SKYBOOK
ชื่อหนังสือ คณิตศาสตร์ธุรกิจ
บาร์โค้ด 9789743890871
ISBN 974-389-087-4

คณิตศาสตร์ธุรกิจ

Business Mathematics

ดย... ผ.ศ. ดร.อนุสรณ์ สรพรหม

Business Mathematics

คณิตศาสตร์ธุรกิจ

Business Mathematics

โดย...ผ.ศ. ดร.อนุสรณ์ สรพรหม

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย

SKYBOOK

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

SKYBOOK COMPANY LIMITED

515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105

E-mail: skybook1992@hotmail.com

www.skybook.co.th

"คณิตศาสตร์ธุรกิจ"

พิมพ์ครั้งที่ 1 พฤษภาคม 2545
พิมพ์ครั้งที่ 2 เมษายน 2546
พิมพ์ครั้งที่ 3 พฤษภาคม 2547
พิมพ์ครั้งที่ 4 มิถุนายน 2549

ราคา 220 บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

อุนสรณ์ สรพรหม
คณิตศาสตร์ธุรกิจ -- พิมพ์ครั้งที่ 4 -- ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์, 2549.
250 หน้า
1. คณิตศาสตร์ธุรกิจ
I. ชื่อเรื่อง
510
ISBN: 974-389-087-4
S7904-30-06-06

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย

SKY BOOK
บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
SKYBOOK COMPANY LIMITED
515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105
e-mail: sales@skybook.co.th
www.skybook.co.th

หากท่านผู้อ่านซื้อหนังสือที่จัดพิมพ์โดยบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด และพบว่าหนังสือสลับหน้า พิมพ์ไม่ชัดเจน หน้าขาดหายไม่ครบ หรือความบกพร่องอื่นใดอันเนื่องมาจากกระบวนการพิมพ์และการเข้าเล่ม กรุณาส่งหนังสือมาที่บริษัท ฯ เพื่อรับหนังสือเล่มใหม่

พิมพ์ที่ บริษัท พี เอ็น เค แอนด์ สกายพริ้นติ้งส์ จำกัด
โทรศัพท์ : 0-2812-1484, 0-2812-2265

คำนำ

M-A-T-H

การศึกษาในสาขาบริหารธุรกิจซึ่งเกี่ยวข้องกับตัวเลขมากมายนั้น วิชาสำคัญที่ทุกคนจะต้องเรียนรู้และเข้าใจอย่างถ่องแท้คือ คณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการนำไปใช้ในทางปฏิบัติเพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ทางธุรกิจที่ต้องการ ปัจจุบันมีตำราทางด้านนี้มากพอสมควร แต่ส่วนหนึ่งก็ยังเป็นคณิตศาสตร์ล้วน ๆ จนค่อนข้างยากต่อความเข้าใจของผู้ที่มีพื้นฐานทางด้านนี้น้อย สิ่งนี้จึงเป็นแรงจูงใจให้ข้าพเจ้าเขียนตำราขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว

เนื้อหาในตำราเล่มนี้แบ่งออกเป็น 8 บทซึ่งจำเป็นต่อการดำเนินธุรกิจ โดยมีตัวอย่างประยุกต์ในแต่ละบท และที่สำคัญในบางบทจะมีโจทย์ปัญหาพร้อมเฉลยเพื่อช่วยให้นักศึกษาสามารถอ่านและเข้าใจด้วยตนเองได้ดีขึ้น โดยภาษาที่ใช้จะเป็นภาษาที่ง่ายต่อความเข้าใจและไม่เน้นความเป็นคณิตศาสตร์ในแง่ของสัญกรณ์และสัญลักษณ์มากนัก

ในโอกาสนี้ ข้าพเจ้าขอขอบคุณทุกฝ่ายของสำนักพิมพ์สกายบุ๊กส์ที่ทำให้หนังสือเล่มนี้เสร็จสมบูรณ์ และวิทยาลัยรัตนบัณฑิตที่สนับสนุนโดยการใช้ตำราเล่มนี้ในรายวิชา "คณิตศาสตร์ธุรกิจ" และที่จะขาดไม่ได้คือ คุณพัชราวลัย และเด็กชายสรณ์พัชร สรพรหม ภรรยาและบุตรที่เข้าใจและเอาใจใส่ข้าพเจ้าด้วยดีตลอดมา

อนุสรณ์ สรพรหม

10 เมษายน 2545

โทรศัพท์ 01-2594830

E-mail: anuso.so@clickta.com

สารบัญ

M-A-T-H

บทที่ 7 ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

บทที่ 8 แคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปร

สมการและอสมการ

M - A - T - H 1

1.1 สมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรเดียว

สมการ (Equations) คือ การเท่ากันของปริมาณต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งตามปกติสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรเดียวจะอยู่ในรูปของ $ax+b=c$ เช่น $2x+3=11$ หรือ $2x-7=6$ โดย a,b,c เป็นจำนวนจริง และ x เป็น *ตัวแปร* (Variable) ที่สามารถแทนค่าด้วยจำนวนต่าง ๆ แล้วทำให้ทั้งสองข้างของสมการเท่ากัน ทั้งนี้การหาค่าของตัวแปรที่ทำให้สมการเป็นจริงดังกล่าว เราเรียกว่า *การแก้สมการ* (Solving the Equation) ตัวอย่างเช่น การแก้สมการ $2x+3=11$ จะเป็นการหาค่าของ x ซึ่งเมื่อแทนที่ x ดังกล่าวในสมการแล้วจะทำให้ $2x+3$ มีค่าเท่ากับ 11 และเนื่องจากเลข 4 ทำให้ $2(4)+3=11$ ดังนั้น 4 จึงเป็นคำตอบหรือ *ผลเฉลย* (Solution) ของสมการ และเมื่อกำหนดให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงแล้ว เราสามารถแก้สมการโดยใช้คุณสมบัติพื้นฐานของสมการดังต่อไปนี้

(1) คุณสมบัติในการบวก

ถ้า $a=b$ แล้ว $a+c=b+c$

(2) คุณสมบัติในการลบ

ถ้า $a=b$ แล้ว $a-c=b-c$

(3) คุณสมบัติในการคูณ

ถ้า $a=b$ แล้ว $ac=bc$

(4) คุณสมบัติในการหาร

ถ้า $a=b$ แล้ว $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ โดยที่ $c\neq 0$

