SKY SKYBOOK
ชื่อหนังสือ คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกร 1
บาร์โค้ด 9789743893803
ISBN 974-389-380-6

คณิตศาสตร์ สำหรับ วิศวกร 1

(Engineering Mathematics I)

- Complex Analysis
- Vector Analysis
- Laplace Transform
- Fourier Transform

สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี
ที่ศึกษาวิชาคณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า 1 และผู้ที่สนใจ

โดย.. สรายุธ ทองกอบเหมือน • นภัทร วัจนเทพินทร์

คณิตศาสตร์

สำหรับ

วิศวกร 1

..โดย..

สรายุธ ทองกอบเหมือน

นภัทร วัจนเทพินทร์

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

SKYBOOK COMPANY LIMITED

515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105

E-mail: skybook1992@hotmail.com

www.skybook.co.th

"คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกร 1"

พิมพ์ครั้งที่ 1 ตุลาคม 2546

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย
ห้ามคัดลอกถ่ายเอกสารหรือพิมพ์
หรือวิธีหนึ่งวิธีใดของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาต
จากบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

ราคา 150 บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ
สรายุช ทองกอบเหมือน
คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกร 1 -- กรุงเทพฯ : สกายบุ๊กส์, 2546.
284 หน้า
1. คณิตศาสตร์ --นภัทร วัจนเทพินทร์, ผู้แต่งร่วม I. ชื่อเรื่อง
510.2462
ISBN: 974-389-380-6
S7901-30-10-03

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
SKYBOOK COMPANY LIMITED
515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105
E-mail: skybook1992@hotmail.com
www.skybook.co.th

พิมพ์ที่ บริษัท สยามสปอร์ต ซินดิเคท จำกัด
459 ซอยพิบูลย์อุปถัมภ์ (ลาดพร้าว 48) แขวงสามเสนนอก เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310
โทรศัพท์ : 0-2694-3010

ตัวอย่าง

คำนำ

หนังสือ**คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกร 1** เล่มนี้ ผู้เรียบเรียงได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า 1 รหัส (0421- 0210) และ (1121- 0321) ในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต อุตสาหกรรมศาสตร์บัณฑิต และครุศาสตร์อุตสาหกรรมศาสตร์บัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล ในระดับปริญญาตรี และสถาบันที่เปิดสอนในระดับปริญญาตรี สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า และสาขาที่เกี่ยวข้อง หนังสือเล่มนี้จะกล่าวถึงทฤษฎี และการนำมาใช้งานของตัวแปรเชิงซ้อน ทฤษฎีและการนำมาใช้งานของการวิเคราะห์เวคเตอร์ ทฤษฎีอนุกรมยูเรียร์และการนำมาใช้ในการวิเคราะห์รูปคลื่นไฟฟ้า ทฤษฎีของลาปลาซทรานฟอร์ม และการนำมาใช้วิเคราะห์วงจรไฟฟ้า

ผู้เรียบเรียงได้เขียนด้วยภาษาที่อ่านและทำความเข้าใจง่าย และมีตัวอย่างที่สามารถศึกษาด้วยตนเองได้ง่าย จึงเหมาะสมกับผู้สนใจและผู้ที่จะศึกษาทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนดังหนังสือเล่มนี้

สุดท้ายนี้ผู้เรียบเรียงหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่อ่านและศึกษาทฤษฎีจากหนังสือเล่มนี้ และขอขอบพระคุณอาจารย์ที่ได้ให้ความรู้และคำปรึกษา ขอขอบคุณอาจารย์นภัทร วัจนเทพินทร์ ผู้เขียนร่วมที่ช่วยเรียบเรียงเนื้อหา และทีมงานสำนักพิมพ์สกายบุ๊กส์ ที่ได้ตรวจสอบต้นฉบับและดำเนินการจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้ให้มีคุณภาพ

อย่างไรก็ตาม อาจจะมีคำผิดและข้อผิดพลาดบางประการ ผู้เรียบเรียงขอน้อมรับ และได้โปรดแจ้งข้อผิดพลาดเพื่อแก้ไขแก่สำนักพิมพ์ด้วย จักเป็นพระคุณอย่างยิ่ง

ผู้เรียบเรียง

สรายุธ ทองกอบเหมือน

นภัทร วัจนเทพินทร์

สารบัญ

บทที่ 1 ทบทวนเวคเตอร์เบื้องต้น 9

1.1 บทนำ 9

1.2 ปริมาณสเกล่าร์ และปริมาณเวคเตอร์ 9

1.3 พีชคณิตเวคเตอร์ 10

1.4 เวคเตอร์หน่วยในภาพ 3 มิติ 16

แบบฝึกหัดบทที่ 1 17

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 1 18

บทที่ 2 การคูณระหว่างเวคเตอร์กับเวคเตอร์ 19

2.1 ผลคูณสเกล่าร์ของเวคเตอร์ 19

2.2 มุมแสดงทิศทางและโคซายน์แสดงทิศทางของเวคเตอร์ 21

2.3 ทิศทางของเวคเตอร์บนเวคเตอร์ 23

2.4 ผลคูณเวคเตอร์ของเวคเตอร์ 26

2.5 ผลคูณของสามเวคเตอร์ 30

2.6 สมการเส้นตรง และระนาบใน 3 มิติ 35

แบบฝึกหัดบทที่ 2 48

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 2 51

ตัวอย่าง

บทที่ 3 อนุพันธ์ของเวคเตอร์ 53

3.1 อนุพันธ์ของเวคเตอร์ธรรมดา 53
3.2 สูตรการหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์ 54
3.3 ความเร็วและความเร่ง 56
3.4 เส้นโค้งในอวกาศ 57
3.5 เวคเตอร์สัมผัสโค้ง และความยาวโค้ง 58
3.6 อนุพันธ์ย่อยของเวคเตอร์ 62
3.7 ผิวโค้ง 65
แบบฝึกหัดบทที่ 3 68
เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 3 70

บทที่ 4 เกรเดียนท์ ไดเวอร์เจนท์ และเคิร์ล 71

4.1 สัญญากรเดล 71
4.2 เกรเดียนท์ 71
4.3 อนุพันธ์ระบุทิศทาง 75
4.4 ไดเวอร์เจนท์ 76
4.5 เคิร์ล 79
4.6 สูตรที่เกี่ยวกับสัญญากรเดล 80
แบบฝึกหัดบทที่ 4 82
เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 4 84

