ชื่อหนังสือ อินทิกรัล
บาร์โค้ด 9789743895562
ISBN 974-389-556-6

Integral

อินทิกรัล

อินทิกรัลชั้นเดียว

อินทิกรัลสองชั้น อินทิกรัลสามชั้น

สำหรับนักศึกษาระดับ ปวส./ปริญญาตรี และผู้ที่สนใจทั่วไป

รศ. ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์

Integral

อินทิกรัล

สำหรับนักศึกษาระดับ ปวส./ปริญญาตรี และผู้ที่สนใจทั่วไป

ตัวอย่าง

โดย... รศ. ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
SKYBOOK COMPANY LIMITED
515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105
e-mail: sales@skybook.co.th

www.skybook.co.th

“อินทิกรัล”

พิมพ์ครั้งที่ 1 มกราคม 2548

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย
ห้ามคัดลอกถ่ายเอกสารหรือพิมพ์
หรือวิธีหนึ่งวิธีใดของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาต
จากบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

ราคา 280 บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

ชีระศักดิ์ อุรัจนานนท์
อินทิกรัล -- ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์, 2548.
432 หน้า
1. อินทิกรัล I. ชื่อเรื่อง
515 . 43
ISBN: 974-389-556-6
S7901-30-01-05

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
SKYBOOK COMPANY LIMITED
515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105
e-mail: sales@skybook.co.th

www.skybook.co.th

พิมพ์ที่ บริษัท สยามสปอร์ต ซินดิเคท จำกัด
459 ซอยพิบูลย์อุปถัมภ์ (ลาดพร้าว 48) แขวงสามเสนนอก เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310
โทรศัพท์ : 0-2694-3010

คำนำ

ตำราอินทิกรัล (Integral) เล่มนี้ ผู้เขียนได้เขียนและเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ในการประกอบการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส ในระดับปริญญาตรีและระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.) ผู้เขียนได้เขียนและเรียบเรียงเนื้อหาดังนี้

1. อินทิกรัลชั้นเดียว
2. เทคนิคของการอินทิเกรต
3. อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์
4. อินทิกรัลสองชั้น
5. อินทิกรัลสามชั้น

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราอินทิกรัลเล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ในการประกอบการเรียนการสอน ต่อนักศึกษา และผู้ที่ต้องการใช้ประกอบการศึกษาเพิ่มเติม

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่มีพระคุณอันยิ่งใหญ่มหาศาลหาสิ่งใดเสมอมิได้ ทั้งคุณครู และอาจารย์ทุก ๆ ท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้ให้แก่ผู้เขียน และรวมถึงครอบครัวอันเป็นที่รักยิ่งของผู้เขียน

รองศาสตราจารย์ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์

ตัวอย่าง

สารบัญ

		หน้า
บทที่ 1	**อินทิกรัลชั้นเดียว**	1
	อินทิกรัลไม่จำกัดเขต	1
	การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต	3
	แบบฝึกหัด 1.1	11
	คำตอบแบบฝึกหัด 1.1	12
	การอินทิเกรตฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล	13
	แบบฝึกหัด 1.2	16
	คำตอบแบบฝึกหัด 1.2	17
	การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ	18
	แบบฝึกหัด 1.3	21
	คำตอบแบบฝึกหัด 1.3	22
	การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ยกกำลังเป็นจำนวนเต็มบวก	23
	แบบฝึกหัด 1.4	33
	คำตอบแบบฝึกหัด 1.4	34
	การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิตในรูปกำลังสอง	36
	แบบฝึกหัด 1.5	52
	คำตอบแบบฝึกหัด 1.5	53
	การอินทิเกรตฟังก์ชันไฮเพอร์บอลิก	55
	แบบฝึกหัด 1.6	58
	คำตอบแบบฝึกหัด 1.6	58
บทที่ 2	**เทคนิคของการอินทิเกรต**	59
	การอินทิเกรตทีละส่วน	59
	แบบฝึกหัด 2.1	70
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.1	71

ตัวอย่าง

		หน้า
	การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ	73
	แบบฝึกหัด 2.2	86
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.2	87
	การอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย	89
	แบบฝึกหัด 2.3	104
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.3	105
	การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตัวแปรใหม่	107
	แบบฝึกหัด 2.4	113
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.4	114
บทที่ 3	**อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์**	115
	อินทิกรัลจำกัดเขต	115
	แบบฝึกหัด 3.1	135
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.1	136
	พื้นที่ระนาบ	137
	แบบฝึกหัด 3.2	160
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.2	163
	ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบ	164
	วิธีจาน	167
	แบบฝึกหัด 3.3	185
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.3	186
	วิธีเปลือกทรงกระบอก	187
	แบบฝึกหัด 3.4	204
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.4	206
	ความยาวของเส้นโค้งระนาบ	207
	แบบฝึกหัด 3.5	218
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.5	220

ตัวอย่าง

		หน้า
บทที่ 4	**อินทิกรัลสองชั้น**	221
	อินทิกรัลสองชั้นบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	222
	แบบฝึกหัด 4.1	231
	คำตอบแบบฝึกหัด 4.1	232
	อินทิกรัลสองชั้นบนโดเมนทั่วไป	233
	แบบฝึกหัด 4.2	261
	คำตอบแบบฝึกหัด 4.2	263
	การประยุกต์ของอินทิกรัลสองชั้น	265
	การหาพื้นที่ของบริเวณระนาบ	265
	การหาปริมาตรของรูปทรงตัน	272
	แบบฝึกหัด 4.3	279
	คำตอบแบบฝึกหัด 4.3	280
	การประยุกต์ทางฟิสิกส์	281
	แบบฝึกหัด 4.4	299
	คำตอบแบบฝึกหัด 4.4	300
	อินทิกรัลสองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว	301
	แบบฝึกหัด 4.5	320
	คำตอบแบบฝึกหัด 4.5	322
บทที่ 5	**อินทิกรัลสามชั้น**	323
	อินทิกรัลสามชั้นบนบริเวณรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก	323
	อินทิกรัลสามชั้นบนโดเมนทั่วไป	328
	แบบฝึกหัด 5.1	358
	คำตอบแบบฝึกหัด 5.1	360
	การเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัลสามชั้น	361
	อินทิกรัลสามชั้นในพิกัดทรงกระบอก	361
	แบบฝึกหัด 5.2	381
	คำตอบแบบฝึกหัด 5.2	381
	อินทิกรัลสามชั้นในพิกัดทรงกลม	382
	แบบฝึกหัด 5.3	401
	คำตอบแบบฝึกหัด 5.3	401

หน้า

แบบฝึกหัด 5.3 401

คำตอบแบบฝึกหัด 5.3 401

แบบฝึกหัด 5.4 402

คำตอบแบบฝึกหัด 5.4 402

การประยุกต์ของอินทิกรัลสามชั้น 403

แบบฝึกหัด 5.5 414

คำตอบแบบฝึกหัด 5.5 416

ภาคผนวก 417

สูตรการหาอนุพันธ์ 418

สูตรการอินทิเกรต 419

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ 420

บรรณานุกรม 422

ตัวอย่าง

อินทิกรัล

Integral

ตัวอย่าง

1... อินทิกรัลชั้นเดียว

จากความสนใจในการศึกษาหาพื้นที่ของบริเวณที่ไม่เป็นรูปทางเรขาคณิต เพื่อที่จะหาหลักวิธีการสำหรับการคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณที่ไม่เป็นรูปทางเรขาคณิตหรือบริเวณทั่วๆ ไปนั้น นิวตัน (Newton) และไลป์นิสต์ (Leiniz) ได้ค้นพบหลักวิธีการหาพื้นที่บริเวณทั่วๆ ไป โดยใช้ขบวนการย้อนกลับของการหาอนุพันธ์ ซึ่งค้นพบในเวลาใกล้เคียงกัน โดยนิวตันได้ค้นพบในปี ค.ศ.1669 และไลป์นิสต์ได้ค้นพบในปี ค.ศ.1673 การค้นพบหลักวิธีการนี้ถือว่าเป็นจุดเริ่มต้นของแคลคูลัสอย่างแท้จริง

อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)

เป็นการศึกษาขบวนการย้อนกลับของอนุพันธ์ หรือ ขบวนการหาฟังก์ชันที่ทราบอนุพันธ์ของฟังก์ชันอย่างมีระบบ

นิยาม 1.1 ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative)

กำหนดให้ $F(x)$ เป็นฟังก์ชันเราเรียกฟังก์ชัน $F(x)$ ว่า เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $F(x)$ ก็ต่อเมื่อ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกๆ x ในโดเมนของ $f(x)$

เช่น ฟังก์ชัน $\frac{1}{3}x^3, \frac{1}{3}x^3 - 2, \frac{1}{3}x^3 + 5, \frac{1}{3}x^3 + C$ (เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใดๆ) ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2$ เพราะอนุพันธ์ของแต่ละฟังก์ชันเท่ากับ x^2