<u>**ตัวอย่างที่** 1.1</u> จงแก้สมการ $2x+3=9$

(วิธีทำ) $2x+3=9$

$2x+3-3=9-3$ [คุณสมบัติในการลบ]

$2x=6$

$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(6) \qquad \text{[คุณสมบัติในการคูณ]}$$

$$x = 3$$

<u>ตัวอย่างที่ 1.2</u> จงแก้สมการ $\frac{m}{2} - 1 = \frac{m}{3}$

(วิธีทำ) $$6\left(\frac{m}{2} - 1\right) = 6\left(\frac{m}{3}\right) \qquad \text{[คุณสมบัติในการคูณ]}$$

$$3m - 6 = 2m$$

$$(3m - 6) - 2m = 2m - 2m \qquad \text{[คุณสมบัติในการลบ]}$$

$$m - 6 = 0$$

$$(m - 6) + 6 = 0 + 6 \qquad \text{[คุณสมบัติในการบวก]}$$

$$m = 6$$

สมการทั้ง 2 ในตัวอย่างที่ 1.1 และ 1.2 เป็นตัวอย่างของ *สมการเชิงเส้น* (Linear Equations) ซึ่งมี *ตัวแปรเพียงตัวเดียว* (One Variable) เพราะสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $ax + b = 0$ โดยที่ x เป็นตัวแปร a และ b เป็นจำนวนจริง ทั้งนี้สมการ $2x + 3 = 9$ ในตัวอย่างที่ 1.1 สามารถเปลี่ยนเป็น $2x - 6 = 0$ ส่วนสมการ $\frac{m}{2} - 1 = \frac{m}{3}$ ในตัวอย่างที่ 1.2 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $m - 6 = 0$

1.2 อสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรเดียว

อสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรเดียวจะอยู่ในรูปของ $ax + b > c$ หรือ $ax + b < c$ โดย a, b, c เป็นจำนวนจริง และ x เป็นตัวแปร เช่น $3x + 1 < 7$ หรือ $2x + 3 > 9$ ทั้งนี้การแก้ *อสมการ* (การไม่เท่ากัน) สามารถกระทำได้โดยอาศัยคุณสมบัติพื้นฐานของอสมการดังนี้

(1) ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$

(2) ถ้า $a > b$ แล้ว $a - c > b - c$

(3) ถ้า $a > b$ และ c เป็นบวกแล้ว $ac > bc$

ถ้า $a > b$ และ c เป็นลบแล้ว $ac < bc$

(4) ถ้า $a > b$ และ c เป็นบวกแล้ว $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

ถ้า $a > b$ และ c เป็นลบแล้ว $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

ในกรณีนี้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง และคุณสมบัติเหล่านี้ใช้ได้กับเครื่องหมาย $<$ (อย่าลืมกลับเครื่องหมายในกรณีที่ c เป็นลบ)

<u>ตัวอย่างที่ 1.3</u> จงแก้อสมการ $2x+3>9$

(วิธีทำ)

$$2x+3>9$$

$$2x+3-3>9-3$$

$$2x>6$$

$$\frac{1}{2}(2x)>\frac{1}{2}(6)$$

$$x>3$$

ดังนั้น ผลเฉลยของอสมการนี้คือ x เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่า 3 เพราะว่าค่าดังกล่าวจะทำให้การไม่เท่ากันของ $2x+3>9$ เป็นจริง

1.3 สมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรสองตัว

สมการใดก็ตามที่อยู่ในรูปของ $ax+by=c$ โดยที่ a,b,c เป็นจำนวนจริง และ $a,b \neq 0$ แล้วสมการดังกล่าวจัดว่าเป็นสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรสองตัว ตัวอย่างของสมการประเภทนี้ได้แก่ $2x+y=10$ หรือ $x-3y=9$ ซึ่งมีตัวแปรสองตัว คือ x และ y อยู่ในสมการ เป็นต้น

การแก้สมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรสองตัวเพื่อหาผลเฉลยนั้น ทำได้โดยการแทนค่าตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งด้วยจำนวนจริงซึ่งจะทำให้สมการดังกล่าวเปลี่ยนเป็นสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรเดียวและสามารถหาผลเฉลยได้ดังที่กล่าวไว้แล้วในหัวข้อที่ 1.1

<u>ตัวอย่างที่ 1.4</u> จงหาผลเฉลย 3 ชุดสำหรับสมการ $2x-3y=12$

(วิธีทำ) (ก) เรากำหนดให้ค่า $x=3$

$$2x-3y=12$$

$$2(3)-3y=12 \qquad \text{[แทนค่า } x=3\text{]}$$

$$6-3y=12$$

$$6-3y-6=12-6 \qquad \text{[ลบ 6 ออกจากทั้งสองข้าง]}$$

$$-3y=6$$

$$\frac{-3y}{-3} = \frac{6}{-3} \qquad \text{[หารทั้งสองข้างด้วย -3]}$$

$$y = -2$$

$x = 3$ และ $y = -2$ คือผลเฉลยของ $2x - 3y = 12$

(ข) เรากำหนดให้ค่า $x = 0$

$$2x - 3y = 12$$

$$2(0) - 3y = 12 \qquad \text{[แทนค่า } x = 0\text{]}$$

$$0 - 3y = 12$$

$$-3y = 12$$

$$\frac{-3y}{-3} = \frac{12}{-3} \qquad \text{[หารทั้งสองข้างด้วย - 3]}$$

$$y = -4$$

$x = 0$ และ $y = -4$ คือผลเฉลยของ $2x - 3y = 12$

(ค) เรากำหนดให้ค่า $y = 1$

$$2x - 3y = 12$$

$$2x - 3(1) = 12 \qquad \text{[แทนค่า } y = 1\text{]}$$

$$2x - 3 = 12$$

$$2x - 3 + 3 = 12 + 3 \qquad \text{[บวก 3 เข้าทั้งสองข้าง]}$$

$$2x = 15$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{15}{2} \qquad \text{[หารทั้งสองข้างด้วย 2]}$$

$$x = \frac{15}{2}$$

$x = \frac{15}{2}$ และ $y = 1$ คือผลเฉลยของ $2x - 3y = 12$

1.4 สมการกำลังสอง

นอกจากสมการเส้นตรงที่กล่าวมาแล้ว ยังมีสมการที่มิใช่เส้นตรงอีกมากมาย ที่พบเห็นบ่อย ๆ และมีประโยชน์อย่างมากในการคำนวณ ได้แก่ *สมการกำลังสอง* (Quadratic Equations) ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ โดย a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ เช่น สมการ $x^2 - 4x + 3 = 0$ หรือสมการ $x^2 - 5 = 3x + 6$ เป็นต้น