บทที่ 5 การอินทิเกรตเวคเตอร์ 86

5.1 การอินทิเกรตเวคเตอร์ธรรมดา 86
5.2 การอินทิกรัลเชิงเส้น 88
5.3 การอินทิกรัลเชิงผิว 98
5.4 การอินทิกรัลเชิงปริมาตร 109
แบบฝึกหัดบทที่ 5 111
เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 5 114

ตัวอย่าง

บทที่ 6 ทฤษฎีอินทิกรัล 116

6.1 ทฤษฎีของกรีนในระนาบ 116
6.2 ทฤษฎีไดเวอร์เจนท์ หรือทฤษฎีของเกาส์ 125
6.3 ทฤษฎีของสโตกส์ 131
แบบฝึกหัดบทที่ 6 138
เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 6 140

บทที่ 7 การวิเคราะห์เชิงซ้อน 141

7.1 บทนำ 141
7.2 จำนวนเชิงซ้อน 141
7.3 จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดฉาก 143
7.4 จำนวนคอนจุเกตเชิงซ้อน 144
7.5 พีชคณิตเชิงซ้อน 145
7.6 จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว 148
7.7 รากของจำนวนเชิงซ้อน 155
แบบฝึกหัดบทที่ 7 158
เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 7 160

บทที่ 8 ฟังก์ชันวิเคราะห์เชิงซ้อน 162

8.1 ฟังก์ชันเชิงซ้อน 162
8.2 ลิมิต และความต่อเนื่อง 164
8.3 อนุพันธ์ 165
8.4 สมการคอชีรีแมนน์ 167
แบบฝึกหัดบทที่ 8 170
เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 8 171

บทที่ 9 ฟังก์ชันเชิงซ้อนเบื้องต้น 172

9.1 ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล 172
9.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ 174

ตัวอย่าง

9.3 ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก 176
9.4 ฟังก์ชันลอการิทึม 177
9.5 ฟังก์ชันกำลังเชิงซ้อน 179
แบบฝึกหัดบทที่ 9 181
เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 9 183

บทที่ 10 การแปลงลาปลาซ 184

10.1 บทนำ 184
10.2 นิยามของการแปลงลาปลาซ 184
10.3 ตารางการแปลงลาปลาซ 186
10.4 คุณสมบัติการแปลงลาปลาซ 187
แบบฝึกหัดที่ 10.1-10.4 198
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 10.1-10.4 200
10.5 ฟังก์ชันเป็นคาบ 202
10.6 ฟังก์ชันกระโดดหนึ่งหน่วย 205
แบบฝึกหัดที่ 10.5-10.6 210
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 10.5-10.6 213
10.7 การแปลงผกผันลาปลาซ 215
แบบฝึกหัดที่ 10.7 228
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 10.7 231
10.8 การประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซกับวงจรไฟฟ้า 233
แบบฝึกหัดที่ 10.8 237
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 10.8 238

บทที่ 11 อนุกรมฟูเรียร์ 239

11.1 บทนำ 239
11.2 ฟังก์ชันคาบ 239
11.3 สูตรของออยเลอร์ฟูเรียร์ 241

ตัวอย่าง

แบบฝึกหัดที่ 11.1-11.3 246
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 11.1-11.3 248
11.4 ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ 249
แบบฝึกหัดที่ 11.4 255
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 11.4 256
11.5 การขยายครึ่งคาบ 257
แบบฝึกหัดที่ 11.5 261
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 11.5 263
11.6 อนุกรมฟูเรียร์ในรูปจำนวนเชิงซ้อน 264
แบบฝึกหัดที่ 11.6 267
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 11.6 268
11.7 ฟูเรียร์อินทิกรัล 269
แบบฝึกหัดที่ 11.7 272
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 11.7 273

บทที่ 12 การแปลงฟูเรียร์ 274
12.1 ฟูเรียร์อินทิกรัลสำหรับรูปแบบจินตภาพ 274
12.2 การแปลงฟูเรียร์ 274
12.3 การแปลงฟูเรียร์โคไซน์และไซน์ 277
แบบฝึกหัดบทที่ 12 279
เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 12 280

ภาคผนวก 281
บรรณานุกรม 284

ตัวอย่าง

1

ทบทวนเวคเตอร์เบื้องต้น

1.1 บทนำ (Introduction)

เวคเตอร์เป็นพื้นฐานอย่างหนึ่งที่นำไปประยุกต์แก้ไขปัญหาทางด้านวิศวกรรมให้ประสบผลสำเร็จตามวัตถุประสงค์ ในบางปัญหาอาจจะแก้ไขได้ด้วยทฤษฎีอื่นๆ ก็ตาม แต่วิธีใช้เวคเตอร์วิเคราะห์จะทำให้บรรลุผลสำเร็จและรวดเร็ว และสามารถเห็นภาพปริมาณทางฟิสิกส์ได้ การศึกษาวิเคราะห์เวคเตอร์เพื่อแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมจึงเป็นหนทางของวิศวกรนำไปวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรม เช่น ไฟฟ้าสถิต สนามไฟฟ้า (Electrical field) และการหาค่าแรงที่เกิดจากสนามไฟฟ้า ความเร็ว (Speed) ความเร่ง (Acceleration) แรง (Force) ซึ่งสามารถระบุทิศทางได้ เป็นต้น

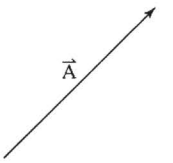
1.2 ปริมาณสเกล่าร์ และปริมาณเวคเตอร์ (Scalar and Vector)

ปริมาณในทางฟิสิกส์สามารถจำแนกปริมาณออกเป็น 2 ปริมาณคือ

1. ปริมาณสเกล่าร์ (Scalar quantity) คือปริมาณที่มีแต่ขนาดไม่มีทิศทาง (Magnitude) เช่น มวล ความยาว เวลา อุณหภูมิ ปริมาตร เป็นต้น

2. ปริมาณเวคเตอร์ (Vector quantity) คือปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เช่น แรง ความเร็ว และความเร่ง เป็นต้น

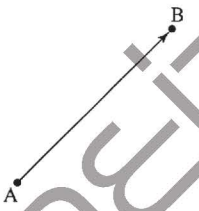
สัญลักษณ์เวคเตอร์ จะเขียนแทนด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษ และมีลูกศรกำกับบนตัวอักษร เพื่อบ่งบอกว่าคือเวคเตอร์ เช่น $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ เป็นต้น ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 *เวคเตอร์* $\vec{A}$