เราจะเห็นได้ว่าฟังก์ชันหนึ่งๆ สามารถมีปฏิยานุพันธ์ได้มากมาย ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า ถ้า $F(x)$เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$หนึ่งฟังก์ชันแล้ว เราสามารถหาปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ได้ทั้งหมดด้วยการบวก $F(x)$ ด้วยค่าคงตัวที่แตกต่างกันไปนั่นคือ $F(x)+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใด ๆ เป็น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ เนื่องด้วย

$$\frac{d}{dx}[F(x)+C] = \frac{d}{dx}[F(x)] + \frac{d}{dx}[C] = f(x) + 0 = f(x)$$

ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 1.1 ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ แล้ว สำหรับค่าคงตัว C ใด ๆ ฟังก์ชัน $F(x)+C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ด้วย เช่น จาก $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ จะได้ $F(x) = \sin x$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \cos x$ และเราเขียนทุก ๆ ปฏิยานุพันธ์ของ $\cos x$ ได้ในรูป $F(x) = \sin x + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เราเรียกวิธีการหรือขบวนการในการหาปฏิยานุพันธ์ว่า **การหาปฏิยานุพันธ์** (Antidifferentiation) หรือ **การอินทิเกรต** (Integration) โดยใช้สัญลักษณ์แทนดังต่อไปนี้ ถ้ามีฟังก์ชัน $F(x)$ ที่ทำให้ $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$ แล้วฟังก์ชันที่เขียนในรูป $F(x)+C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ โดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

ซึ่งอ่านว่า **อินทิกรัลไม่จำกัดเขต** ของ $f(x)$ เท่ากับ $F(x)$ บวก C เพราะ $F(x)+C$ ไม่ใช่ฟังก์ชันที่กำหนดแน่นอน แต่เป็นเซตของฟังก์ชันที่เป็นไปได้ทั้งหมด

สัญลักษณ์ $\int$ เรียกว่า **เครื่องหมายอินทิกรัล** (Integral sign)

$f(x)$ เรียกว่า **ตัวถูกอินทิกรัล** (integrand)

x เรียกว่า **ตัวแปรของการอินทิเกรต** (variable of integration)

$\int f(x)dx$ เรียกว่า **อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน $f(x)$ เทียบกับตัวแปร x**

C เรียกว่า **ค่าคงตัวของการอินทิเกรต** (constant of integration)

หมายเหตุ ในตอนแรกจะกล่าวเพียงหนึ่งตัวแปร จึงเรียกว่า **อินทิกรัลของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรหรืออินทิกรัลชั้นเดียว** นั่นเอง เช่น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2$ คือฟังก์ชัน $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ ดังนั้น

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \cos x$ คือฟังก์ชัน $F(x) = \sin x + C$ ดังนั้น

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

ข้อสังเกต จากสัญลักษณ์ $\frac{d}{dx}(\ldots)$ แทนการดำเนินการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอิสระ x ดังนั้น สัญลักษณ์ $\int(\ldots)dx$ แทนการดำเนินการหาปฏิยานุพันธ์ หรือการอินทิเกรตเทียบกับตัวแปรอิสระ x ถ้าเป็นตัวแปรอิสระตัวอื่นที่ไม่ใช่ตัวแปร x แล้ว เราก็สามารถปรับสัญลักษณ์ให้เหมาะสมได้ เช่น $\frac{d}{dt}(F(t)) = f(t)+C$ และจะได้ว่า $\int f(t)dt = F(t)+C$ ซึ่งเป็นอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน $f(t)$ เทียบกับตัวแปร t

ตัวอย่าง 1.1 จงหาค่า $\int(3x^2 - 2x)dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 - 2x$

พิจารณา ถ้า $F(x) = x^3 - x^2$ จะได้ $F'(x) = 3x^2 - 2x$

นั่นคือ $F(x) = x^3 - x^2$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2 - 2x$

ดังนั้น $\int(3x^2 - 2x)dx = x^3 - x^2 + C$ ■

ตัวอย่าง

จากทฤษฎีการหา $F(x)$นั้นเราจะต้องพิจารณาคาดคะเน $F(x)$ ซึ่งเป็นเรื่องที่ค่อนข้างยาก โดยเฉพาะถ้าหากมีตัวถูกอินทิเกรตที่มีความซับซ้อนก็ยิ่งยากขึ้น เพื่อความสะดวกจึงมีการสร้างสูตรของการอินทิเกรตขึ้น เพื่อทำให้ง่ายขึ้น

การอินทิเกรตฟังก์ชันสามารถแบ่งได้ 2 กรณีดังนี้

1. การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต (Integration of Algebraic Functions)

ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Function) คือ ฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันตรรกยะ และรวมถึงฟังก์ชันที่ได้จากการ บวก ลบ คูณ หาร และการถอดรากของฟังก์ชันพหุนาม

2. การอินทิเกรตฟังก์ชันอดิศัย (Integration of Transcendental Functions)

ฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental Functions) คือ ฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม เป็นต้น

1. การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

สูตรการอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x และ a,c,n เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้วจะได้

1. $\int(f'(x))dx = f(x)+C$
2. $\int du = u+C$
3. $\int audx = a\int udx$
4. $\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ เมื่อ $n \neq -1$
5. $\int\frac{du}{u} = \ln|u|+C$
6. $\int(u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$

ตัวอย่าง 1.2 จงหาค่า $\int(4x^3+3x^2-2x-5)dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int(4x^3+3x^2-2x-5)dx &= \int 4x^3dx + \int 3x^2dx - \int 2xdx - \int 5dx \\ &= 4\int x^3dx + 3\int x^2dx - 2\int xdx - 5\int dx \\ &= 4\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right)+3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)-2\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)-5x+C \\ &= x^4+x^3-x^2-5x+C \ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.3 จงหาค่า $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}x+\frac{3}{x}\right)dx$

วิธีทำ $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}x+\frac{3}{x}\right)dx = \int\sqrt[3]{x}dx+\int\frac{2}{\sqrt{x}}dx-\int\frac{1}{2}xdx+\int\frac{3}{x}dx$

$$= \int x^{\frac{1}{3}}dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{2}\int xdx+3\int\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+\frac{2x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)+3\ln|x|+C$$

$$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+4\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}+3\ln|x|+C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.4 จงหาค่า $\int(3-2x)\sqrt{x}dx$

วิธีทำ $\int(3-2x)\sqrt{x}dx = \int 3x^{\frac{1}{2}}dx-\int 2x^{\frac{3}{2}}dx$

$$= 3\int x^{\frac{1}{2}}dx-2\int x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C$$

$$= 2x^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.5 จงหาค่า $\int(2t-3)^2dt$

วิธีทำ $\int(2t-3)^2dt = \int(4t^2-12t+9t^2)dt$

$$= \int 4t^2dt-\int 12tdt+\int 9dt$$

$$= 4\int t^2dt-12\int tdt+9\int dt$$

$$= \frac{4t^3}{3}-\frac{12t^2}{2}+9t+C$$

$$= \frac{4t^3}{3}-6t^2+9t+C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.6 จงหาค่า $\int\frac{2x^3-7x^2+4x+3}{x^2}dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int\frac{2x^3-7x^2+4x+3}{x^2}dx &= \int\left(\frac{2x^3}{x^2}-\frac{7x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)dx\\ &= \int\left(2x-7+\frac{4}{x}+3x^{-2}\right)dx\\ &= 2\int xdx-7\int dx+4\int\frac{dx}{x}+3\int x^{-2}dx\\ &= x^2-7x+4\ln|x|+\frac{3x^{-1}}{-1}+C\\ &= x^2-7x+4\ln|x|-\frac{3}{x}+C \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.7 จงหาค่า $\int(2x-3)^9dx$

วิธีทำ ให้ $u=2x-3$ จะได้ $du=2dx$ และ $dx=\frac{du}{2}$ แทนค่าจะได้
$$\begin{aligned}\int(2x-3)^9dx &= \int u^9\frac{du}{2}\\ &= \frac{1}{2}\int u^9du\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{10}}{10}+C\\ &= \frac{u^{10}}{20}+C\\ &= \frac{(2x-3)^{10}}{20}+C \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.8 จงหาค่า $\int\frac{1}{3x-4}dx$

วิธีทำ ให้ $u=3x-4$ จะได้ $du=3dx$ และ $dx=\frac{du}{3}$ แทนค่าจะได้
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{3x-4}dx &= \int\frac{1}{u}\frac{du}{3}\\ &= \frac{1}{3}\int\frac{1}{u}du\\ &= \frac{1}{3}\ln|u|+C\\ &= \frac{1}{3}\ln|3x-4|+C \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

จากตัวอย่าง 1.7 และ 1.8 เป็นการอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร (Integration by substitution) ที่เรามักจะใช้ช่วยในการอินทิเกรตที่มีรูปซับซ้อนให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น ซึ่งมีหลักของการอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปรดังนี้