ในกรณีที่มีตัวแปร 2 ตัว คือ x และ y สมการกำลังสองจะอยู่ในรูปของ $y = ax^2 + bx + c$ โดย a, b และ c เป็นจำนวนจริงและ $a \neq 0$ การแก้สมการประเภทนี้ทำได้โดยการกำหนดค่าตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งด้วยจำนวนจริง แล้วแทนค่าเพื่อหาค่าตัวแปรอีกตัวหนึ่ง ดังแสดงไว้ในตัวอย่างที่ 1.5

ตัวอย่างที่ 1.5 จงหาผลเฉลย 3 ชุดของสมการ $y - x^2 = x - 2$

(วิธีทำ) (ก) เรากำหนดให้ค่า $x = 0$

$$y - (0)^2 = (0) - 2 \qquad [\text{แทนค่า } x = 0]$$

$$y = -2$$

$x = 0$ และ $y = -2$ คือ ผลเฉลยของสมการ $y - x^2 = x - 2$

(ข) เรากำหนดให้ค่า $x = 3$

$$y - (3)^2 = (3) - 2 \qquad [\text{แทนค่า } x = 3]$$

$$y - 9 = 1$$

$$y - 9 + 9 = 1 + 9 \qquad [\text{บวกด้วย 9 เข้าทั้งสองข้าง}]$$

$$y = 10$$

$x = 3$ และ $y = 10$ คือ ผลเฉลยของสมการ $y - x^2 = x - 2$

(ค) เรากำหนดให้ค่า $y = 0$

$$0 - (x)^2 = (x) - 2 \qquad [\text{แทนค่า } y = 0]$$

$$-x^2 = x - 2$$

$$-x^2 - (x - 2) = x - 2 - (x - 2) \quad [\text{ลบ } x - 2 \text{ ทั้งสองข้าง}]$$

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

$$-(-x^2 - x + 2) = -(0) \qquad [\text{คูณด้วย -1 ทั้งสองข้าง}]$$

$x^2 + x - 2 = 0$ ซึ่งอยู่ในรูปสมการกำลังสองที่มีตัวแปรเดียว

การแก้สมการเพื่อหาผลเฉลยของสมการ $x^2 + x - 2 = 0$ ทำได้หลายวิธี วิธีที่สะดวกวิธีหนึ่งก็คือ การแทนค่าลงในสูตร

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

โดย a, b และ c เป็นค่าสัมประสิทธิ์และค่าคงตัวที่มาจากรูปสมการทั่วไป $ax^2 + bx + c = 0$ ซึ่งในกรณีของสมการ $x^2 + x - 2 = 0$ นั้น จะเห็นได้ว่า a มีค่าเท่ากับ 1, $b = 1$ และ $c = -2$ เพราะฉะนั้น

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$= -2 \text{ และ } 1$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ $y - x^2 = x - 2$ คือ $x = -2$ และ $y = 0$ กับ $x = 1$ และ $y = 0$

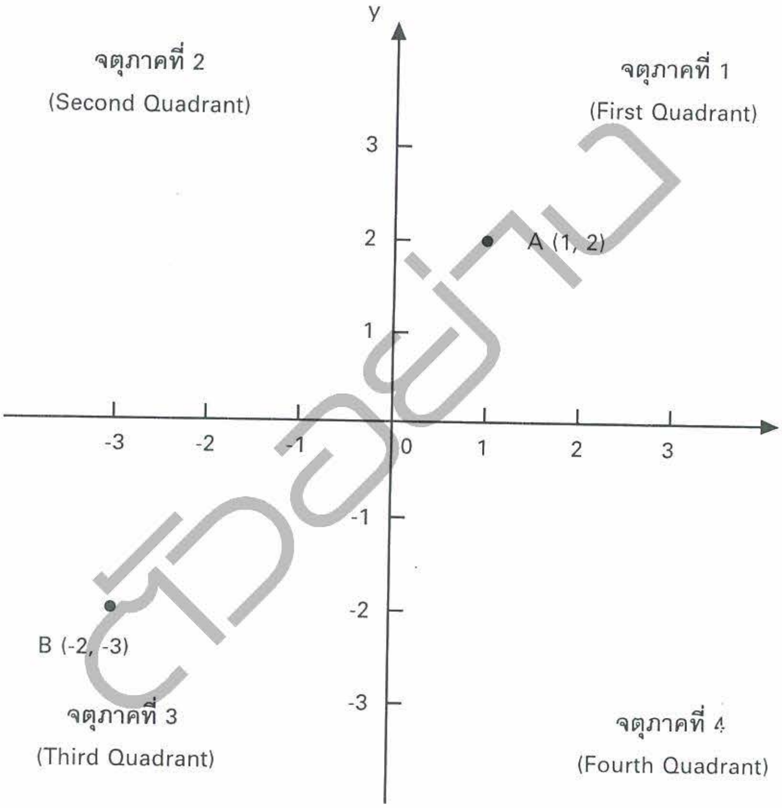
จากตัวอย่างที่ 1.5 มีข้อสังเกตที่สำคัญอย่างหนึ่ง ได้แก่ การกำหนดค่า x ขึ้นมาหนึ่งค่าแล้วแทนในสมการจะทำให้ได้ค่า y จากสมการเพียงค่าเดียว ขณะที่กำหนดค่า y แล้วแทนค่าในสมการเพื่อหาผลเฉลยจะได้ค่า x สองค่า ทั้งนี้ก็เพราะการยกกำลังสองของ x

