

ชื่อหนังสือ แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 3
บาร์โค้ด 9789743893094
ISBN 974-389-309-1

แคลคูลัส และ เรขาคณิตวิเคราะห์ 3

CALCULUS and ANALYTIC GEOMETRY 3

ผ.ศ. เลิศ สิทธิโกศล

เรขาคณิตวิเคราะห์ และ

แคลคูลัส III

CALCULUS and ANALYTIC GEOMETRY 3

ผ.ศ. เลิศ สิทธิโกศล



บริษัท **สกายบุ๊กส์** จำกัด

SKYBOOK COMPANY LIMITED

515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ปะชาธิปไตย อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105

E-mail: skybook1992@hotmail.com

www.skybook.co.th

“เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส III”

พิมพ์ครั้งที่ 1 มกราคม 2546

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย

ห้ามคัดลอกถ่ายเอกสารหรือพิมพ์

หรือวิธีหนึ่งวิธีใดของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาต

จากบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

ราคา 150 บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

เลิศ สิทธิโชค

เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส III -- กรุงเทพฯ : สกายบุ๊กส์, 2546.

224 หน้า

1. เรขาคณิตวิเคราะห์ 2. แคลคูลัส I. ชื่อเรื่อง

516.3

ISBN: 974-389-309-1

S7901-30-01-03

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย



บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

SKYBOOK COMPANY LIMITED

515/270-8 ถ.วิภาวดี-ปทุมธานี ต.พระยาอินทร์ อ.เมือง จ.ปทุมธานี 12130

โทร. 0-2956-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105

E-mail: skybook1992@hotmail.com

www.skybook.co.th

พิมพ์ที่ บริษัท สยามสปอร์ต ซินดิเคท จำกัด

459 ซอยพิบูลย์อุปถัมภ์ (ลาดพร้าว 48) แขวงสามเสนนอก เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310

โทรศัพท์ : 0-2694-3010

คำนำ

หนังสือเรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัสผู้เรียบเรียงได้จัดทำขึ้นมา 2 เล่มแล้ว เล่มนี้ถือเป็นเล่มที่ 3 หนังสือเรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส III เล่มนี้เหมาะสำหรับผู้สนใจทั่วไปและนิสิตนักศึกษาในระดับปริญญาตรีที่เรียนในสาขาต่าง ๆ อาทิ วิศวกรรมศาสตร์ วิทยาการคอมพิวเตอร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี วิทยาศาสตร์การอาหาร เทคโนโลยีอุตสาหกรรม คณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ประยุกต์ ฟิสิกส์ เคมี เหล่านี้เป็นต้น เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ได้เพิ่มเนื้อหาบางบทซึ่งเป็นเนื้อหาของวิชาแคลคูลัสขั้นสูงและการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์ลงไป เหตุผลที่เป็นเช่นนี้เพราะอยากให้ผู้ที่ศึกษาได้เห็นภาพรวมของเนื้อหาแคลคูลัสในแง่ให้นิยาม ทฤษฎีบท และการประยุกต์ สำหรับเนื้อหานี้ให้ดูได้ในสารบัญ

ผู้เรียบเรียงใช้หนังสือศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2538 ในการอ้างอิงถึงการบัญญัติศัพท์เป็นภาษาไทยซึ่งจะเห็นว่าศัพท์บางตัวมีการใช้ที่ต่างจากฉบับราชบัณฑิตยสถานหรือบางครั้งก็เขียนทับศัพท์เดิม โดยดูได้ในวงเล็บที่ยกตัวอย่างมาให้อ้างอิง ถ้าศึกษาให้ลึก ๆ จะพบว่ามีคำอีกหลายคำที่ไม่ได้บัญญัติไว้หรือบัญญัติศัพท์ที่เป็นภาษาไทยไว้แล้ว แต่ศัพท์ที่ใช้ต้องแปลอีกครั้งหนึ่งจึงจะเข้าใจซึ่งหลาย ๆ ครั้งทำให้สับสน การเขียนทับศัพท์ในคำบางคำก็มีประโยชน์มาก เพราะคำเหล่านั้นเป็นคำสากลที่ทุกชาติทุกภาษาเข้าใจตรงกันโดยไม่ต้องแปลอีกแล้ว

คำเทียบอังกฤษ - ไทย

integral	ปริพันธ์ (อินทิกรัล)
integration	การหาปริพันธ์ (การอินทิเกรต)
integrand	ปริพันธ์ (อินทิแกรนด์หรือตัวถูกอินทิเกรต)
line integral	ปริพันธ์ตามเส้น
surface	ผิว (ผิวโค้ง หรือพื้นผิว)
order	อันดับ
sequence	ลำดับ