1. พิจารณาตรวจสอบที่จะเลือกสูตรมาใช้ในการอินทิเกรต
2. เลือก $u = g(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปรในตัวถูกอินทิเกรต
3. หา $\frac{du}{dx} = g'(x)$ และจะได้ $dx = \frac{du}{g'(x)}$
4. แทนค่า $g(x) = u$ และ $dx = \frac{du}{g'(x)}$ ซึ่งในขั้นนี้การอินทิกรัล จะต้องอยู่ในเทอมของ u โดยไม่ให้มีตัวแปร x เหลืออยู่ แต่ถ้ายังมีตัวแปร x เหลืออยู่จะต้องเลือก u ใหม่ หรือสูตรที่เลือกมาใช้ในข้อ 1 นั้นใช้ไม่ได้ ต้องพิจารณาสูตรใหม่
5. คำนวณอินทิกรัลในเทอมของ u
6. ให้เปลี่ยนตัวแปร u ด้วย $g(x)$ ในข้อ 5 ก็จะได้คำตอบสุดท้ายอยู่ในเทอมของ x ตามต้องการ

ตัวอย่าง 1.9 จงหาค่า $\int 2x^2\sqrt{x^3+1}dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^3 + 1$ จะได้ $du = 3x^2dx$ และ $dx = \frac{du}{3x^2}$ แทนค่าจะได้

$$\begin{aligned}\int 2x^2\sqrt{x^3+1}dx &= \int 2x^2\sqrt{u}\frac{du}{3x^2} \\ &= \frac{2}{3}\int \sqrt{u}dU \\ &= \frac{2}{3}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] + C \\ &= \frac{4}{9}u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{4}{9}\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} + C \ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.10 จงหาค่า $\int \sin^4 x \cos x dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sin x$ จะได้ $du = \cos x dx$ และ $dx = \frac{du}{\cos x}$ แทนค่าจะได้

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos x dx &= \int u^4 \cos x \frac{du}{\cos x} \\ &= \int u^4 du \\ &= \frac{u^5}{5} + C \\ &= \frac{\sin^5 x}{5} + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ในการอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปรให้อยู่ในรูปของตัวแปร u นั้นเราสามารถอาศัยดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชัน u ที่เลือกไว้ เขียนแทนลงไปใน du ได้เลย โดยไม่ต้องเขียนตัวแปร u ทุกครั้งไปก็ได้ในการอินทิเกรต

ตัวอย่าง 1.11 จงหาค่า $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-5}} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 + 2x - 5$ จะได้

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-5}} dx &= \int (x+1)\left(x^2+2x-5\right)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int (x+1)\left(x^2+2x-5\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\left(x^2+2x-5\right)}{2x+2} \\ &= \int (x+1)\left(x^2+2x-5\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\left(x^2+2x-5\right)}{2(x+1)} \\ &= \frac{1}{2}\int \left(x^2+2x-5\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(x^2+2x-5\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+2x-5\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= \left(x^2+2x-5\right)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \sqrt{x^2+2x-5} + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.12 จงหาค่า $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$ จะได้

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln^2 x}{x} dx &= \int \frac{\ln^2 x}{x} \cdot \frac{d(\ln x)}{\frac{1}{x}} \\ &= \int \ln^2 x d(\ln x) \\ &= \frac{\ln^3 x}{x} + C \ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.13 จงหาค่า $\int \frac{x-4}{x^2-8x+3} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 - 8x + 3$ จะได้

$$\begin{aligned}\int \frac{x-4}{x^2-8x+3} dx &= \int \frac{x-4}{x^2-8x+3} \cdot \frac{d(x^2-8x+3)}{2x-8} \\ &= \int \frac{x-4}{x^2-8x+3} \cdot \frac{d(x^2-8x+3)}{2(x-4)} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-8x+3)}{x^2-8x+3} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-8x+3| + C \\ &= \ln\sqrt{x^2-8x+3} + C \ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.14 จงหาค่า $\int \frac{dx}{x \ln x}$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$ จะได้

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x \ln x} &= \int \frac{d(\ln x)}{x \ln x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)} \\ &= \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} \\ &= \ln|\ln x| + C \ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.15 จงหาค่า $\int\frac{\cos 3\theta d\theta}{1+\sin 3\theta}$

วิธีทำ ให้ $u=1+\sin 3\theta$ จะได้

$$\int\frac{\cos 3\theta d\theta}{1+\sin 3\theta} = \int\frac{\cos 3\theta\, d(1+\sin 3\theta)}{(1+\sin 3\theta)(3\cos 3\theta)}$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{d(1+\sin 3\theta)}{1+\sin 3\theta}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+\sin 3\theta|+C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.16 จงหาค่า $\int\left(e^{3x}+4\right)^5 e^{3x}dx$

วิธีทำ ให้ $u=e^{3x}+4$ จะได้

$$\int\left(e^{3x}+4\right)^5 e^{3x}dx = \int\left(e^{3x}+4\right)^5 e^{3x}\cdot\frac{d\left(e^{3x}+4\right)}{3e^{3x}}$$

$$= \frac{1}{3}\int\left(e^{3x}+4\right)^5 d\left(e^{3x}+4\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(e^{3x}+4\right)^6}{6}+C$$

$$= \frac{\left(e^{3x}+4\right)^6}{18}+C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.17 จงหาค่า $\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

วิธีทำ ให้ $u=\arctan x$

$$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int\frac{\arctan x\, d(\arctan x)}{\left(1+x^2\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$$

$$= \int\arctan x\, d(\arctan x)$$

$$= \frac{\arctan^2 x}{2}+C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.18 จงหาค่า $\int 5^x\left(5^x-1\right)^5 dx$

วิธีทำ ให้ $u=5^x-1$ จะได้

$$\begin{aligned}\int 5^x\left(5^x-1\right)^5 dx &= \int \frac{5^x\left(5^x-1\right)^5 d\left(5^x-1\right)}{5^x \ln 5} \\ &= \frac{1}{\ln 5}\int \left(5^x-1\right)^5 d\left(5^x-1\right) \\ &= \frac{\left(5^x-1\right)^6}{6\ln 5}+C \ \blacksquare\end{aligned}$$

การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปรให้อยู่ในรูป u นั้น ไม่สามารถใช้ได้กับทุก ๆ ฟังก์ชัน เช่น $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int \sin\left(x^2\right)dx$ ซึ่งไม่สามารถทำได้โดยวิธีดังกล่าวและสำหรับอินทิกรัลใด ๆ ก็ตามที่มีตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปเศษส่วน และทั้งเศษและส่วน เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยที่เศษมีกำลังสูงสุดมากกว่าหรือเท่ากับกำลังสูงสุดของส่วนแล้ว ให้นำส่วนไปหารเศษ จนกระทั่งเศษมีกำลังสูงสุดน้อยกว่าส่วน แล้วจึงนำไปอินทิเกรตทีละเทอมได้

ตัวอย่าง 1.19 จงหาค่า $\int \frac{x^2+2x+6}{x^2+2x+1}dx$

วิธีทำ เนื่องจากกำลังสูงสุดของเศษเท่ากับกำลังสูงสุดของส่วน จึงนำ x^2+2x+1 ไปหาร x^2+2x+6 ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2+2x+1\overline{)\,x^2+2x+6} \\ \underline{x^2+2x+1} \\ 5 \end{array}$$

ดังนั้น $\frac{x^2+2x+6}{x^2+2x+1}=1+\frac{5}{x^2+2x+1}$ จะได้

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x+6}{x^2+2x+1}dx &= \int\left(1+\frac{5}{x^2+2x+1}\right)dx \\ &= \int dx+\int \frac{5}{x^2+2x+1}dx \\ &= \int dx+\int \frac{5}{(x+1)^2}dx \\ &= x+5\int (x+1)^{-2}d(x+1) \quad (\text{ให้ } u=x+1) \\ &= x+\frac{5(x+1)^{-1}}{-1}+C \\ &= x-\frac{5}{x+1}+C \ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.20 จงหาค่า $\int\frac{x^3+2x^2-3}{x+1}dx$

วิธีทำ เนื่องจากกำลังสูงสุดของเศษเท่ากับกำลังสูงสุดของส่วน

จึงนำ $x+1$ ไปหาร x^3+2x^2-3 ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r} x+1\overline{)x^3+2x^2-3}\left(\ x^2+x-1\right. \\ \underline{x^3+x^2} \\ x^2-3 \\ \underline{x^2+x} \\ -x-3 \\ \underline{-x-1} \\ -2 \end{array}$$

ดังนั้น $\frac{x^3+2x^2-3}{x+1}=x^2+x-1-\frac{2}{x+1}$ จะได้

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3+2x^2-3}{x+1}dx &= \int\left(x^2+x-1-\frac{2}{x+1}\right)dx \\ &= \int x^2dx+\int xdx-\int dx-\int\frac{2}{x+1}dx \\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-2\int\frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-2\int\frac{d(x+1)}{x+1} \quad (\text{ให้ } u=x+1) \\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-2\ln|x+1|+C \ \blacksquare\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.1