1.5 กราฟของสมการ

นอกจากการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปร 2 ตัว (เช่น x และ y) ในรูปของสมการดังกล่าวแล้ว เราสามารถแสดงความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ของตัวแปรทั้งสองโดยใช้กราฟ ซึ่งง่ายต่อการเข้าใจและทำให้เห็นการเปลี่ยนแปลงของสถานการณ์บางอย่างได้ชัดเจนกว่าการบรรยายด้วยตัวหนังสือ ทั้งนี้การเขียนกราฟสามารถกระทำได้ด้วย *ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน* (Cartesian Coordination System) ซึ่งเริ่มจากการสร้างระนาบขึ้นโดยเส้นจำนวนจริงสองเส้น เส้นหนึ่งอยู่ในแนวนอนกับอีกเส้นหนึ่งอยู่ในแนวตั้ง เส้นทั้งสองตัดกัน ณ *จุดกำเนิด* (Origin) ซึ่งใช้สัญลักษณ์ 0 แทนจุดดังกล่าว เส้นที่อยู่ในแนวนอนเรียกว่า *แกน* x (X-axis) และเส้นที่อยู่ในแนวตั้งเรียกว่า *แกน* y (Y-axis) ทั้งนี้ทิศทางที่เป็นบวกของจำนวนจริงจะอยู่ทางด้านขวาของแกน y และทางด้านบนของแกน x ดังแสดงไว้ ในรูปที่ 1.1

เมื่อได้ระนาบซึ่งเป็นพื้นที่และแกนทั้งสองตามต้องการแล้ว เราจะกำหนดหน่วยสำหรับวัดค่าตัวแปร x และ y ซึ่งหน่วยวัดดังกล่าวไม่จำเป็นจะต้องเหมือนกัน เนื่องจาก x และ y อาจใช้แสดง

ปริมาณของสิ่งของที่แตกต่างกัน โดยความสัมพันธ์ของจำนวน x และ y แต่ละคู่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของคู่อันดับ (x,y) ซึ่งเมื่อนำความสัมพันธ์แต่ละคู่ดังกล่าวไปแสดงบนระนาบก็จะได้ *จุด* (Point) ทางเรขาคณิตนั่นเอง



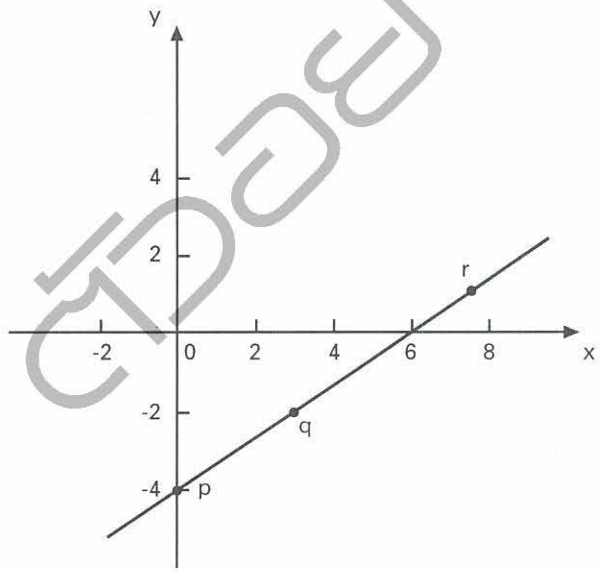
รูปที่ 1.1 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

ค่าตัวเลขแรกในคู่อันดับดังกล่าวมีชื่อเรียกว่า *พิกัดของ* x *หรือพิกัดที่หนึ่ง* (Abscissa) เป็นการวัดระยะห่างจากแกน y ส่วนค่าตัวเลขตัวที่สองในคู่อันดับเราเรียกว่า *พิกัดของ* y *หรือพิกัดที่สอง*

(Ordinate) เป็นการวัดระยะห่างจากแกน x ดังตัวอย่างในรูปที่ 1.1 จะเห็นว่า จุด A ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของ $x=1$ และ $y=2$ จะอยู่ห่างจากแกน y ไปทางขวามือ 1 หน่วย และเหนือแกน x ขึ้นไป 2 หน่วย หรือจุด B ซึ่งเป็นจุดที่แสดงความสัมพันธ์ของพิกัด $(-2,-3)$ บอกให้เราทราบว่า จุด B อยู่ห่างจากแกน y ไปทางซ้ายมือ 2 หน่วยและอยู่ใต้แกน x ลงไป 3 หน่วย เป็นต้น

การเขียนกราฟของสมการเชิงเส้น

จากตัวอย่างที่ 1.4 ในหัวข้อที่ 1.3 เราหาผลเฉลย 3 ชุดของสมการ $2x-3y=12$ ซึ่งแสดงในรูปของคู่อันดับได้ดังนี้ $(0,-4),(3,-2)$ และ $\left(\frac{15}{2},1\right)$ เมื่อนำผลเฉลยดังกล่าวมาแสดงในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนจะได้จุด 3 จุด คือ จุด p, q และ r ตามลำดับ ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 กราฟของสมการที่มีตัวแปรสองตัว

เมื่อเราเชื่อมจุด p,q และ r เข้าด้วยกันผลที่ได้คือ กราฟของเส้นตรงเส้นหนึ่ง ความสำคัญของเส้นตรงเส้นนี้อยู่ที่ทุก ๆ จุดบนเส้นจะแสดงผลเฉลยของสมการ $2x-3y=12$ ด้วยเหตุนี้จึงทำให้

การเขียนกราฟของสมการเป็นสิ่งจำเป็น และเพื่อให้สะดวกต่อการเขียนกราฟของสมการเชิงเส้นซึ่งอยู่ในรูป $ax + by = c$ เราควรแปลงสมการให้อยู่ในรูปของ $y = m + nx$ (มีชื่อเรียกว่า รูปแบบความชันและจุดตัดแกน) โดยหาค่า m ได้จาก $m = \frac{c}{b}$ และค่า n ได้จาก $n = -\frac{a}{b}$ การแปลงรูปใหม่นี้มีความสำคัญทางเรขาคณิต กล่าวคือ m จะแสดงถึงส่วนที่กราฟของสมการตัดกับแกน y ส่วน n จะเป็นค่า *ความชัน* (slope) ของเส้นตรง และการทราบค่า m และ n จะทำให้เราสามารถสร้างกราฟเส้นตรงของสมการเชิงเส้นที่มีสองตัวแปรได้ง่ายขึ้น ตัวอย่างเช่น สมการ $2x - 3y = 12$ ซึ่งเขียนได้ใหม่เป็น $y = -4 + \frac{2}{3}x$ นั้น แสดงว่าเส้นกราฟของสมการนี้จะตัดกับแกนตั้งที่ตำแหน่ง $y = -4$ โดยมีค่าความชัน $= \frac{2}{3}$ (ดูรูปที่ 1.2)