ผู้เรียบเรียงเป็นผู้หนึ่งที่เรียบเรียงหนังสือคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมาก และพิมพ์เผยแพร่ทั่วประเทศแล้ว โดยจะเน้นศึกษาค้นคว้าจากหนังสือที่เป็นแหล่งข้อมูลเริ่มต้นหรือต้นฉบับ กล่าวคือจะศึกษา

หนังสือคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาอังกฤษล้วน ๆ แล้วใช้หนังสือที่คนไทยเรียบเรียงขึ้นมาประกอบ เพราะการค้นคว้าจากแหล่งข้อมูลเริ่มต้น จะได้ข้อมูลหรือบทนิยามที่เขียนเป็นสากลมากกว่าข้อมูลที่บรรยายด้วยถ้อยภาษา จนบางครั้งผู้เรียบเรียงรู้ได้ทันทีว่าหนังสือที่พิมพ์เผยแพร่แล้วใช้หนังสือเล่มใดประกอบ พร้อมทั้งสามารถบอกหน้าที่ใช้อ้างอิงได้ด้วย การอ่านมาก ศึกษามาก การขอร่วมเข้าเรียนในสถาบันการศึกษาที่สอนเนื้อหาเหล่านั้น การปรึกษาผู้รู้ ปรากฏ ทำให้แตกฉาน จนกล่าวได้ว่าคณิตศาสตร์ไม่ใช่วิชาที่ยากเลย

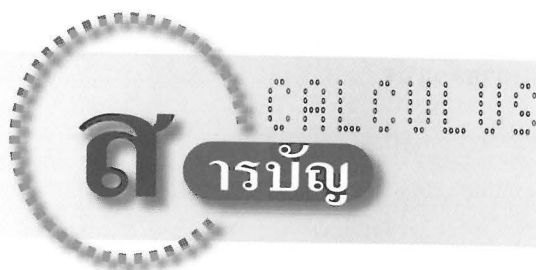
ผู้เรียบเรียงรู้สึกดีใจและรู้สึกภูมิใจที่อย่างน้อยได้มีส่วนช่วยชาติ ช่วยแผ่นดินเกิดเพิ่มหนังสือคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาไทยอีก 1 เล่ม แม้ว่าหลาย ๆ ครั้งจะรู้สึกเหนื่อย รู้สึกล้า กว่าที่จะเขียนเสร็จแต่ละบรรทัด กว่าที่จะพิมพ์เสร็จแต่ละหน้า กว่าหนังสือจะแล้วเสร็จแต่ละเล่มต้องใช้สมาธิ ความเพียร ความพยายาม ความอดทนอย่างมาก ไม่ว่าในด้านการเรียบเรียง การค้นคว้า การพิมพ์ การพิสูจน์อักษร และอื่น ๆ (หนังสือเล่มนี้ใช้เวลาในการพิมพ์ถึง 3 ปีเต็ม ๆ) แต่กระนั้นก็มีผลงานที่เผยแพร่ทั่วประเทศแล้วมากมาย อาทิ

1. คณิตศาสตร์พื้นฐาน
2. แคลคูลัสพื้นฐาน
3. สมการเชิงอนุพันธ์
4. เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส I
5. เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส II
6. เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส III
7. ทอพอโลยี
8. พีชคณิตนามธรรม (กำลังเขียน)
9. การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ (กำลังเขียน)
10. การวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์

ผู้เรียบเรียงขอขอบพระคุณผู้เขียนหนังสือทุกเล่มที่ได้ถูกนำมาใช้อ้างอิง ค้นคว้าประกอบ การเขียนหนังสือเล่มนี้ ดังปรากฏไว้ในบรรณานุกรมท้ายเล่ม

ผ.ศ. เลิศ ลิทธิโกศล

พฤษภาคม 2545



บทที่ 1	เวกเตอร์ในระนาบ	1
1.1	ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์.....	1
1.2	เวกเตอร์ในระนาบ.....	1
1.3	พีชคณิตของเวกเตอร์.....	3
1.4	สมบัติของเวกเตอร์.....	10
1.5	เวกเตอร์หนึ่งหน่วย	10
1.6	ผลคูณเชิงสเกลาร์.....	14
บทที่ 2	เวกเตอร์และเรขาคณิตวิเคราะห์ในปริภูมิ 3 มิติ	20
2.1	ระบบพิกัดฉากในปริภูมิ 3 มิติ	20
2.2	เวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ.....	22
2.3	พีชคณิตของเวกเตอร์.....	22
2.4	สมบัติของเวกเตอร์.....	23
2.5	เวกเตอร์หนึ่งหน่วย	24
2.6	ผลคูณเชิงสเกลาร์.....	28
2.7	ผลคูณเชิงเวกเตอร์.....	29
2.8	โคไซน์ระบุทิศทางของเวกเตอร์.....	33
2.9	เส้นตรงในปริภูมิ 3 มิติ	37
2.10	ระนาบในปริภูมิ 3 มิติ.....	41
2.11	เวกเตอร์อิสระเชิงเส้น	43
บทที่ 3	ผิวและเส้นโค้งปริภูมิ	48
3.1	ผิวและเส้นโค้งปริภูมิ.....	48
3.2	การพิจารณาลักษณะของผิว.....	49
3.3	ผิวกำลังสอง.....	49