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int(3x^2+2x-5)dx$
2. $\int\frac{x^4+3x^3-5x}{x^3}dx$
3. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{x}{2}-\sqrt{x}\right)dx$
4. $\int(1-x)\sqrt{x}\,dx$
5. $\int(3t+4)^2dt$
6. $\int\sqrt{2x+3}\,dx$
7. $\int(x^3+2)^6 3x^2dx$
8. $\int\frac{8x^2dx}{(x^3+2)^3}$

ตัวอย่าง

9. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

10. $\int \frac{(x+3)dx}{(x^2+6x)^{1/3}}$

11. $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$

12. $\int \frac{dx}{(a+bx)^{1/3}}$

13. $\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}dx$

14. $\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx$

15. $\int \frac{2\sin x}{\cos^4 x}dx$

16. $\int \frac{x^2 dx}{1-2x^3}$

17. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+9}dx$

18. $\int \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}d\theta$

19. $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}dx$

20. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x+1}dx$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.1

1. x^3+x^2-5x+C

2. $\frac{x^2}{2}+3x+\frac{4}{x}+C$

3. $4\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

4. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

5. $3t^3+12t^2+16t+C$

6. $\frac{1}{3}(2x+3)^{3/2}+C$

7. $\frac{(x^3+2)^7}{7}+C$

8. $-\frac{4}{3(x^3+2)^2}+C$

9. $\frac{4}{9}(x^3+2)^{3/4}+C$

10. $\frac{3}{4}(x^2+6x)^{2/3}+C$

11. $-\frac{1}{2}(1-2x^2)^{3/2}+C$

12. $\frac{3}{2b}(a+bx)^{2/3}+C$

13. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+C$

14. $-\frac{1}{6}(1-2x^2)^{3/2}+C$

15. $\frac{2}{3}\sec^3 x+C$

16. $-\frac{1}{6}\ln|1-2x^3|+C$

17. $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+9|+C$

18. $-\frac{1}{2}\ln|1+\cos 2\theta|+C$

19. $x+\frac{1}{x+1}+C$

20. $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+3x+\ln|x+1|+C$

ตัวอย่าง

2. การอินทิเกรตฟังก์ชันอดุิศัย

2.1 การอินทิเกรตฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (Integration of Exponential Functions) มีสูตรดังนี้

1. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \ , \ a > 0, a \neq 1$
2. $\int e^u du = e^u + C$

ตัวอย่าง 1.21 จงหาค่า $\int 2^{3x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x$ จะได้

$$\begin{aligned}\int 2^{3x} dx &= \int 2^{3x} \frac{d(3x)}{3} \\ &= \frac{1}{3}\int 2^{3x} d(3x) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2^{3x}}{\ln 2}\right) + C \\ &= \frac{2^{3x}}{3\ln 2} + C \ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.22 จงหาค่า $\int x \cdot 5^{x^2+3} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 + 3$ จะได้

$$\begin{aligned}\int x \cdot 5^{x^2+3} dx &= \int x \cdot 5^{x^2+3} \frac{d(x^2+3)}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\int 5^{x^2+3} d(x^2+3) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{5^{x^2+3}}{\ln 5}\right) + C \\ &= \frac{5^{x^2+3}}{2\ln 5} + C \ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.23 จงหาค่า $\int x e^{x^2-3} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 - 3$ จะได้

$$\begin{aligned}\int x e^{x^2-3} dx &= \int x e^{x^2-3} \frac{d(x^2-3)}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\int e^{x^2-3} d(x^2-3) \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2-3} + C \ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.24 จงหาค่า $\int e^{\sin 5x}\cos 5x dx$

วิธีทำ ให้ $u=\sin 5x$ จะได้

$$\begin{aligned}\int e^{\sin 5x}\cos 5x dx &= \int e^{\sin 5x}\cos 5x\frac{d(\sin 5x)}{5\cos 5x}\\ &= \frac{1}{5}\int e^{\sin 5x}d(\sin 5x)\\ &= \frac{1}{5}e^{\sin 5x}+C\ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.25 จงหาค่า $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

วิธีทำ ให้ $u=\frac{1}{x}$ จะได้

$$\begin{aligned}\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx &= \int\frac{e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)}\\ &= -\int e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= -e^{\frac{1}{x}}+C\ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.26 จงหาค่า $\int\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)^2dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)^2dx &= \int\left(e^{2x}-2+\frac{1}{e^{2x}}\right)dx\\ &= \int e^{2x}dx-\int 2dx+\int\frac{1}{e^{2x}}dx\\ &= \int e^{2x}dx-2\int dx+\int e^{-2x}dx\\ &= \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x)-2\int dx-\frac{1}{2}\int e^{-2x}d(-2x)\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}-2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}-2x-\frac{1}{2e^{2x}}+C\ \blacksquare\end{aligned}$$

cbadu

สำหรับการอินทิเกรตฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล บางกรณีไม่สามารถทำได้โดยวิธีดังกล่าว แต่อาจจะสามารถทำได้โดยใช้การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

ตัวอย่าง 1.27 จงหาค่า $\int \frac{e^x dx}{(e^x-2)^5}$

วิธีทำ ให้ $u = e^x - 2$ จะได้

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x dx}{(e^x-2)^5} &= \int e^x (e^x-2)^{-5} dx \\ &= \int e^x (e^x-2)^{-5} \frac{d(e^x-2)}{e^x} \\ &= \int (e^x-2)^{-5} d(e^x-2) \\ &= \frac{(e^x-2)^{-4}}{-4} + C \\ &= -\frac{1}{4(e^x-2)^4} + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.28 จงหาค่า $\int \frac{dx}{e^x+1}$

วิธีทำ เปลี่ยนรูปตัวถูกอินทิเกรตโดยการหารก่อนดังนี้

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1+e^x \overline{)\,1} \\ \underline{1+e^x} \\ -e^x \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} 1 \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

ดังนั้น $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$ จะได้

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{e^x+1} &= \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx \\ &= \int dx - \int \frac{e^x}{e^x+1} dx \\ &= x - \int \frac{e^x d(e^x+1)}{(e^x+1)e^x} \\ &= x - \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} \\ &= x - \ln|e^x+1| + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.29 จงหาค่า $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$

วิธีทำ เปลี่ยนรูปตัวถูกอินทิเกรตโดยการหารก่อนดังนี้

$$1 + e^x \overline{)-1 + e^x} \quad (-1$$
$$\underline{-1 - e^x}$$
$$\underline{\underline{2e^x}}$$

ดังนั้น $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1 + \frac{2e^x}{e^x + 1}$ จะได้

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx &= \int \left(-1 + \frac{2e^x}{e^x + 1} \right) dx \\
&= -\int dx + \int \frac{2e^x}{e^x + 1} dx \\
&= -\int dx + 2\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx \\
&= -x + 2\int \frac{e^x d\left(e^x + 1\right)}{\left(e^x + 1\right)e^x} \\
&= -x + 2\int \frac{d\left(e^x + 1\right)}{e^x + 1} \\
&= -x + 2\ln\left|e^x + 1\right| + C \\
&= -x + \ln\left(e^x + 1\right)^2 + C \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.2

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int 3^{4x} dx$
2. $\int x^2 e^{x^3} dx$
3. $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$
4. $\int \left(e^x + 1\right)^2 dx$
5. $\int x e^{x^{2+5}} dx$
6. $\int \left(x^e - e^x\right) dx$
7. $\int \frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}} dx$
8. $\int 2^{e^x} e^x dx$
9. $\int \frac{e^{3x} - 1}{e^x} dx$
10. $\int 7^{\sin x} \cos x dx$

11. $\int \sec^2 5x \cdot e^{\tan 5x}\,dx$

12. $\int \frac{\cos x \cdot e^{\cos ecx}}{\sin^2 x}\,dx$

13. $\int \sec^2 x \tan x \cdot e^{\tan^2 x}\,dx$

14. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx$

15. $\int (e^x+5)^8 e^x\,dx$

16. $\int e^{2x} \cdot 9^{2x}\,dx$

17. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3}\,dx$

18. $\int \frac{e^{\arctan 2\theta}}{1+4\theta^2}\,d\theta$

19. $\int (\cos 2\theta) e^{\sin\theta\cos\theta}\,d\theta$

20. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.2

1. $\frac{3^{4x}}{4\ln 3}+C$

2. $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$

3. $-\frac{1}{2}e^{1/x^2}+C$

4. $\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x+C$

5. $\frac{1}{2}e^{x^{2+5}}+C$

6. $\frac{x^{e+1}}{e+1}-e^x+C$

7. $e^{\sqrt{2x+1}}+C$

8. $\frac{2e^x}{\ln 2}+C$

9. $\frac{1}{2}e^{2x}+e^{-x}+C$

10. $\frac{7^{\sin x}}{\ln 7}+C$

11. $\frac{1}{5}e^{\tan 5x}+C$

12. $-e^{\cos ecx}+C$

13. $\frac{1}{2}e^{\tan^2 x}+C$

14. $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3)+C$

15. $\frac{1}{9}(e^x+5)^9+C$

16. $\frac{(9e)^{2x}}{2\ln(9e)}+C$

17. $\ln(e^{2x}+3)^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}x+C$

18. $\frac{1}{2}e^{\arctan 2\theta}+C$

19. $e^{\sin\theta\cos\theta}+C$

20. $\ln(e^x+e^{-x})+C$

2.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Integration of Trigonometric Functions)