จากรูปที่ 1.1 ขนาดของเวคเตอร์ $\vec{A}$ จะเขียนแทนด้วย $|\vec{A}|$

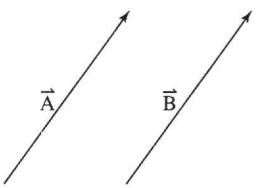
ลักษณะของเวคเตอร์จะเขียนจากจุดเริ่มต้น (Initial point or origin) ของเวคเตอร์ไปยังจุดปลายหรือจุดสิ้นสุดของเวคเตอร์ (Terminal point) เช่น เวคเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ จะเขียนแทนด้วยเส้นตรงที่มีจุดเริ่มต้น A และสิ้นสุดที่ B ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 *เวคเตอร์* $\overrightarrow{AB}$

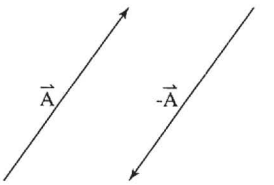
1.3 พีชคณิตเวคเตอร์ (Vector algebra)

1. เวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อมีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน โดยไม่ต้องคำนึงถึงจุดเริ่มต้นของเวคเตอร์ ดังรูปที่ 1.3



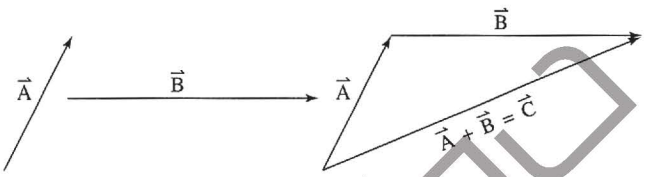
รูปที่ 1.3 *เวคเตอร์เท่ากัน* $\vec{A} = \vec{B}$

2. เวคเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน เรียกว่า เวคเตอร์ลบ หรือนิเสธเวคเตอร์ เช่น เวคเตอร์ $\vec{A}$ และเวคเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้าม คือ $-\vec{A}$ ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 *เวคเตอร์ขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงข้ามกัน* $|\vec{A}| = -|\vec{A}|$

3. การบวกเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ จะได้ผลเท่ากับเวคเตอร์ $\vec{C}$ ดังรูปที่ 1.5



รูปที่ 1.5 *ผลบวก* $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$

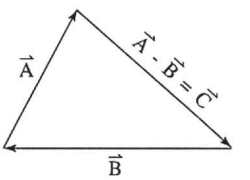
กำหนด

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = [(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3)]$$

4. การลบเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ จะได้ผลเท่ากับเวคเตอร์ $\vec{C}$ ดังรูปที่ 1.6



รูปที่ 1.6 *ผลลบ* $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$ *หรือ* $\vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{C}$

กำหนด

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = [(a_1 - b_1), (a_2 - b_2), (a_3 - b_3)]$$

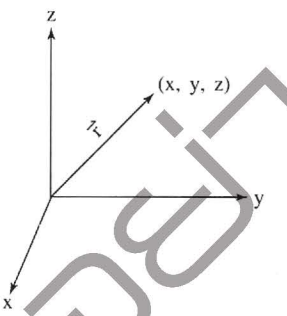
ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนดให้ $\vec{A} = (1, 2, 3)$ และ $\vec{B} = (4, 5, 6)$ จงหาค่า $\vec{A} + \vec{B}$ และ $\vec{A} - \vec{B}$

วิธีทำ

$$\vec{A} + \vec{B} = [(1 + 4), (2 + 5), (3 + 6)]$$
$$= [5, 7, 9]$$
$$\vec{A} - \vec{B} = [(1 - 4), (2 - 5), (3 - 6)]$$
$$= [-3, -3, -3]$$

---

5. เวคเตอร์ตำแหน่ง คือเวคเตอร์ที่มีตำแหน่งเริ่มต้นที่จุดศูนย์ (Origin) หรือจุดกำเนิด และจุดปลายอยู่ที่จุดใดๆ (x, y, z) เขียนแทนด้วย $\vec{r}$ ดังนั้น $\vec{r} = (x, y, z)$ ดังรูปที่ 1.7



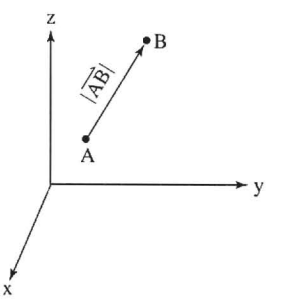
รูปที่ 1.7 *เวคเตอร์ตำแหน่ง*

6. การหาขนาดของเวคเตอร์ที่ไม่ใช่เวคเตอร์ตำแหน่ง คือมีจุดเริ่มต้นไม่ออกจากจุดศูนย์ เช่น ขนาดของเวคเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้น A ไปถึงจุด B ในภาพ 3 มิติ จะเขียนแทนด้วย $|\overrightarrow{AB}|$ ดังรูปที่ 1.8

กำหนด $A = (x_1, y_1, z_1)$

$B = (x_2, y_2, z_2)$

ดังนั้น ขนาดของเวคเตอร์ $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



รูปที่ 1.8 *ขนาดของเวคเตอร์จุด A ไป B เท่ากับ $|\overrightarrow{AB}|$*

ตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1.2 กำหนดจุด A = (2, 5, 4) และ B = (3, 3, 2) จงหาขนาดของเวคเตอร์ $\overrightarrow{AB}$

วิธีทำ ขนาดของเวคเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ เขียนแทนด้วย $|\overrightarrow{AB}|$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{(3 - 2)^2 + (3 - 5)^2 + (2 - 4)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 4 + 4}$$
$$= 3$$

$\therefore$ ขนาดของเวคเตอร์ $|\overrightarrow{AB}| = 3$ หน่วย

---

7. ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวคเตอร์ และ k เป็นสเกล่าร์หรือค่าจำนวนจริงแล้ว ผลคูณระหว่างจำนวนจริง m และเวคเตอร์ $\vec{A}$ หมายถึงเวคเตอร์ที่มีขนาดเป็น k เท่า และมีทิศทางตามเวคเตอร์ $\vec{A}$ เขียนแทนด้วย $m\vec{A}$

โดยที่ $k > 0$ และ $\vec{A} \neq \vec{0}$ $k\vec{A}$ มีทิศทางตามเวคเตอร์ $\vec{A}$

