินิยมอันดับหนึ่ง) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตสงขลา ปีการศึกษา 2521-2524
- ศึกษาศาสตรบัณฑิต (ศศ.บ.) มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช ปีการศึกษา 2531-2533
- ครุศาสตรมหาบัณฑิต (ค.ม.) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2529-2530
- ศึกษาศาสตรดุษฎีบัณฑิต (ศษ.ด.) มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ปีการศึกษา 2548-2552

ตำแหน่ง

- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ระดับ 6 ปีการศึกษา 2537
- รองศาสตราจารย์ ระดับ 7 ปีการศึกษา 2540
- รองศาสตราจารย์ ระดับ 8 ปีการศึกษา 2542
- รองศาสตราจารย์ ระดับ 9 ปีการศึกษา 2545

ผลงานเขียน

- ความน่าจะเป็นและสถิติประยุกต์ เล่ม 1
- ความน่าจะเป็นและสถิติประยุกต์ เล่ม 2
- อินทิกรัล
- สมการเชิงอนุพันธ์
- แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร
- แคลคูลัส 2 สำหรับวิศวกร
- แคลคูลัส 3 สำหรับวิศวกร
- สมการเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์เชิงวิศวกรรมศาสตร์

ISBN 978-616-08-4178-3
9 786160 841783
359 บาท

คู่มือเรียน - สอบ - อุดมศึกษา/
สมการอนุพันธ์

www.se-ed.com
sbc.fans