มีสูตรดังนี้

1. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
2. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
3. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$
4. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$
5. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
6. $\int \cos ec\, u\,du = \ln|\cos ec\, u - \cot u| + C$
7. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
8. $\int \cos ec^2 u\,du = -\cot u + C$
9. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
10. $\int \cos ec\, u \cot u\,du = -\cos ec\, u + C$

ตัวอย่าง 1.30 จงหาค่าของ $\int \sin(5x+2)dx$

วิธีทำ ให้ $u = 5x+2$ จะได้

$$\int \sin(5x+2)dx = \int \sin(5x+2)\frac{d(5x+2)}{5}$$
$$= \frac{1}{5}\int \sin(5x+2)d(5x+2)$$
$$= \frac{1}{5}\cos(5x+2) + C \ \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.31 จงหาค่าของ $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sqrt{x}$ จะได้

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\cos\sqrt{x}\,d(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}$$
$$= 2\int \cos\sqrt{x}\,d(\sqrt{x})$$
$$= 2\sin\sqrt{x} + C \ \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.32 จงหาค่าของ $\int e^{3x}\tan\left(e^{3x}\right)dx$

วิธีทำ ให้ $u = e^{3x}$ จะได้

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\tan\left(e^{3x}\right)dx &= \int e^{3x}\tan\left(e^{3x}\right)\frac{d\left(e^{3x}\right)}{3e^{3x}}\\ &= \frac{1}{3}\int\tan\left(e^{3x}\right)d\left(e^{3x}\right)\\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\sec e^{3x}\right| + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

สำหรับการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ บางกรณีไม่สามารถใช้สูตรอินทิเกรตที่มีอยู่ได้นั้น จะต้องนำความรู้ทางพีชคณิตและสูตรตรีโกณมิติ มาเปลี่ยนตัวถูกอินทิเกรต เพื่อเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสูตรอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ หรือบางกรณี สามารถทำได้โดยใช้การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

ตัวอย่าง 1.33 จงหาค่าของ $\int\frac{\sin x - \cos x}{\sin x}dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x - \cos x}{\sin x}dx &= \int\left(\frac{\sin x}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)dx\\ &= \int(1 - \cot x)dx \quad \left(\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}\right)\\ &= \int dx - \int\cot x\,dx\\ &= x - \ln|\sin x| + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.34 จงหาค่าของ $\int\frac{\cos ec^2(\sin\theta)d\theta}{\sec\theta}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int\frac{\cos ec^2(\sin\theta)d\theta}{\sec\theta} &= \int\cos\theta\cos ec^2(\sin\theta)d\theta \quad \left(\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}\right)\\ &= \int\cos\theta\cos ec^2(\sin\theta)\frac{d(\sin\theta)}{\cos\theta}\\ &= \int\cos ec^2(\sin\theta)d(\sin\theta)\\ &= -\cot(\sin\theta) + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.35 จงหาค่าของ $\int\frac{\sin^2 3x}{1+\cos 3x}dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int\frac{\sin^2 3x}{1+\cos 3x}dx &= \int\frac{1-\cos^2 3x}{1+\cos 3x}dx \quad \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right)\\ &= \int\frac{(1+\cos 3x)(1-\cos 3x)}{1+\cos 3x}dx\\ &= \int(1-\cos 3x)dx\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

$$= \int dx - \int \cos 3x dx$$

$$= x - \frac{1}{3}\int \cos 3x d(3x)$$

$$= x - \frac{1}{3}\sin 3x + C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.36 จงหาค่าของ $\int \frac{2-\cos 2x}{\sin^2 2x} dx$

วิธีทำ

$$\int \frac{2-\cos 2x}{\sin^2 2x} dx = \int \left(\frac{2}{\sin^2 2x} - \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} \right) dx$$

$$= \int \left(2\cos ec^2 2x - \frac{1}{\sin 2x} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \right) dx$$

$$= \int (2\cos ec^2 2x - \cos ec 2x \cot 2x) dx$$

$$= 2\int \cos ec^2 2x dx - \int \cos ec 2x \cot 2x dx$$

$$= \int \cos ec^2 2x d(2x) - \frac{1}{2}\int \cos ec 2x \cot 2x d(2x)$$

$$= -\cot 2x + \frac{1}{2}\cos ec 2x + C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.37 จงหาค่าของ $\int \sqrt{\sin\theta}\cos\theta d\theta$

วิธีทำ ให้ $u = \sin\theta$ จะได้

$$\int \sqrt{\sin\theta}\cos\theta d\theta = \int \sin^{\frac{1}{2}}\theta \cos\theta \frac{d(\sin\theta)}{\cos\theta}$$

$$= \int \sin^{\frac{1}{2}}\theta d(\sin\theta)$$

$$= \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}\theta d\theta + C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.38 จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{1-\sin x}$

วิธีทำ

$$\int \frac{dx}{1-\sin x} = \int \frac{1}{1-\sin x} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x} dx$$

$$= \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$$

ตัวอย่าง

$$= \int\left(\sec^2 x + \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$
$$= \int\left(\sec^2 x + \sec x \tan x\right)dx$$
$$= \int\sec^2 x dx + \int\sec x \tan x dx$$
$$= \tan x + \sec x + C \ \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.39 จงหาค่าของ $\int\frac{\sec^2 2x}{1+\tan 2x}dx$

วิธีทำ ให้ $u = 1+\tan 2x$ จะได้

$$\int\frac{\sec^2 2x}{1+\tan 2x}dx = \int\frac{\sec^2 2x d(1+\tan 2x)}{(1+\tan 2x)(2\sec^2 2x)}$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(1+\tan 2x)}{1+\tan 2x}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|1+\tan 2x| + C$$
$$= \ln\sqrt{1+\tan 2x} + C \ \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.40 จงหาค่าของ $\int\frac{\sqrt{4+\cos x}dx}{\cos ecx}$

วิธีทำ $\int\frac{\sqrt{4+\cos x}dx}{\cos ecx} = \int\sin x(4+\cos x)^{\frac{1}{2}}dx$

$$= \int\sin x(4+\cos x)^{\frac{1}{2}}\frac{d(4+\cos x)}{-\sin x}$$
$$= -\int(4+\cos x)^{\frac{1}{2}}d(4+\cos x)$$
$$= -\frac{2}{3}(4+\cos x)^{\frac{3}{2}} + C \ \blacksquare$$

แบบฝึกหัด 1.3

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int x\cos x^2 dx$
2. $\int\cot\frac{\theta}{2}d\theta$
3. $\int\frac{\sin\left(\frac{5}{x}\right)}{x^2}dx$
4. $\int\frac{\sec\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
5. $\int x^2\sec^2\left(x^3\right)dx$
6. $\int\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$

ตัวอย่าง

7. $\int \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta} d\theta$

8. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

9. $\int \frac{dx}{1-\sin\frac{1}{2}x}$

10. $\int \frac{dx}{1-\cos 3x}$

11. $\int \frac{dx}{1+\sec 2x}$

12. $\int \frac{\sin\theta d\theta}{2-\cos\theta}$

13. $\int (\sec^2(\cos 3\theta))\sin 3\theta d\theta$

14. $\int \sin^5 3t \cos 3t dt$

15. $\int \sec^3 2x \tan 2x dx$

16. $\int \cos 2\theta\sqrt{4-\sin 2\theta} d\theta$

17. $\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{1+2\tan\theta}}$

18. $\int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^6 x}$

19. $\int \frac{dx}{\cos ec2x - \cot 2x}$

20. $\int (\sec 4x - 1)^2 dx$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.3

1. $\frac{1}{2}\sin x^2 + C$

2. $2\ln\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| + C$

3. $\frac{1}{5}\cos\left(\frac{5}{x}\right) + C$

4. $2\ln\left|\sec\sqrt{x} + \tan\sqrt{x}\right| + C$

5. $\frac{1}{3}\tan x^3 + C$

6. $\sec\theta + C$

7. $\ln\left|\sec\theta\right| + \theta + C$

8. $-\cot x + \cos ecx + C$

9. $2\left(\tan\frac{1}{2}x + \sec\frac{1}{2}x\right) + C$

10. $-\frac{1}{3}(\cot 3x + \cos ec3x) + C$

11. $x + \frac{1}{2}(\cot 2x - \cos ec2x) + C$

12. $\ln\left|2-\cos\theta\right| + C$

13. $-\frac{1}{3}\tan(\cos 3\theta) + C$

14. $\frac{1}{18}\sin^6 3t + C$

15. $\frac{1}{6}\sec^3 2x + C$

16. $-\frac{1}{3}(4-\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} + C$

17. $\sqrt{1+2\tan\theta} + C$

18. $-\frac{1}{5}\cot^5 x + C$

19. $\frac{1}{2}\ln\left|1-\cos 2x\right| + C$

20. $\frac{1}{4}\tan 4x - \frac{1}{2}\ln(\sec 4x + \tan 4x) + C$

2.3 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ยกกำลังเป็นจำนวนเต็มบวก (Integration Positive Integer power of Trigonometric Functions)

ในการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากข้อ 2.2 นั้น เราสามารถใช้สูตรการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ หรือบางกรณีอาจจะต้องมีการเปลี่ยนรูปตัวถูกอินทิเกรต เพื่อให้อยู่ในรูปของการใช้สูตรการอินทิเกรตได้ สำหรับกรณีที่ตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ยกกำลังเป็นจำนวนเต็มบวก และตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ยกกำลังเป็นจำนวนเต็มบวก สามารถพิจารณาในรูปอินทิกรัลต่างๆ ได้ดังนี้

2.3.1 อินทิกรัลในรูป $\int \sin^m x\,dx$ และ $\int \cos^n x\,dx$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะสามารถหาอินทิกรัลได้ดังนี้

$\int \sin^m x\,dx$ และ $\int \cos^n x\,dx$	วิธีการ	เอกลักษณ์ที่ใช้
1. m เป็นจำนวนคี่	จัดรูป $\sin^m x = \sin^{m-1} x \cdot \sin x$ และใช้ $u = \cos x$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
2. n เป็นจำนวนคี่	จัดรูป $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cdot \cos x$ และใช้ $u = \sin x$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
3. m เป็นจำนวนคู่	ใช้เอกลักษณ์ที่ลดกำลังลง	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
4. n เป็นจำนวนคู่	ใช้เอกลักษณ์ที่ลดกำลังลง	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

ตัวอย่าง 1.41 จงหาค่าของ $\int \sin^3 x\,dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x\,dx &= \int \sin^2 x \sin x\,dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)\sin x\,dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)\sin x \frac{d(\cos x)}{-\sin x} \quad (\text{ใช้ } u = \cos x) \\
&= -\int (1 - \cos^2 x)\,d(\cos x) \\
&= -\int d(\cos x) + \int \cos^2 x\,d(\cos x) \\
&= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.42 จงหาค่าของ $\int \cos^5 x dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cos x dx \\ &= \int \cos^4 x \cos x \frac{d(\sin x)}{\cos x} \quad (\text{ใช้ } u = \sin x) \\ &= \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x) d(\sin x) \\ &= \int d(\sin x) - 2\int \sin^2 x d(\sin x) + \int \sin^4 x d(\sin x) \\ &= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C \ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.43 จงหาค่าของ $\int \sin^2 x dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x) dx \\ &= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C \ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.44 จงหาค่าของ $\int \cos^2 5x dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int \cos^2 5x dx &= \int \frac{1}{2}(1+\cos 10x) dx \\ &= \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{1}{2}\cos 10x dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{20}\int \cos 10x d(10x) \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}\sin 10x + C \ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.45 จงหาค่าของ $\int \cos^4 x dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 dx \\ &= \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 dx \\ &= \int \left(\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\right) dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) dx\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$$
$$= \frac{3}{8}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x dx+\frac{1}{8}\int\cos 4x dx$$
$$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\int\cos 2x d(2x)+\frac{1}{32}\int\cos 4x d(4x)$$
$$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C \quad \blacksquare$$

2.3.2 อินทิกรัลในรูป $\int\sin^m x\cos^n x dx$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะสามารถหาอินทิกรัลได้ดังนี้

$\int\sin^m x\cos^n x dx$	วิธีการ	เอกลักษณ์ที่ใช้
1. n เป็นจำนวนคี่	จัดรูป $\cos^n x=\cos^{n-1}x\cos x$ ใช้ $u=\sin x$	$\cos^2 x=1-\sin^2 x$
2. m เป็นจำนวนคี่	จัดรูป $\sin^m x=\sin^{m-1}x\cdot\sin x$ และใช้ $u=\cos x$	$\sin^2 x=1-\cos^2 x$
3. m และ n เป็นจำนวนคู่	ใช้เอกลักษณ์ที่ลดกำลังของ $\sin x$ และ $\cos x$	$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

ตัวอย่าง 1.46 จงหาค่าของ $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $n=5$ เป็นจำนวนคี่ ใช้ $u=\sin x$ จะได้

$$\int\sin^4 x\cos^5 x dx = \int\sin^4 x\cos^4 x\cos x dx$$
$$= \int\sin^4 x\cos^4 x\cos x\frac{d(\sin x)}{\cos x}$$
$$= \int\sin^4 x(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$$
$$= \int\sin^4 x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)d(\sin x)$$
$$= \int(\sin^4 x-2\sin^6 x+\sin^8 x)d(\sin x)$$
$$= \int\sin^4 x d(\sin x)-2\int\sin^6 x d(\sin x)+\int\sin^8 x d(\sin x)$$
$$= \frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.47 จงหาค่าของ $\int\sin^3 x\cos^2 x dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $m=3$ เป็นจำนวนคี่ ใช้ $u=\cos x$ จะได้

$$\int\sin^3 x\cos^2 x dx = \int\sin^2 x\cos^2 x\sin x dx$$

ตัวอย่าง

$$
\begin{aligned}
&= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \frac{d(\cos x)}{-\sin x} \\
&= -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x d(\cos x) \\
&= -\int (\cos^2 x - \cos^4 x) d(\cos x) \\
&= -\int \cos^2 x d(\cos x) + \int \cos^4 x d(\cos x) \\
&= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 1.48 จงหาค่าของ $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

วิธีทำ เนื่องจาก m และ n เป็นจำนวนคู่ใช้ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x) dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) dx \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\int \cos 4x d(4x) \\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 1.49 จงหาค่าของ $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $m = 3, n = 5$ เป็นจำนวนคี่ทั้งคู่ จะใช้แทน $u = \cos x$ หรือ $u = \sin x$ ในที่นี้ใช้ $u = \cos x$ (ทำให้ง่ายเพราะแทนค่าฟังก์ชันที่ยกกำลังน้อยกว่า) จะได้

$$
\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^5 x dx &= \int \sin^2 x \cos^5 x \sin x dx \\
&= \int \sin^2 x \cos^5 x \sin x \frac{d(\cos x)}{-\sin x} \\
&= -\int (1-\cos^2 x)\cos^5 x d(\cos x) \\
&= -\int (\cos^5 x - \cos^7 x) d(\cos x) \\
&= -\int \cos^5 x d(\cos x) + \int \cos^7 x d(\cos x) \\
&= -\frac{1}{6}\cos^6 x + \frac{1}{8}\cos^8 x + C \ \#
\end{aligned}
$$

2.3.3 อินทิกรัลในรูป $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$ และ $\int \cos mx \cos nx dx$

อินทิกรัลของผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์ และโคไซน์จะสามารถหาค่าอินทิกรัลได้ โดยการเปลี่ยนรูปผลคูณให้เป็นผลบวกหรือผลต่างโดยใช้สูตรดังนี้

ผลคูณของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์	สูตร
1. $\sin A \cos B$	$\frac{1}{2}(\sin(A-B)+\sin(A+B))$
2. $\sin A \sin B$	$\frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))$
3. $\cos A \cos B$	$\frac{1}{2}(\cos(A-B)+\cos(A+B))$

ตัวอย่าง 1.50 จงหาค่าของ $\int \sin 7x \cos 5x dx$

วิธีทำ จาก $\sin 7x \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 12x)$ จะได้

$$\begin{aligned}\int \sin 7x \cos 5x dx &= \int \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 12x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int \sin 2x dx + \frac{1}{2}\int \sin 12x dx \\ &= \frac{1}{4}\int \sin 2x d(2x) + \frac{1}{24}\int \sin 12x d(12x) \\ &= -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{24}\cos 12x + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.51 จงหาค่าของ $\int \sin 5x \sin 2x dx$

วิธีทำ จาก $\sin 5x \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 7x)$ จะได้

$$\begin{aligned}\int \sin 5x \sin 2x dx &= \int \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 7x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int \cos 3x dx - \frac{1}{2}\int \cos 7x dx \\ &= \frac{1}{6}\int \cos 3x d(3x) - \frac{1}{14}\int \cos 7x d(7x) \\ &= \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.52 จงหาค่าของ $\int \cos 5\theta \cos \theta d\theta$