$k < 0$ และ $\vec{A} \neq \vec{0}$ $-k\vec{A}$ มีทิศทางตรงข้ามเวคเตอร์ $\vec{A}$

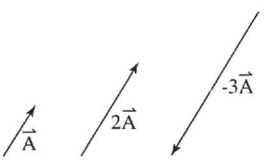
$k = 0$ และ $\vec{A} \neq \vec{0}$ $k\vec{A} = 0$

และถ้า $\vec{A} = (x, y, z,)$ แล้ว $k\vec{A} = [kx, ky, kz]$

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้เวคเตอร์ $\vec{A} = 2, 3, 4$ จงหาค่า $2\vec{A}$ และ $-3\vec{A}$

วิธีทำ
$$2A = [2(2), 2(3), 2(4)]$$
$$= [4, 6, 8]$$
$$-3A = [-3(2), -3(3), -3(4)]$$
$$= [-6, -9, -12]$$

ดังรูปที่ 1.9



รูปที่ 1.9 *ผลคูณระหว่างเวคเตอร์ $\vec{A}$ กับสเกล่าร์*

ตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1.4 กำหนด $\vec{A} = (2, 3, 4)$, $\vec{B} = (1, -5, 3)$
จงหาค่า $2\vec{A} + 3\vec{B}$ และ $|2\vec{A} + 3\vec{B}|$

วิธีทำ

$$2\vec{A} = 2[2, 3, 4] = [4, 6, 8]$$

$$3\vec{B} = 3[1, -5, 3] = [3, -15, 9]$$

$$\therefore\ 2\vec{A} + 3\vec{B} = [7, -9, 17]$$

$$\text{และ } |2\vec{A} + 3\vec{B}| = \sqrt{(7)^2 + (-9)^2 + (17)^2}$$

$$= \sqrt{49 + 81 + 289}$$

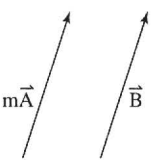
$$= \sqrt{419} = 20.47$$

กฎทางพีชคณิตของเวคเตอร์ ถ้า $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นเวคเตอร์ m, n เป็นสเกล่าร์แล้ว

1. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ กฎการสลับที่ของการบวก
2. $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ กฎการจัดหมู่ของการบวก
3. $m\vec{A} = \vec{A}m$ กฎการสลับที่ของการคูณ
4. $m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A}$ กฎการจัดหมู่ของการคูณ
5. $(m + n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$ กฎการกระจาย
6. $m(\vec{A} + B) = m\vec{A} + m\vec{B}$ กฎการกระจาย

หมายเหตุ กฎทางพีชคณิตที่กล่าวไว้ข้างต้น จะใช้ได้เฉพาะการคูณเวคเตอร์กับสเกล่าร์เท่านั้น ส่วนวิธีการคูณเวคเตอร์กับเวคเตอร์จะกล่าวในบทต่อไป

8. เวคเตอร์ขนานกันก็ต่อเมื่อ $\vec{A} \neq 0$ และ $\vec{B} \neq 0$ และถ้ามี m, n ซึ่งเป็นสเกล่าร์คูณกับเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ โดยที่ $m\vec{A} = \vec{B}$ และ $n\vec{B} = \vec{A}$ จะเขียนแทนด้วย $\vec{A} \mathbin{/\!/} \vec{B}$ ดังรูปที่ 1.10



รูปที่ 1.10 *เวคเตอร์ $m\vec{A} \mathbin{/\!/} \vec{B}$*

9. เวคเตอร์หน่วย (Unit vector) คือเวคเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย กำหนดให้ $\vec{A}$ เป็นเวคเตอร์ใดๆ

โดยที่ เวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$ คือ $\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

เวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{A}$ คือ $\frac{-\vec{A}}{|\vec{A}|}$

ตัวอย่างที่ 1.5 เวคเตอร์ $\vec{A} = (2, 3, 4)$ จงหาเวคเตอร์หน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$

วิธีทำ เวคเตอร์หน่วยของ $\vec{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2, 3, 4}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (4)^2}}$$

$$= \frac{2, 3, 4}{\sqrt{4 + 9 + 16}}$$

$$= \frac{2, 3, 4}{\sqrt{29}}$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}\right]$$

ตัวอย่างที่ 1.6 กำหนดให้ $\vec{A} = (2, 3, 4)$, $\vec{B} = (1, -2, 5)$
จงหาเวคเตอร์ที่มีขนาด 2 หน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{A} + 2\vec{B}$

วิธีทำ เวคเตอร์ที่มีขนาด 2 หน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{A} + 2\vec{B}$ คือ $\frac{-2(\vec{A} + 2\vec{B})}{|(A + 2\vec{B})|}$

$$\vec{A} + 2\vec{B} = (2, 3, 4) + 2(1, -2, 5)$$

$$= (2, 3, 4) + (2, -4, 5)$$

$$= (4, -1, 9)$$

$$|\vec{A} + 2\vec{B}| = \sqrt{(4)^2 + (-1)^2 + (9)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 1 + 81} = \sqrt{98}$$

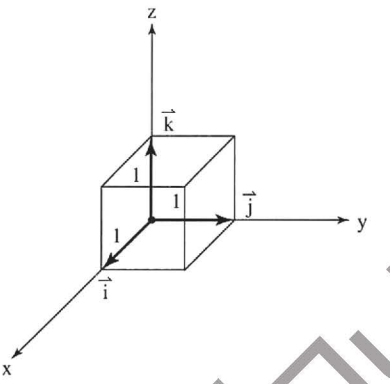
$$\therefore \frac{-2(\vec{A} + 2\vec{B})}{|(\vec{A} + 2\vec{B})|} = \frac{-2(4, -1, 9)}{\sqrt{98}}$$

$$= \frac{-8}{\sqrt{98}}, \frac{2}{\sqrt{98}}, \frac{-18}{\sqrt{98}}$$

ตัวอย่าง

1.4 เวคเตอร์หน่วยในภาพ 3 มิติ

เวคเตอร์หน่วยในภาพ 3 มิติ คือเวคเตอร์ที่อยู่ในภาพ 3 มิติ หรือเวคเตอร์ที่ประกอบขึ้นด้วยแกนซึ่งตั้งฉากกัน 3 แกน คือแกน x, y, z ดังรูปที่ 1.11