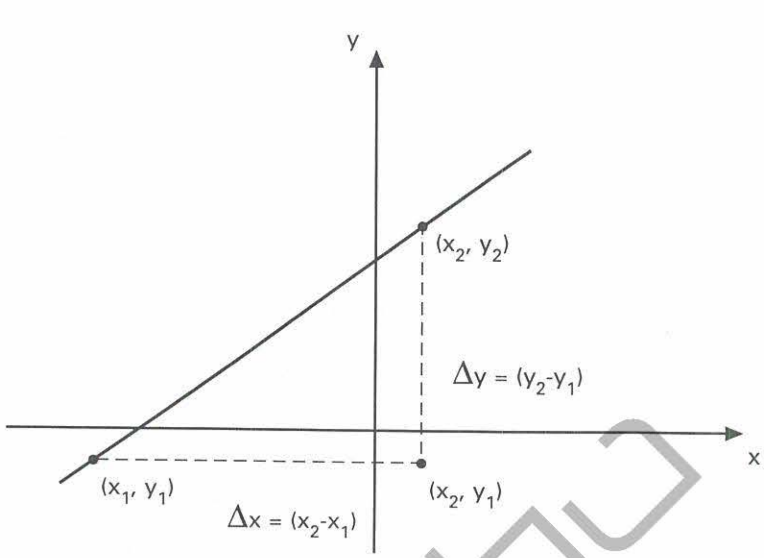
นอกจากการเขียนกราฟเส้นตรงด้วยวิธีที่กล่าวมาแล้ว เราอาจกำหนดให้ $x = 0$ แล้วแทนค่าในสมการเพื่อหาค่าส่วนตัดแกน y และกำหนดให้ $y = 0$ แล้วจึงแทนในสมการเพื่อหาค่าส่วนตัดแกน x หลังจากนั้นนำค่าที่ได้ไปลงจุดในระนาบ เสร็จแล้วลากเส้นตรงเชื่อมจุดทั้งสองเข้าด้วยกันก็จะได้กราฟที่ต้องการ ตัวอย่างเช่น จากสมการ $2x - 3y = 12$ ถ้าให้ $x = 0$ แล้วแทนค่า x ในสมการจะได้ส่วนตัดแกน y ที่ $y = -4$ และถ้าให้ $y = 0$ แล้วแทนค่า y ในสมการจะได้ส่วนตัดแกน x ที่ $x = 6$ และเมื่อนำพิกัด (0,–4) กับ (6,0) ไปลงจุดในระนาบแล้วลากเส้นตรงเชื่อมจุดทั้งสองก็จะได้กราฟของสมการเหมือนกับวิธีที่กล่าวมา

ความชัน

ความชันของเส้นตรงสามารถใช้วัดการเปลี่ยนแปลง (Δ) ของค่าตัวแปรบนแกนตั้ง (แกน y) เมื่อค่าตัวแปรบนแกนนอน (แกน x) เปลี่ยนแปลงไป 1 หน่วย โดยเขียนในรูปของสัญลักษณ์ได้ว่า ความชัน $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$ และสูตรที่ใช้ในการคำนวณหาค่าความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ได้แก่

$$\boxed{\text{ความชัน} \quad = \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

ดังรูปที่ 1.3 ความชันของเส้นตรง $y = ax + b$ ซึ่งผ่านจุด (x_1, y_1) และจุด (x_2, y_2) จะมีค่าเท่ากับ Δy ซึ่งเท่ากับ $y_2 - y_1$ หารด้วย Δx ซึ่งเท่ากับ $x_2 - x_1$



รูปที่ 1.3 ความชันของเส้นตรง

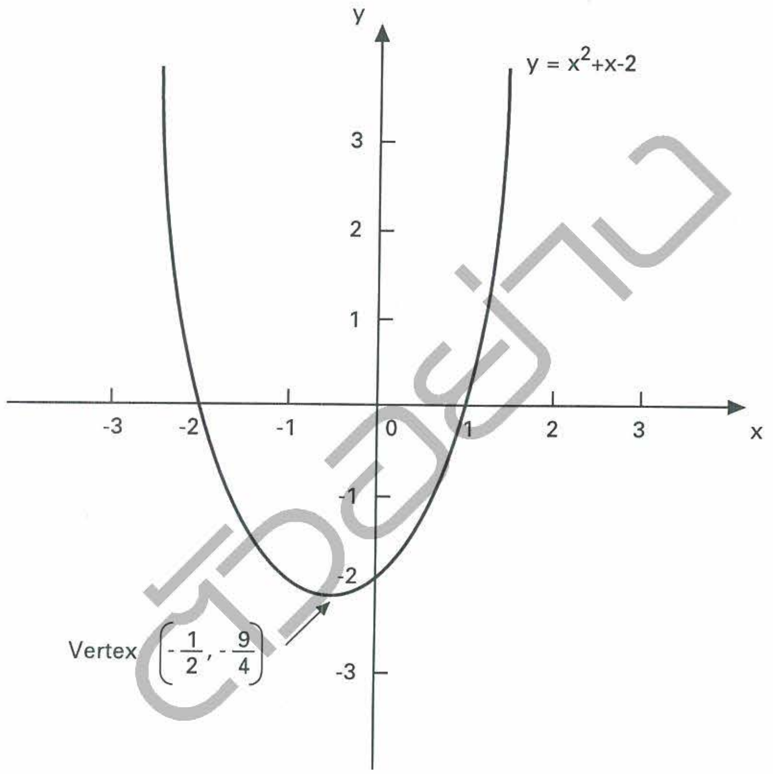
ค่าความชันของเส้นตรงอาจเป็นบวก ลบ ศูนย์ หรือเป็น *อนิยาม* (Undefined) ก็ได้ โดยค่าความชันแต่ละประเภทจะแสดงตำแหน่งที่แตกต่างกันของเส้นตรง สรุปได้ดังนี้

(1) กรณีที่ค่าความชันเป็นบวก เส้นตรงดังกล่าวจะลาดจากขวาลงมาซ้าย ซึ่งแสดงว่า y จะเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกับ x ที่เปลี่ยนไป กล่าวคือ x เพิ่มขึ้น y จะเพิ่ม หรือเมื่อค่าตัวแปร x ลดลง ค่า y จะลดลง ตัวอย่างของสมการประเภทนี้ได้แก่ $y = -4 + 3x$ หรือ $y = 2 + 6x$ หรือ $y = 2x$ เป็นต้น