วิธีทำ จาก $\cos 5\theta \cos \theta = \frac{1}{2}(\cos 4\theta + \cos 6\theta)$ จะได้

$$\begin{aligned}\int \cos 5\theta \cos \theta d\theta &= \int \frac{1}{2}(\cos 4\theta + \cos 6\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int \cos 4\theta d\theta + \frac{1}{2}\int \cos 6\theta d\theta \\ &= \frac{1}{8}\int \cos 4\theta d(4\theta) + \frac{1}{12}\int \cos 6\theta d(6\theta) \\ &= \frac{1}{8}\sin 4\theta + \frac{1}{12}\sin 6\theta + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

2.3.4 อินทิกรัลในรูป $\int \tan^m x dx$ และ $\int \cot^n x dx$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะสามารถหาอินทิกรัลได้ดังนี้

$\int \tan^m x dx$ และ $\int \cot^n x dx$	วิธีการ	เอกลักษณ์ที่ใช้
1. m เป็นจำนวนคู่หรือคี่ $(m \geq 2)$	จัดรูป $\tan^m x = \tan^{m-2} x \tan^2 x$ ใช้ $u = \tan x$	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
2. n เป็นจำนวนคู่หรือคี่ $(n \geq 2)$	จัดรูป $\cot^n x = \cot^{n-2} x \cot^2 x$ ใช้ $u = \cot x$	$\cot^2 x = \cos ec^2 x - 1$

ตัวอย่าง 1.53 จงหาค่าของ $\int \tan^3 x dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x dx &= \int \tan^2 x \tan x dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)\tan x dx \\ &= \int \sec^2 x \tan x dx - \int \tan x dx \\ &= \int \sec^2 x \tan x \frac{d(\tan x)}{\sec^2 x} - \int \tan x dx \\ &= \int \tan x d(\tan x) - \int \tan x dx \\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\sec x| + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.54 จงหาค่าของ $\int \tan^4 2x dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int \tan^4 2x dx &= \int \tan^2 2x \tan^2 2x dx \\ &= \int (\sec^2 2x - 1)\tan^2 2x dx \\ &= \int \sec^2 2x \tan^2 2x dx - \int \tan^2 2x dx \\ &= \int \sec^2 2x \tan^2 2x \frac{d(\tan 2x)}{2\sec^2 2x} - \int (\sec^2 2x - 1)dx \\ &= \frac{1}{2}\int \tan^2 2x d(\tan 2x) - \int \sec^2 2x dx + \int dx \\ &= \frac{1}{6}\tan^3 2x - \frac{1}{2}\int \sec^2 2x d(2x) + \int dx \\ &= \frac{1}{6}\tan^3 2x - \frac{1}{2}\tan 2x + x + C \ \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.55 จงหาค่าของ $\int \cot^3 3x dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int \cot^3 3x dx &= \int \cot^2 3x \cot 3x dx \\ &= \int (\cos ec^2 3x - 1)\cot 3x dx \\ &= \int \cos ec^2 3x \cot 3x dx - \int \cot 3x dx \\ &= \int \cos ec^2 3x \cot 3x \frac{d(\cot 3x)}{-3\cos ec^2 3x} - \frac{1}{3}\int \cot 3x d(3x) \\ &= -\frac{1}{3}\int \cot 3x d(\cot 3x) - \frac{1}{3}\int \cot 3x d(3x) \\ &= -\frac{1}{6}\cot^2 3x - \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + C \ \blacksquare\end{aligned}$$

2.3.5 อินทิกรัลในรูป $\int \sec^m x dx$ และ $\int \cos ec^n x dx$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะสามารถหาอินทิกรัลได้ดังนี้

$\int \sec^m x dx$ และ $\int \cos ec^n x dx$	วิธีการ	เอกลักษณ์ที่ใช้
1. m เป็นจำนวนคู่	จัดรูป $\sec^m x = \sec^{m-2} x \sec^2 x$ ใช้ $u = \tan x$	$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
2. n เป็นจำนวนคู่	จัดรูป $\cos ec^n x = \cos ec^{n-2} x \cos ec^2 x$ ใช้ $u = \cot x$	$\cos ec^2 x = 1 + \cot^2 x$
3. m, n เป็นจำนวนคี่	ใช้เทคนิคของการอินทิเกรตทีละส่วน	-

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.56 จงหาค่าของ $\int \sec^4 \theta d\theta$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int \sec^4 \theta d\theta &= \int \sec^2 \theta \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int (1+\tan^2 \theta)\sec^2 \theta d\theta \\ &= \int \sec^2 \theta d\theta + \int \tan^2 \theta \sec^2 \theta d\theta \\ &= \tan\theta + \int \tan^2 \theta \sec^2 \theta \frac{d(\tan\theta)}{\sec^2 \theta} \\ &= \tan\theta + \int \tan^2 \theta d(\tan\theta) \\ &= \tan\theta + \frac{1}{3}\tan^3 \theta + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.57 จงหาค่าของ $\int \cos ec^6 x dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int \cos ec^6 x dx &= \int \cos ec^4 x \cos ec^2 x dx \\ &= \int (1+\cot^2 x)^2 \cos ec^2 x \frac{d(\cot x)}{-\cos ec^2 x} \\ &= -\int (1+2\cot^2 x + \cot^4 x) d(\cot x) \\ &= -\int d(\cot x) - 2\int \cot^2 x d(\cot x) - \int \cot^4 x d(\cot x) \\ &= -\cot x - \frac{2}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

2.3.6 อินทิกรัลในรูป $\int \tan^m x \sec^n x dx$ และ $\int \cot^m x \cos ec^n x dx$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะสามารถหาอินทิกรัลได้ดังนี้

$\int \tan^m x \sec^n x dx$	วิธีการ	เอกลักษณ์ที่ใช้
1. n เป็นจำนวนคู่	จัดรูป $\sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x$ ใช้ $u = \tan x$	$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
2. m เป็นจำนวนคี่	จัดรูป $\tan^m x = \tan^{m-1} x \tan x$ และ $\sec^n x = \sec^{n-1} x \sec x$ ใช้ $u = \sec x$	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
3. m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคี่	ทำให้อยู่ในรูปกำลังต่าง ๆของ $\sec x$ และใช้เทคนิคของการอินทิเกรตทีละส่วน	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

cbeju

$\int \cot^m x \cos ec^n x dx$	วิธีการ	เอกลักษณ์ที่ใช้
1. n เป็นจำนวนคู่	จัดรูป $\cos ec^n x = \cos ec^{n-2} x \cos ec^2 x$ ใช้ $u = \cot x$	$\cos ec^2 x = 1 + \cot^2 x$
2. m เป็นจำนวนคี่	จัดรูป $\cot^m x = \cot^{m-1} x \cot x$ และ $\cos ec^n x = \cos ec^{n-1} x \cos ecx$ ใช้ $u = \cos ecx$	$\cot^2 x = \cos ec^2 x - 1$
3. m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคี่	ทำให้อยู่ในรูปกำลังต่าง ๆของ $\cos ecx$ และใช้ เทคนิคของการอินทิเกรตทีละส่วน	$\cot^2 x = \cos ec^2 x - 1$

ตัวอย่าง 1.58 จงหาค่าของ $\int \tan^6 x \sec^4 x dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $n = 4$ เป็นจำนวนคู่ ใช้ $u = \tan x$ จะได้

$$\begin{aligned}
\int \tan^6 x \sec^4 x dx &= \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x dx \\
&= \int \tan^6 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \frac{d(\tan x)}{\sec^2 x} \\
&= \int (\tan^6 x + \tan^8 x) d(\tan x) \\
&= \int \tan^6 x d(\tan x) + \int \tan^8 x d(\tan x) \\
&= \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x + C \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.59 จงหาค่าของ $\int \tan^3 x \sec^5 x dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $m = 3$ เป็นจำนวนคี่ ใช้ $u = \sec x$ จะได้

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^5 x dx &= \int (\tan^2 x \tan x)(\sec^4 x \sec x) dx \\
&= \int (\tan^2 x \sec^4 x)(\sec x \tan x) dx \\
&= \int (\tan^2 x \sec^4 x)(\sec x \tan x) \frac{d(\sec x)}{\sec x \tan x} \\
&= \int (\sec^2 x - 1)(\sec^4 x) d(\sec x) \\
&= \int (\sec^6 x - \sec^4 x) d(\sec x) \\
&= \int \sec^6 x d(\sec x) - \int \sec^4 x d(\sec x) \\
&= \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{1}{5} \sec^5 x + C \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.60 จงหาค่าของ $\int \cot^2 x \cos ec^4 x dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $n = 4$ เป็นจำนวนคู่ ใช้ $u = \cot x$ จะได้

$$\begin{aligned}\int \cot^2 x \cos ec^4 x dx &= \int \cot^2 x \cos ec^2 x \cos ec^2 x dx \\ &= \int \cot^2 x(1+\cot^2 x)\cos ec^2 x \frac{d(\cot x)}{-\cos ec^2 x} \\ &= -\int(\cot^2 x + \cot^4 x)d(\cot x) \\ &= -\int \cot^2 x d(\cot x) - \int \cot^4 x d(\cot x) \\ &= -\frac{1}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + C \quad \#\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.61 จงหาค่าของ $\int \cot^3 \theta \cos ec^3 \theta d\theta$