รูปที่ 1.11 *เวคเตอร์หน่วยในปริภูมิ 3 มิติ*

โดยที่ $\vec{i}$ เป็นเวคเตอร์หน่วยบนแกน x

$\vec{j}$ เป็นเวคเตอร์หน่วยบนแกน y

$\vec{k}$ เป็นเวคเตอร์หน่วยบนแกน z

จะได้ $\vec{i} = [1, 0, 0]$, $\vec{j} = [0, 1, 0]$, $\vec{k} = [0, 0, 1]$

ถ้า $\vec{A} = [A_1, A_2, A_3]$

ดังนั้น $\vec{A} = [(A_1, 0, 0), (0, A_2, 0), (0, 0, A_3)]$

$= x_1(1, 0, 0)\vec{i}, y_1(0, 1, 0)\vec{j}, z_1(0, 0, 1)\vec{k}$

จะได้ $\vec{A} = A_1\vec{i}, A_2\vec{j}, A_3\vec{k}$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. กำหนดให้ $\vec{A} = (2, 1, 3)$ และ $\vec{B} = (4, 3, 5)$ จงหา

   1.1 $\vec{A} + \vec{B}$

   1.2 $\vec{A} - \vec{B}$

   1.3 $2\vec{A} - 3\vec{B}$

   1.4 $2\vec{A} + 3\vec{B}$

   1.5 $|2\vec{A} + 3\vec{B}|$

2. กำหนดจุด A = (1, 2, 3) และ B = (2, 1, 2) จงหา

   2.1 เวคเตอร์ $\overrightarrow{AB}$

   2.2 ขนาดของเวคเตอร์ $|\overrightarrow{AB}|$

   2.3 เวคเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยของ $\overrightarrow{AB}$

3. กำหนดให้ $\vec{A} = (2, 3, 5)$ และ $\vec{B} = (1, 3, 4)$ จงหา

   3.1 เวคเตอร์ $\vec{A} + 2\vec{B}$

   3.2 เวคเตอร์หน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{A} + 2\vec{B}$

   3.3 เวคเตอร์ที่มีขนาด 3 หน่วย ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{A} + 2\vec{B}$

4. กำหนดให้ $\vec{A} = \vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ และ $\vec{C} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ จงหา

   4.1 เวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{A} + 2\vec{B} + 3\vec{C}$

   4.2 เวคเตอร์ที่มีขนาด 2 หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{A} + 2\vec{B} + 3\vec{C}$

ตัวอย่าง

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 1

1. 1.1 $(6, 4, 8)$

   1.2 $(-2, -2, -2)$

   1.3 $(-8, -7, -9)$

   1.4 $(16, 11, 21)$

   1.5 $\left(\frac{16}{28.6}, \frac{11}{28.6}, \frac{21}{28.6}\right)$

2. 2.1 $(1, -1, -1)$

   2.2 3 หน่วย

   2.3 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

3. 3.1 $(4, 9, 13)$

   3.2 $\left(\frac{4}{16.3}, \frac{9}{16.3}, \frac{13}{16.3}\right)$

   3.3 $\left(\frac{-12}{16.3}, \frac{-27}{16.3}, \frac{-39}{16.3}\right)$

4. 4.1 $\left(\frac{20}{20.4}\vec{i} - \frac{1}{20.4}\vec{j} + \frac{4}{20.4}\vec{k}\right)$

   4.2 $\left(\frac{40}{20.4}\vec{i} - \frac{2}{20.4}\vec{j} + \frac{8}{20.4}\vec{k}\right)$

ตัวอย่าง

2

การคูณระหว่างเวคเตอร์กับเวคเตอร์

การคูณระหว่างเวคเตอร์กับเวคเตอร์ได้ผล 2 แบบคือ ผลคูณเชิงสเกล่าร์ และผลคูณเชิงเวคเตอร์ สำหรับเวคเตอร์สองตัวคูณกันนั้นมีวิธีการคูณ 2 วิธีคือ การคูณแบบดอท (dot product) และการคูณแบบครอส (cross product) ซึ่งจะกล่าวต่อไป

2.1 ผลคูณสเกล่าร์ของเวคเตอร์ (Scalar product or dot product or inner product)

นิยาม 2.1 กำหนดให้ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นเวคเตอร์สองเวคเตอร์ ผลคูณสเกล่าร์ระหว่างขนาดของเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ กับโคซายน์ของมุมระหว่างเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ โดยแทน θ เป็นมุมระหว่างเวคเตอร์ทั้งสอง

เขียนแทนด้วย $\vec{A} \cdot \vec{B}$ อ่านว่า $\vec{A}$ dot $\vec{B}$

จะได้ว่า $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta, \ 0 \le \theta \le \pi$ 2.1

คุณสมบัติของผลคูณสเกล่าร์

กำหนดให้ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ เป็นเวคเตอร์ใดๆ

1. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ (คุณสมบัติการสลับที่)
2. $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ (คุณสมบัติการกระจาย)
3. $m(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (m\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (m\vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})m$, m เป็นสเกล่าร์
4. $\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}| \cos 0^\circ = 1$

   ดังนั้น $\vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

ตัวอย่าง

5. $\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}|\,|\vec{j}| \cos 90^\circ = 0$

ดังนั้น $\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

หมายเหตุ สองเวคเตอร์ตั้งฉากกันและดอทกันจะมีค่าเท่ากับ 0

6. กำหนดให้ $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ และ $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ จะหาผลคูณสเกล่าร์ของเวคเตอร์ทั้งสองโดยไม่ต้องทราบค่ามุมของเวคเตอร์ทั้งสองได้จาก

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}) \cdot (B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k})$$

จากสมการเมื่อใช้กฎการกระจายจะได้

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot \vec{B} &= A_1\vec{i} \cdot (B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_2\vec{k}) + A_2\vec{i} \cdot (B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}) \\
&\quad + A_3\vec{k} \cdot (B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}) \\
&= [A_1B_1\vec{i} \cdot \vec{i} + A_1B_2\vec{i} \cdot \overset{0}{\vec{j}} + A_1B_3\vec{i} \cdot \overset{0}{\vec{k}}] \\
&\quad + [A_2B_1\vec{j} \cdot \overset{0}{\vec{i}} + A_2B_2\vec{j} \cdot \vec{j} + A_2B_3\vec{j} \cdot \overset{0}{\vec{k}}] \\
&\quad + [A_3B_1\vec{k} \cdot \overset{0}{\vec{i}} + A_3B_2\vec{k} \cdot \overset{0}{\vec{j}} + A_3B_3\vec{k} \cdot \vec{k}]
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = [A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3] \qquad \text{..... 2.2}$$