(2) กรณีที่ค่าความชันเป็นลบ เส้นตรงดังกล่าวจะลาดจากซ้ายลงมาขวา ซึ่งแสดงว่า y จะเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางตรงกันข้ามกับ x ที่เปลี่ยนไป กล่าวคือ x เพิ่มขึ้น y จะลด หรือเมื่อค่าตัวแปร x ลดลง ค่า y จะเพิ่มขึ้น ตัวอย่างของสมการประเภทนี้ได้แก่ $y = 3 - 5x$ หรือ $y = -7 - 2x$ หรือ $y = -3x$ เป็นต้น

(3) กรณีที่ค่าความชันเป็นศูนย์ เส้นตรงดังกล่าวจะเป็นเส้นขนานกับแกนนอน ซึ่งแสดงว่า y จะมีค่าคงที่เสมอ เมื่อ x เปลี่ยนแปลงไป ตัวอย่างของสมการประเภทนี้ได้แก่ $y = 7$ หรือ $y = -9$ เป็นต้น

(4) กรณีที่ค่าความชันเป็นอนิยาม เส้นตรงดังกล่าวจะเป็นเส้นขนานกับแกนตั้ง ซึ่งแสดงว่า x จะมีค่าคงที่เสมอ ขณะที่ y เปลี่ยนแปลงได้ ($\Delta x = 0$ ขณะที่ Δy เป็นค่าใด ๆ ก็ได้) ตัวอย่างของสมการประเภทนี้ได้แก่ $x = 3$ หรือ $x = -4$ เป็นต้น



รูปที่ 1.4 กราฟของสมการกำลังสอง

การเขียนกราฟของสมการกำลังสอง

ในทำนองเดียวกับสมการเชิงเส้น ผลเฉลยของสมการกำลังสองในตัวอย่างที่ 1.5 สามารถแสดงได้ด้วยการเขียนกราฟของสมการ $y - x^2 = x - 2$ (ซึ่งเขียนใหม่ได้ในรูปของ $y = x^2 + x - 2$ ดังรูปที่ 1.4) ซึ่งจากรูปเส้นกราฟที่ได้เราเรียกว่า กราฟ *พาราโบลา* (Parabola) โดยมีลักษณะที่สำคัญคือ มี

จุดยอด (Vertex) อันเป็นจุดวกกลับของกราฟ ซึ่งหาพิกัดได้จากสูตร $(x,y)=\left(-\frac{b}{2a},c-\frac{b^2}{4a}\right)$ และเมื่อลากเส้นตรงตั้งฉากกับแกนนอนผ่านจุดยอด จะทำให้พื้นที่ระหว่างเส้นโค้งทั้งสองข้างกับเส้นตรงดังกล่าวนั้น *สมมาตร* (Symmetry) กัน

เส้นกราฟของสมการกำลังสอง $y=ax^2+bx+c$ นี้ อาจมีลักษณะคล้ายระฆังคว่ำหรือหงายก็ได้ขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์ a ว่าเป็นบวกหรือลบ โดยกรณีที่ a มีค่าเป็นบวก กราฟที่ได้จะมีลักษณะเป็นรูประฆังหงาย ดังตัวอย่างในรูปที่ 1.4 ส่วนกรณีที่ a มีค่าเป็นลบ กราฟจะมีลักษณะเป็นรูประฆังคว่ำ

1.6 ตัวอย่างประยุกต์ของสมการเชิงเส้น

สมการเชิงเส้นสามารถนำมาใช้ในการคำนวณทางธุรกิจได้หลายอย่าง เช่น สมการเงื่อนไขบังคับของการผลิต สมการต้นทุน สมการรายรับ และสมการกำไร เป็นต้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1.6</u> ร้านทำรองเท้าสตรีแห่งหนึ่งทำการผลิตรองเท้า 2 แบบ คือ แบบส้นสูงและแบบส้นธรรมดาเพื่อจำหน่าย โดยการผลิตรองเท้าส้นสูงแต่ละคู่นั้นจะต้องใช้แรงงานในการผลิตจำนวน 1 ชั่วโมงจากฝ่ายวัสดุ แล้วจึงผ่านไปยังฝ่ายประกอบซึ่งต้องใช้เวลาอีก 3 ชั่วโมงทำงาน ส่วนรองเท้าส้นธรรมดาแต่ละคู่นั้นต้องใช้แรงงานในการผลิตจากฝ่ายวัสดุ 2 ชั่วโมง และจากฝ่ายประกอบอีก 1 ชั่วโมงทำงาน ทั้งนี้จำนวนชั่วโมงทำงานสูงสุดในแต่ละสัปดาห์ของฝ่ายวัสดุและฝ่ายประกอบเท่ากับ 400 และ 450 ชั่วโมงตามลำดับ

(ก) จงสร้างเป็นเงื่อนไขบังคับที่หนึ่ง ซึ่งเป็นข้อจำกัดด้านชั่วโมงทำงานรวมของฝ่ายวัสดุในจำนวน 400 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ ถ้าร้านต้องใช้แรงงานของฝ่ายนี้จนหมดพอดี

(ข) จงสร้างเป็นเงื่อนไขบังคับที่สอง ซึ่งเป็นข้อจำกัดด้านชั่วโมงทำงานรวมของฝ่ายประกอบในจำนวนไม่เกิน 450 ชั่วโมงต่อสัปดาห์

(ค) จงวาดกราฟของสมการในคำตอบข้อ (ก)

(วิธีทำ) จากโจทย์สมมติให้ x_1 และ x_2 แทน *จำนวนรองเท้าส้นสูง* (หน่วยเป็นคู่) และ *จำนวนรองเท้าส้นธรรมดา* (หน่วยเป็นคู่) ที่ร้านทำการผลิตในหนึ่งสัปดาห์ จะได้