วิธีทำ เนื่องจาก $m = 3$ เป็นจำนวนคี่ ใช้ $u = \cos ec\theta$ จะได้

$$\begin{aligned}\int \cot^3 \theta \cos ec^3 \theta d\theta &= \int(\cot^2 \theta \cot\theta)(\cos ec^2 \theta \cos ec\theta)d\theta \\ &= \int(\cot^2 \theta \cos ec^2 \theta)(\cos ec\theta \cot\theta)d\theta \\ &= \int(\cot^2 \theta \cos ec^2 \theta)(\cos ec\theta \cot\theta)\frac{d(\cos ec\theta)}{-\cos ec\theta \cot\theta} \\ &= -\int(\cos ec^2 \theta - 1)(\cos ec^2 \theta)d(\cos ec\theta) \\ &= -\int(\cos ec^4 \theta - \cos ec^2 \theta)d(\cos ec\theta) \\ &= -\int \cos ec^4 \theta d(\cos ec\theta) + \int \cos ec^2 \theta d(\cos ec\theta) \\ &= -\frac{1}{5}\cos ec^5 \theta + \frac{1}{3}\cos ec^3 \theta + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.62 จงหาค่าของ $\int \cot^3 x \cos ec^4 x dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $m = 3$ เป็นจำนวนคี่ ใช้ $u = \cos ecx$ จะได้

$$\begin{aligned}\int \cot^3 x \cos ec^4 x dx &= \int(\cot^2 x \cot x)(\cos ec^3 x \cos ecx)dx \\ &= \int(\cot^2 x \cos ec^3 x)(\cos ecx \cot x)dx \\ &= \int(\cot^2 x \cos ec^3 x)(\cos ecx \cot x)\frac{d(\cos ecx)}{-\cos ecx \cot x} \\ &= -\int(\cos ec^2 x - 1)(\cos ec^3 x)d(\cos ecx) \\ &= -\int(\cos ec^5 x - \cos ec^3 x)d(\cos ecx) \\ &= -\int \cos ec^5 x d(\cos ecx) + \int \cos ec^3 x d(\cos ecx) \\ &= -\frac{1}{6}\cos ec^6 x + \frac{1}{4}\cos ec^4 x + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

หมายเหตุ $\int \cot^3 x \operatorname{cosec}^4 x\,dx$ อาจใช้ในกรณี เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ได้

โดยใช้ $u = \cot x$ จะได้

$$\begin{aligned}
\int \cot^3 x \operatorname{cosec}^4 x\,dx &= \int \cot^3 x\left(\operatorname{cosec}^2 x \operatorname{cosec}^2 x\right)dx \\
&= \int \cot^3 x\left(\operatorname{cosec}^2 x \operatorname{cosec}^2 x\right)\frac{d(\cot x)}{-\operatorname{cosec}^2 x} \\
&= -\int \cot^3 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x\,d(\cot x) \\
&= -\int \cot^3 x\left(1+\cot^2 x\right)d(\cot x) \\
&= -\int \left(\cot^3 x + \cot^5 x\right)d(\cot x) \\
&= -\int \cot^3 x\,d(\cot x) - \int \cot^5 x\,d(\cot x) \\
&= -\frac{1}{4}\cot^4 x - \frac{1}{6}\cot^6 x + C \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.4

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \sin^5 x\,dx$
2. $\int \cos^4 \frac{x}{2}\,dx$
3. $\int \cos^6 \frac{x}{2}\,dx$
4. $\int \sin^7 \theta\,d\theta$
5. $\int \sin^2 5\theta\,d\theta$
6. $\int \cos^5 \theta\,d\theta$
7. $\int \sin^2 2x \cos^3 2x\,dx$
8. $\int \sin^5 x \cos^4 x\,dx$
9. $\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx$
10. $\int \sin^3 3x \cos^5 3x\,dx$
11. $\int \sin^4 3x \cos^2 3x\,dx$
12. $\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx$
13. $\int \cos^{\frac{1}{5}} x \sin x\,dx$
14. $\int \frac{\sin x}{\cos^8 x}\,dx$
15. $\int \sqrt{\cos\theta}\sin\theta\,d\theta$
16. $\int \sin 2x \cos 4x\,dx$
17. $\int \sin 5x \sin x\,dx$
18. $\int \cos 3x \cos 2x\,dx$

ตัวอย่าง

19. $\int \sin x \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

20. $\int \sin ax \cos bxdx \quad (a,b>0, a \neq b)$

21. $\int \tan^5 3xdx$

22. $\int \tan^4 \theta d\theta$

23. $\int \cot^4 xdx$

24. $\int \cot^3 2\theta d\theta$

25. $\int \sec^4 2xdx$

26. $\int \cos ec^4 \theta d\theta$

27. $\int \sec^6 \frac{x}{2}dx$

28. $\int \tan^2 3x \sec^4 3xdx$

29. $\int \tan^3 2x \sec^3 2xdx$

30. $\int \tan^2 \theta \sec^2 \theta d\theta$

31. $\int x \tan^2\left(x^2\right)\sec^2\left(x^2\right)dx$

32. $\int \sqrt{\tan x} \sec^4 xdx$

33. $\int \tan^3 3x \sec 3xdx$

34. $\int \tan^4 \theta \sec^4 \theta d\theta$

35. $\int \tan^{\frac{3}{2}} x \sec^4 xdx$

36. $\int \tan x \sec^{\frac{3}{2}} xdx$

37. $\int \cot^3 x \cos ec^3 xdx$

38. $\int \cot 3\theta \cos ec^4 3\theta d\theta$

39. $\int \cot^3 x \cos ecxdx$

40. $\int \cot^2 3x \sec 3xdx$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.4

1. $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^2 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

2. $\frac{3x}{8} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{16}\sin 2x + C$

3. $\frac{5x}{16} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{3}{32}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin^3 x + C$

4. $\frac{1}{7}\cos^7 \theta - \frac{3}{5}\cos^5 \theta + \cos^3 \theta - \cos \theta + C$

5. $\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{20}\sin 10\theta + C$

6. $\sin\theta - \frac{2}{3}\sin^3 \theta + \frac{1}{5}\sin^5 \theta + C$

7. $\frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x + C$

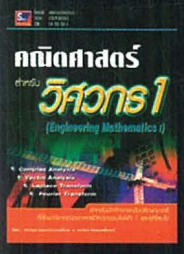
8. $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + C$

9. $\frac{3}{128}x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{1024}\sin 8x + C$

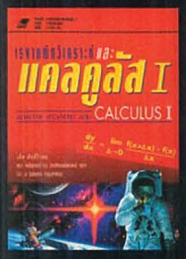
10. $-\frac{1}{18}\cos^6 3x + \frac{1}{24}\cos^8 3x + C$

ความน่าจะเป็นและสถิติประยุกต์ เล่ม 1

ความน่าจะเป็นและสถิติประยุกต์ เล่ม 2



คณิตศาสตร์วิศวกร 1



เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส 1

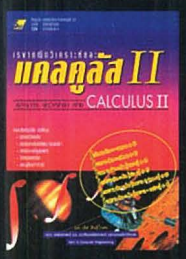
ประวัติผู้เขียน
รศ. ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์

ประวัติการศึกษา

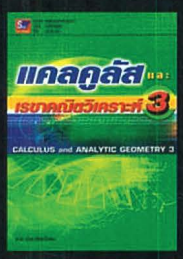
- ชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 (ป.7) โรงเรียนพลวิทยา
- ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 (ม.3) โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
- ประกาศนียบัตรวิชาการศึกษา (ปกศ.) วิทยาลัยครูสงขลา
- การศึกษาบัณฑิต (กศ.บ. คณิตศาสตร์ เกียรตินิยมอันดับหนึ่ง) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตสงขลา ปีการศึกษา 2521-2524
- ศึกษาศาสตรบัณฑิต (ศศ.บ. บริหารการศึกษา) มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช ปีการศึกษา 2531-2533
- ครุศาสตรมหาบัณฑิต (ค.ม.) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2529-2530
- กำลังศึกษาระดับปริญญาเอก สาขาหลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ปีการศึกษา 2547

ตำแหน่ง

- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ระดับ 6 ปีการศึกษา 2537
- รองศาสตราจารย์ ระดับ 7 ปีการศึกษา 2540
- รองศาสตราจารย์ ระดับ 8 ปีการศึกษา 2542
- รองศาสตราจารย์ ระดับ 9 ปีการศึกษา 2545



เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส 2



แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 3

คณิตศาสตร์พื้นฐาน

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

สถิติสำหรับวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์

รวมสูตรคณิตวิศวฯ

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย

SKY BOOK

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
SKYBOOK COMPANY LIMITED
515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105
e-mail: sales@skybook.co.th
www.skybook.co.th

อินทิกรัล
ISBN 974-389-556-6

9 789743 895562

ราคา 280 บาท