และ
$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|\,|\vec{A}| \cos 0^\circ = |\vec{A}|^2 \qquad \text{..... 2.3}$$

$$= [A_1^2 + A_2^2 + A_3^2]$$

$$\vec{B} \cdot \vec{B} = |\vec{B}|\,|\vec{B}| \cos 0^\circ = |\vec{B}|^2 \qquad \text{..... 2.4}$$

$$= [B_1^2 + B_2^2 + B_3^2]$$

7. กำหนดให้เวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นเวคเตอร์ที่ไม่เท่ากับ 0 ถ้าผลคูณสเกล่าร์มีค่าเท่ากับศูนย์แล้ว หมายความว่าเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังต่อไปนี้

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta = 0 \quad (\vec{A} \perp \vec{B})$$

ดังนั้น
$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|} = 90^\circ$$

8. $|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2$

9. $|\vec{A} - \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2$

10. $$\begin{aligned}
|\vec{A} + \vec{B}|^2 + |\vec{A} - \vec{B}|^2 &= (|\vec{A}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2] + [|\vec{A}| - 2\vec{A} \cdot \vec{B} - + |\vec{B}|^2) \\
&= 2(|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2)
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้ $A = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ และ $B = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ จงหาค่ามุมระหว่างเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ และสเก็ตช์ภาพประกอบ

วิธีทำ ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

จากสมการ $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

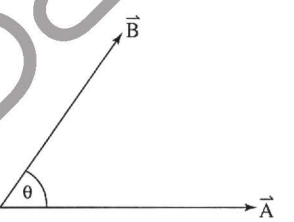
$$= \frac{[(5)(2) + (2)(-5) + (3)(3)]}{\sqrt{(5)^2 + (2)^2 + (3)^2} \cdot \sqrt{(2)^2 + (-5)^2 + (3)^2}}$$

$$= \frac{10 - 10 + 9}{\sqrt{25 + 4 + 9} \cdot \sqrt{4 + 25 + 9}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{38}\sqrt{38}} = \frac{9}{38}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\frac{9}{38} = 76.3^\circ$$

มุมระหว่างเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เท่ากับ 76.3 องศา



รูปที่ 2.1 *แสดงมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$*

ตัวอย่าง

2.2 มุมแสดงทิศทางและโคซายน์แสดงทิศทางของเวคเตอร์ (Direction angle and Direction cosine)

นิยาม 2.2 มุมแสดงทิศทางของเวคเตอร์ $\vec{A}$ ในแนวแกน x, y และ z ทางบวก ซึ่งจะแทนด้วยมุมต่างๆ ดังนี้

α แทนมุมในทิศทางของแกน x ดังนั้นโคซายน์ของมุมคือ $\cos\alpha$

β แทนมุมในทิศทางของแกน y ดังนั้นโคซายน์ของมุมคือ $\cos\beta$

γ แทนมุมในทิศทางของแกน z ดังนั้นโคซายน์ของมุมคือ $\cos\gamma$

หรือเรียก $\cos\alpha$, $\cos\beta$ และ $\cos\gamma$ คือโคซายน์แสดงทิศทางของเวคเตอร์ $\vec{A}$

ตัวอย่างที่ 2.2 กำหนดให้เวคเตอร์ $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ จงหาค่ามุมระหว่างเวคเตอร์ $\vec{A}$ ในแนวแกน x, y และ z

วิธีทำ จาก $\vec{A} \cdot \vec{i} = |\vec{A}||\vec{i}| \cos\alpha$, $\vec{A} \cdot \vec{j} = |\vec{A}||\vec{j}| \cos\beta$, $\vec{A} \cdot \vec{k}$

$= |\vec{A}||\vec{k}| \cos\gamma$

และ $\vec{A} \cdot \vec{i} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \cdot (\vec{i}) = 2$

$\vec{A} \cdot \vec{j} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \cdot (\vec{j}) = 3$

$\vec{A} \cdot \vec{k} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \cdot (\vec{k}) = 4$

$|\vec{A}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = 5.4$

โคซายน์แสดงทิศทางและมุมทิศทางของเวคเตอร์ คือ

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{i}}{|\vec{A}|} = \frac{2}{5.4} = 0.37$$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1} 0.37 = 68.26^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{j}}{|\vec{A}|} = \frac{3}{5.4} = 0.55$$

$$\therefore \beta = \cos^{-1} 0.55 = 56.25^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{A} \cdot \vec{k}}{|\vec{A}|} = \frac{4}{5.4} = 0.74$$

$$\therefore \gamma = \cos^{-1} 0.74 = 42.2^\circ$$

ดังนั้น มุมแสดงทิศทางคือ $\alpha = 68.26^\circ$, $\beta = 56.25^\circ$, $\gamma = 42.2^\circ$

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดให้เวคเตอร์มีจุดกำเนิดอยู่ที่จุด A = (2, 3, 4) และมีจุดปลายอยู่ที่ B = (3, 3, 5) จงหาค่ามุมแสดงทิศทางของเวคเตอร์

วิธีทำ เวคเตอร์ $\overrightarrow{AB} = (3 - 2)\vec{i} + (3 - 3)\vec{j} + (5 - 4)\vec{k} = \vec{i} + \vec{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

จาก $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} = |\overrightarrow{AB}||\vec{i}| \cos\alpha$, $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{j} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{j}| \cos B$, $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{k}$

$= |\overrightarrow{AB}||\vec{k}| \cos\gamma$

และ $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} = (\vec{i} + \vec{k}) \cdot (\vec{i}) = 1$

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{j} = (\vec{i} + \vec{k}) \cdot (\vec{j}) = 0$

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{k} = (\vec{i} + \vec{k}) \cdot (\vec{k}) = 1$

ตัวอย่าง

โคซายน์แสดงทิศทางและมุมทิศทางของเวคเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ คือ

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{i}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \alpha = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

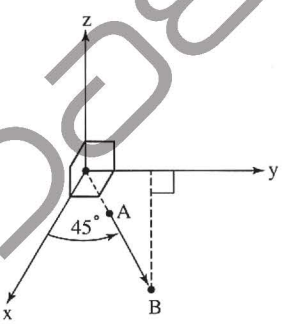
$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{j}}{|\overrightarrow{AB}|} = 0$$

$$\therefore\ \beta = \cos^{-1}0 = 90^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{k}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \gamma = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