(ก) เงื่อนไขบังคับที่หนึ่งอยู่ในรูปของสมการ

$$x_1 + 2x_2 = 400 \tag{1}$$

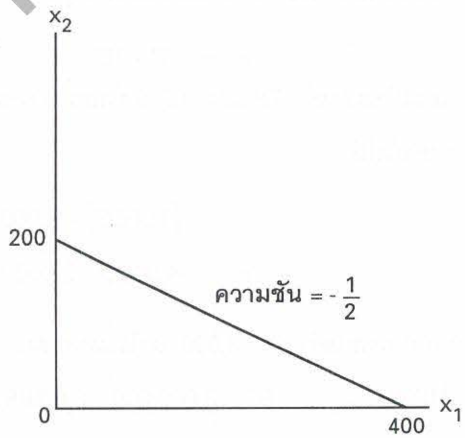
(ข) เงื่อนไขบังคับที่สองอยู่ในรูปของอสมการ

$$3x_1 + x_2 \le 450 \tag{2}$$

(ค) การวาดกราฟของสมการ (1) จะทำได้ง่ายขึ้นโดยการเปลี่ยนสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปของความชันและจุดตัดแกนดังนี้

$$2x_2 = 400 - x_1$$
$$x_2 = 200 - \frac{1}{2}x_1$$

ซึ่งเมื่อนำไปเขียนเป็นกราฟโดยให้แกนนอนแทน x_1 และแกนตั้งแทน x_2 จะได้กราฟเส้นตรงที่มีจุดตัดแกนตั้ง ณ $x_2 = 200$ มีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{2}$ โดยที่ค่าของ $x_1, x_2 \ge 0$ ดังรูปที่ 1.5



รูปที่ 1.5 กราฟของสมการ $x_2 = 200 - \frac{1}{2}x_1$

ตัวอย่างที่ 1.7 ถ้าโรงงานแห่งหนึ่งทำการผลิตสินค้าโดยมีต้นทุนการผลิตแยกเป็น (1) ต้นทุนคงที่เท่ากับ 3,000,000 บาท และ (2) ต้นทุนผันแปรต่อหน่วยเท่ากับ 5,000 บาท ในกรณีที่โรงงานสามารถขายสินค้าได้หน่วยละ 9,000 บาท จงหา

(ก) สมการต้นทุน (ข) สมการรายรับ (ค) สมการกำไร

(ง) ต้นทุน รายรับ และกำไร จากการผลิตสินค้าจำนวน 8,000 หน่วย

(วิธีทำ) (ก) จากการกำหนดให้ TC แทนต้นทุนรวมในการผลิตสินค้า และ Q แทนปริมาณสินค้าที่ผลิต เราได้สมการต้นทุนที่เป็นสมการเชิงเส้นดังนี้

$$TC = \text{ต้นทุนคงที่} + \text{ต้นทุนผันแปร}$$

$$TC = 3{,}000{,}000 + 5{,}000Q$$

(ข) จากการกำหนดให้ TR แทนรายรับรวมที่ได้จากการผลิตสินค้า เราหาสมการรายรับจากการคูณราคากับปริมาณสินค้า ผลลัพธ์คือสมการรายรับที่เป็นสมการเชิงเส้น

$$TR = \text{ราคา} \times \text{ปริมาณสินค้า}$$

$$TR = 9{,}000Q$$

(ค) จากการกำหนดให้ π แทนกำไรที่ได้จากการผลิตสินค้า และจากการที่กำไรเท่ากับผลต่างระหว่างรายรับและต้นทุน เราได้

$$\pi = TR - TC$$

และเมื่อแทนค่า TR และ TC ลงในสมการจะได้สมการกำไรที่เป็นสมการเชิงเส้นดังต่อไปนี้

$$\pi = [9{,}000Q] - [3{,}000{,}000 + 5{,}000Q]$$

$$\pi = 4{,}000Q - 3{,}000{,}000$$

(ง) จากการแทนค่า $Q = 8{,}000$ ลงในแต่ละสมการเราได้

ต้นทุน : $TC = 3{,}000{,}000 + 5{,}000(8{,}000) = 43{,}000{,}000$ บาท

รายรับ : $TR = 9{,}000(8{,}000) = 72{,}000{,}000$ บาท

กำไร : $\pi = 4{,}000(8{,}000) - 3{,}000{,}000$

$= 29{,}000{,}000$ บาท

ปัญหาพร้อมเฉลย

สมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรเดียว

1.1 จงแก้สมการ $7x-5(x-2)=3(x+4)-1$

(วิธีทำ) จากโจทย์ $7x-5(x-2)=3(x+4)-1$

เราได้ $7x-5x+10=3x+12-1$

$$2x+10=3x+11$$

$$2x-3x=11-10$$

$$-x=1$$

$$x=-1$$

การตรวจคำตอบทำได้โดยแทนค่า $x=-1$ ในสมการที่โจทย์กำหนดมาให้ผลลัพธ์คือ

$$7(-1)-5[(-1)-2]=3[(-1)+4]-1$$

$$-7-5(-3)=3(3)-1$$

$$-7+15=9-1$$

$$8=8$$

แสดงว่าคำตอบหรือผลเฉลยที่ได้ถูกต้อง

1.2 จงหาค่า x ที่ทำให้สมการ $0.3x+4-0.6x=0.4x+8$ เป็นจริง

(วิธีทำ) จากโจทย์ $0.3x+4-0.6x=0.4x+8$

เราได้ $-0.3x+4=0.4x+8$

$$-0.3x - 0.4x = 8 - 4$$

$$-0.7x = 4$$

$$x = \frac{4}{-0.7} = -\frac{40}{7}$$

การตรวจคำตอบทำได้โดยแทนค่า $x = -\frac{40}{7}$ ในสมการที่โจทย์กำหนดมาให้ผลลัพธ์คือ

$$0.3\left(-\frac{40}{7}\right) + 4 - 0.6\left(-\frac{40}{7}\right) = 0.4\left(-\frac{40}{7}\right) + 8$$

$$-\frac{12}{7} + 4 + \frac{24}{7} = -\frac{16}{7} + 8$$

$$\frac{12}{7} + 4 = -\frac{16}{7} + 8$$

$$\frac{12+28}{7} = \frac{-16+56}{7}$$

$$\frac{40}{7} = \frac{40}{7}$$

แสดงว่าคำตอบหรือผลเฉลยที่ได้ถูกต้อง

1.3 จงแก้สมการ $\frac{5}{2(y+1)} + \frac{3}{y+1} = 1$

(วิธีทำ) จากโจทย์ $\frac{5}{2(y+1)} + \frac{3}{y+1} = 1$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $2(y+1)$ เราได้

$$\frac{5}{2(y+1)}[2(y+1)] + \frac{3}{y+1}[2(y+1)] = 2(y+1)$$

$$5 + 3(2) = 2(y+1)$$

$$5 + 6 = 2y + 2$$

$$11 = 2y + 2$$

$$2y = 11 - 2$$

$$2y = 9$$

$$y = \frac{9}{2}$$

การตรวจคำตอบทำได้โดยแทนค่า $y = \frac{9}{2}$ ในสมการที่โจทย์กำหนดมาให้ ผลลัพธ์คือ