ดังนั้น มุมแสดงทิศทางของเวคเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ คือ $\alpha = 45^\circ$, $B = 90^\circ$ และ $\gamma = 45^\circ$ จะได้ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 *แสดงทิศทางของเวคเตอร์ในทิศทางของมุม α, B และ γ*

2.3 ทิศทางของเวคเตอร์บนเวคเตอร์ (Component or projection)

นิยาม 2.3 กำหนดให้ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นเวคเตอร์ ซึ่ง $\vec{B} \neq 0$ ส่วนประกอบของเวคเตอร์ $\vec{A}$ ในทิศทางของ $\vec{B}$ (Vector component) หรือแสดงภาพฉายของเวคเตอร์ $\vec{A}$ ใน $\vec{B}$ (Projection of $\vec{A}$ in $\vec{B}$) โดยแสดงในรูปที่ 2.3

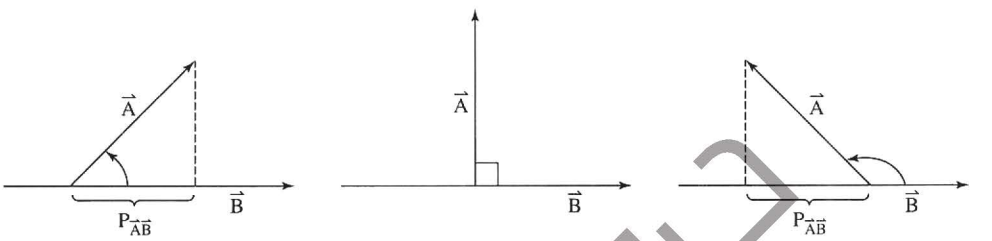
เขียนแทนด้วย $P_{\vec{AB}} = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}$ 2.5

พิสูจน์ $P_{\vec{AB}} = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \dfrac{|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}{|\vec{B}|}$

$$= |\vec{A}| \cos\theta$$

แต่ $$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

ดังนั้น $$P_{\vec{AB}} = |\vec{A}| \cdot \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}$$



(ก) $P_{\vec{AB}} > 0$ (ข) $P_{\vec{AB}} = 0$ (ค) $P_{\vec{AB}} < 0$

รูปที่ 2.3 *แสดงภาพฉายของเวคเตอร์ $\vec{A}$ ใน $\vec{B}$*

หมายเหตุ ถ้าเวคเตอร์ $|\vec{B}| = 0$ จะได้ $P_{\vec{AB}} = 0$

ถ้าเวคเตอร์ $|\vec{B}| = 1$ จะได้ $P_{\vec{AB}} = \vec{A}\cdot\vec{B}$

ดังนั้น เวคเตอร์ $|\vec{B}| \neq 0$ จะได้ $P_{\vec{AB}} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}$

ตัวอย่างที่ 2.4 จงหาภาพฉายของส่วนประกอบของเวคเตอร์ $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ บนเวคเตอร์ $\vec{B} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$

วิธีทำ จากสูตร $$P_{\vec{AB}} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

$$= \frac{10 - 12 + 12}{\sqrt{(5)^2 + (-4)^2 + (3)^2}}$$

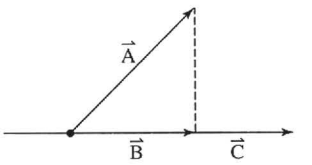
$$= \frac{10}{\sqrt{25 + 16 + 9}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{50}}$$

ตัวอย่างที่ 2.5 กำหนดให้เวคเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นเวคเตอร์ที่ออกจากจุดเริ่มต้นเดียวกัน ดังรูปที่ 2.4 จงหาค่า $|\vec{B}|$ และ $\vec{B}$

กำหนด $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{C} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}$



รูปที่ 2.4

วิธีทำ จากสูตร $|\vec{B}| = P_{\vec{AC}} = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{|\vec{C}|}$

$$= \frac{(2)(3) + (1)(-6) + (3)(5)}{\sqrt{(3)^2 + (-6)^2 + (5)^2}}$$

$$= \frac{6 - 6 + 15}{\sqrt{9 + 36 + 25}} = \frac{15}{\sqrt{70}}$$

$$\therefore |\vec{B}| = \frac{15}{\sqrt{70}}$$

เวคเตอร์ $\vec{B}$ จะหาได้จาก $|\vec{B}|$ คูณกับเวคเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector) $\vec{C}$

ดังนั้น $\vec{B} = |\vec{B}| \cdot \dfrac{\vec{C}}{|\vec{C}|}$

$$= \left(\frac{15}{\sqrt{70}}\right) \cdot \left(\frac{3\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{(3)^2 + (-6)^2 + (5)^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{15}{\sqrt{70}}\right) \cdot \left(\frac{3\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{9 + 36 + 25}}\right)$$

$$= \left(\frac{15}{\sqrt{70}}\right) \cdot \left(\frac{3\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{70}}\right)$$

$$\therefore \vec{B} = \frac{45\vec{i} - 90\vec{j} + 75\vec{k}}{70}$$

หรือ $\vec{B} = \dfrac{9}{14}\vec{i} - \dfrac{18}{14}\vec{j} + \dfrac{15}{14}\vec{k}$

ตัวอย่าง

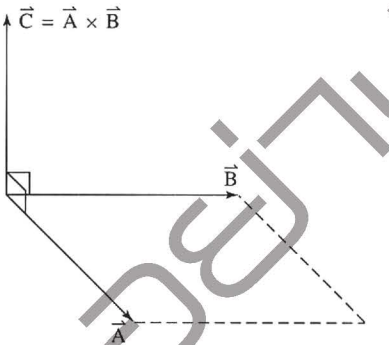
2.4 ผลคูณเวคเตอร์ของเวคเตอร์ (Vector product or cross product)

นิยาม 2.4 กำหนดให้ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นเวคเตอร์ ผลคูณเวคเตอร์ระหว่างขนาดของเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คูณกับซายน์ (Sine) ของมุมระหว่างเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ โดยแทน θ เป็นมุมระหว่างเวคเตอร์ทั้งสอง ซึ่งผลคูณจะได้เวคเตอร์ใหม่ $\vec{C}$ และเวคเตอร์ $\vec{C}$ จะตั้งฉากกับเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ หรือใช้ระบบมือขวา ดังรูปที่ 2.5

เขียนแทนด้วยสมการ $\vec{A} \times \vec{B}$ อ่านว่า $\vec{A}$ cross $\vec{B}$

จะได้ว่า $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta, 0 < \theta < \pi$ 2.6

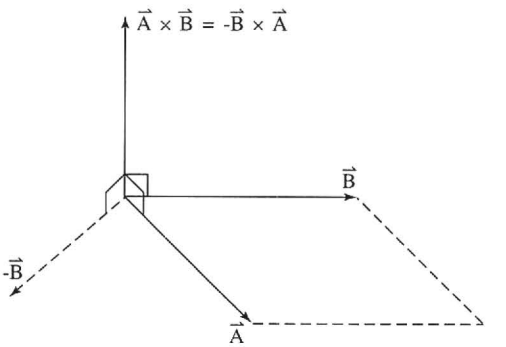
และถ้า $\vec{A} // \vec{B}$ แล้ว $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin 0^\circ = \vec{0}$



รูปที่ 2.5 *แสดงวิธีการคูณระหว่าง 2 เวคเตอร์ (Cross produc)*

คุณสมบัติของผลคูณเวคเตอร์ของ 2 เวคเตอร์

1. $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$ การคูณเวคเตอร์ 2 เวคเตอร์ ไม่สามารถใช้กฎการสลับที่ได้ ดังนั้น $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 *แสดงการเท่ากันของการคูณเวคเตอร์* $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

2. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$ (คุณสมบัติการกระจาย)

ถ้ากำหนด m, n เป็นสเกล่าร์แล้วจะได้

$\vec{A} \times (m\vec{B} + n\vec{C}) = m(\vec{A} \times \vec{B}) + n(\vec{A} \times \vec{C})$

3. $m(\vec{A} \times \vec{B}) = m\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times m\vec{B}$ (m เป็นปริมาณสเกล่าร์)

4. ถ้าเวคเตอร์ $\vec{A} \parallel \vec{B}$ แล้ว $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin 0^\circ = \vec{0}$

5. $|\vec{A} \times \vec{B}|^2 + |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 = |A|^2 |B|^2$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} |\vec{A} \times \vec{B}|^2 + |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 &= (|\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta)^2 + (|\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta)^2 \\ &= |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 \sin^2\theta + |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 \cos^2\theta \\ &= |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ \therefore |\vec{A} \times \vec{B}|^2 + |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 &= |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 \\ &= |\vec{A} \times \vec{B}|^2 \end{aligned}$$

6. ผลคูณเวคเตอร์ของเวคเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

$\vec{i} \times \vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}| \sin 0^\circ = 0$

ดังนั้น $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$

และถ้า $\vec{i} \times \vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}| \sin 90^\circ = 1$

ดังนั้น $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{i} = 1$

7. กำหนดให้เวคเตอร์ $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ และ $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ ผลคูณเวคเตอร์สองเวคเตอร์จะได้

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2B_3 - A_3B_2)\vec{i} - (A_1B_3 - A_3B_1)\vec{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\vec{k} \quad \text{.....2.7}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}) \times (B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}) \\ &= (A_1\vec{i} \times (B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k})) + (A_2\vec{j} \times (B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k})) \\ &\quad + (A_3\vec{k} \times (B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k})) \\ &= (A_1B_1\vec{i} \times \vec{i} + A_1B_2\vec{i} \times \vec{j} + A_1B_3\vec{i} \times \vec{k}) \\ &\quad + (A_2B_1\vec{j} \times \vec{i} + A_2B_2\vec{j} \times \vec{j} + A_2B_3\vec{j} \times \vec{k}) \\ &\quad + (A_3B_1\vec{k} \times \vec{i} + A_3B_2\vec{k} \times \vec{j} + A_3B_3\vec{k} \times \vec{k}) \\ &= (A_1B_2\vec{k} - A_1B_3\vec{j}) + (-A_2B_1\vec{k} + A_2B_3\vec{i}) + (A_3B_1\vec{j} - A_3B_2\vec{i}) \\ &= (A_2B_3 - A_3B_2)\vec{i} - (A_1B_3 - A_3B_1)\vec{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\vec{k} \end{aligned}$$

จากสมการ $\vec{A} \times \vec{B}$ จะเขียนเพื่อสะดวกในการคำนวณ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปดีเทอร์มิแนนท์ได้ดังนี้

ประวัติผู้เขียน

สรายุธ ทองกอบเหมือน

การศึกษา
- ปริญญาตรี ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเอเชียอาคเนย์ พ.ศ. 2541
- ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สาขาช่างไฟฟ้า วิทยาลัยเทคนิคสุพรรณบุรี พ.ศ. 2537

การทำงาน
- ตำแหน่ง อาจารย์ 1 ระดับ 4
- สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตนนทบุรี

นภัทร วัจนเทพินทร์

การศึกษา
- ครุศาสตร์อุตสาหกรรมมหาบัณฑิต (สาขาไฟฟ้า) สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ พ.ศ. 2534
- ครุศาสตร์อุตสาหกรรมบัณฑิต (ไฟฟ้า-ไฟฟ้ากำลัง) วิทยาลัยเทคโนโลยีและอาชีวศึกษา พ.ศ. 2528

การทำงาน
- ตำแหน่ง อาจารย์ 3 ระดับ 8 ผู้ช่วยผู้อำนวยการฝ่ายวิจัยและฝึกอบรม

ประวัติผลงาน
- เข้ารับการฝึกอบรมและศึกษาดูงานด้านระบบอิเล็กทรอนิกส์กำลัง ณ ประเทศสหรัฐอเมริกา พ.ศ. 2536
- เข้ารับการฝึกอบรมเรื่องการขับเคลื่อนไฟฟ้าด้วยระบบอิเล็กทรอนิกส์ ณ ประเทศสหพันธรัฐเยอรมัน พ.ศ. 2540
- งานวิจัยที่สำคัญและพิมพ์เผยแพร่แล้วในสาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ทั้งในประเทศและต่างประเทศ รวม 7 เรื่อง
- ผลงานการเขียนเอกสารประกอบการสอนและตำราเรียน สายช่างอุตสาหกรรม สาขาไฟฟ้า รวมทั้งสิ้นกว่า 30 เล่ม

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
SKYBOOK COMPANY LIMITED
515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105
E-mail: skybook1992@hotmail.com
www.skybook.co.th

คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกร 1
ISBN 974-389-380-6

ราคา 150 บาท