$$\frac{5}{2\left[\left(\frac{9}{2}\right)+1\right]} + \frac{3}{\left[\left(\frac{9}{2}\right)+1\right]} = 1$$

$$\frac{5}{2\left[\frac{11}{2}\right]} + \frac{3}{\left[\frac{11}{2}\right]} = 1$$

$$\frac{5}{11} + \frac{3}{\left[\frac{11}{2}\right]} = 1$$

$$\frac{5}{11} + \frac{3(2)}{11} = 1$$

$$\frac{5+6}{11} = 1$$

$$1 = 1$$

แสดงว่าคำตอบหรือผลเฉลยที่ได้ถูกต้อง

อสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรเดียว

1.4 จงแก้อสมการ $-0.2(m+9) < 0.8m - 6.5$

(วิธีทำ) จากโจทย์ $-0.2(m+9) < 0.8m - 6.5$

เราได้ $-0.2m + 1.8 < 0.8m - 6.5$

$$-0.2m - 0.8m < -6.5 - 1.8$$

$$-m < -8.3$$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของอสมการด้วย -1 จะได้

$$m > 8.3$$

1.5 จงหาค่า x ที่ทำให้อสมการ $\frac{x}{6} - \frac{x}{10} > 2 + \frac{x}{4}$ เป็นจริง

(วิธีทำ) จากโจทย์ $\frac{x}{6} - \frac{x}{10} > 2 + \frac{x}{4}$

เราได้ $\frac{5x-3x}{30} > \frac{8+x}{4}$

$$\frac{8x}{30} > \frac{8+x}{4}$$

เมื่อคูณไขว้ จะได้ $4(8x) > 30(8+x)$

$$32x > 240 + 30x$$

$$2x > 240$$

$$x > 120$$

ดังนั้นค่า x ที่ทำให้อสมการ $\frac{x}{6} - \frac{x}{10} > 2 + \frac{x}{4}$ เป็นจริง คือ $x > 120$

สมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรสองตัว

1.6 จงหาผลเฉลยของสมการ $y - x(5x-6) = 1$ เมื่อกำหนดให้ $y = 0$

(วิธีทำ) จากโจทย์ $y - x(5x-6) = 1$ เมื่อกำหนดให้ $y = 0$

เราได้ $0 - x(5x-6) = 1$

$$-x(5x-6) = 1$$

$$-5x^2 + 6x = 1$$

$$-5x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$ [คูณทั้งสองข้างของสมการด้วย –1]

เมื่อแยกตัวประกอบ จะได้

$$(5x-1)(x-1) = 0$$

ซึ่งเป็นจริงเมื่อ $(5x-1) = 0$ หรือ $(x-1) = 0$

$x = \frac{1}{5}$ $x = 1$

ดังนั้นคำตอบที่ต้องการคือ $x = \frac{1}{5}, 1$

ผ.ศ. ดร. อนุสรณ์ สรพรหม

- ศ.บ. (เศรษฐศาสตร์ทฤษฎี) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- M.A. (Econ.) Middle Tennessee State University, U.S.A
- Ph.D. (Econ.) Southern Illinois University, U.S.A.

คณะผู้ร่วมเขียน

- รศ. วันทนีย์ ภูมิภัทราคม ศศ.บ (ธุรกิจศิลป์), ศ.ม. (เศรษฐศาสตร์)
- อ. เครือวัลย์ ชัชกุล ศศ.บ., นศ.บ., ค.ม. (ภาษาไทย), นศ.ม. (การสื่อสารมวลชน)
- อ. สุคณิต พาทีทิน กศ.บ. (คณิตศาสตร์-ฟิสิกส์), M.S. (Computer)
- อ. สุนทร ขวัญเรือน พ.ม., ค.บ. (คณิตศาสตร์), ศศ.ม. (วิเทศกิจ)
- อ. ชลวิช สุธัญญารักษ์ บธ.บ. (การบริหารอุตสาหกรรม), วท.ม. (เศรษฐศาสตร์ธุรกิจ)
- อ. นฤดี จันทสิงห์ ร.บ., ร.ม. (การระหว่างประเทศ และการทูต)
- อ. ภัทรวิภ วราภรณ์ น.บ., ประกาศนียบัตรกฎหมาย
- อ. อรอนงค์ วราภรณ์ ศศ.บ. (ภาษาอังกฤษ)
- อ. กอบชัย เช่งเจริญ ศศ.บ. (เศรษฐศาสตร์), ศ.ม.
- อ. ขันติ ปานขลิบ วศ.ม. (เครื่องกล)
- อ. ภัทรินทร์ เฉลิมแสน วศ.ม. (อุตสาหการ)
- อ. อิศราวุธ สีดาดาน วศ.ม. (ไฟฟ้า)

หนังสือที่เขียน

- คู่มือและแนวข้อสอบเข้าศึกษาต่อปริญญาโท คณิตศาสตร์
- คู่มือและแนวข้อสอบเข้าศึกษาต่อปริญญาโท สถิติ
- คู่มือและแนวข้อสอบเข้าศึกษาต่อปริญญาโท ภาษาอังกฤษ
- คู่มือและแนวข้อสอบเข้าศึกษาต่อปริญญาโท ความรู้ทั่วไปทางบริหารธุรกิจ
- คู่มือและแนวข้อสอบเข้าศึกษาต่อปริญญาโท วิศวกรรมศาสตร์
- คู่มือและแนวข้อสอบเข้าศึกษาต่อปริญญาโท เศรษฐศาสตร์
- คู่มือและแนวข้อสอบเข้าศึกษาต่อปริญญาโท คอมพิวเตอร์
- คู่มือและแนวข้อสอบเข้าศึกษาต่อปริญญาโท รัฐศาสตร์และรัฐประศาสนศาสตร์
- คณิตศาสตร์ธุรกิจ
- คณิตศาสตร์ทั่วไป

คณิตศาสตร์ธุรกิจ
ISBN 974-389-087-4
9 789743 890871
ราคา 220 บาท

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย
บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
SKYBOOK COMPANY LIMITED
SKYBOOK
E-mail: skybook1992@hotmail.com
www.skybook.co.th