บทที่ 4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร	59
4.1 ฟังก์ชันหลายตัวแปร.....	59
4.2 ลิมิต.....	65
4.3 ความต่อเนื่อง.....	70
4.4 อนุพันธ์ย่อย	74
4.5 ความหมายเชิงเรขาคณิตของอนุพันธ์ย่อย.....	75
4.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	79
4.7 อนุพันธ์อันดับสองและอนุพันธ์อันดับสูง	83
4.8 กฎลูกโซ่.....	89
4.9 ค่าเชิงอนุพันธ์รวมและการประมาณค่า	96
4.10 อนุพันธ์ระบุทิศทาง	103
บทที่ 5 การประยุกต์ของอนุพันธ์ย่อย.....	107
5.1 ระบายสัมผัสและเส้นปกติ.....	107
5.2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด.....	111
บทที่ 6 ปริพันธ์หลายชั้น	115
6.1 ปริพันธ์ซ้อนของฟังก์ชันสองตัวแปร.....	115
6.2 ปริพันธ์สองชั้น	119
6.3 การหาปริพันธ์สองชั้น	125
6.4 ปริพันธ์สามชั้น.....	131
6.5 พื้นที่และปริมาตร.....	135
บทที่ 7 ปริพันธ์ตามเส้น.....	140
7.1 เส้นโค้งในระนาบ.....	140
7.2 ปริพันธ์ตามเส้น.....	143
7.3 การหาค่าของปริพันธ์ตามเส้น.....	145
7.4 ปริพันธ์ตามเส้นที่อิสระจากวิถี	147
7.5 ทฤษฎีบทของกรีนในระนาบ.....	151
7.6 การหาพื้นที่โดยใช้ทฤษฎีบทของกรีนใน 2 มิติ.....	154

บทที่ 8 แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของเวกเตอร์	158
8.1 ฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์ของตัวแปรตัวเดียว	158
8.2 ลิมิตของฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์	160
8.3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์	162
8.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์	162
8.5 อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์ของตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัว	168
8.6 ค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์	169
8.7 ความเร็วและความเร่ง	172
8.8 เส้นสัมผัส เส้นปกติ และความโค้ง	173
8.9 ตัวดำเนินการเดล เกรเดียนท์ ไดเวอร์เจนซ์และเคิร์ล	177
บทที่ 9 แคลคูลัสเชิงปริพันธ์ของเวกเตอร์	183
9.1 ปริพันธ์สามัญของฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์	183
9.2 ปริพันธ์ตามเส้น	184
9.3 เส้นไขของปริพันธ์ตามเส้นที่เป็นอิสระจากวิถี	190
9.4 ทฤษฎีบทของกรีนในรูปเวกเตอร์	191
9.5 ตัวอย่างระคน	194
บรรณานุกรม	197-201
ภาคผนวก	202-212
ดรรชนี	213-217

Copyright



1.1 ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์ (scalar quantity and vector quantity)

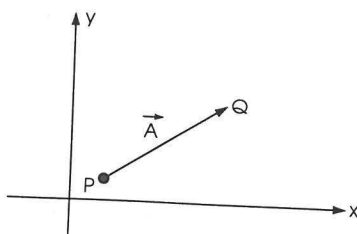
ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) หรือเวกเตอร์ (vector) คือปริมาณที่มีทั้งขนาด (magnitude) และทิศทาง (direction) เราใช้อักษรภาษาอังกฤษแล้วใส่ $\rightarrow$, $\leftarrow$ หรือ $-$ ข้างบนดังนี้ $\vec{a}$, $\vec{a}$, $\vec{a}$, $\vec{A}$, $\vec{A}$, $\vec{A}$ หรืออักษรตัวหนาแทนปริมาณเวกเตอร์

ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) หรือสเกลาร์ (scalar) คือปริมาณที่มีแต่ขนาดไม่มีทิศทาง เราใช้อักษรภาษาอังกฤษธรรมดาแทนปริมาณสเกลาร์

ตัวอย่าง 1.1.1

1. ต่อไปนี้เป็นปริมาณเวกเตอร์: ความเร็ว ความเร่ง แรง การกระจัด (displacement) ไมเมนต์
2. ต่อไปนี้เป็นปริมาณสเกลาร์: มวล เวลา ความยาว พื้นที่ ปริมาตร อุณหภูมิ

1.2 เวกเตอร์ในระนาบ (vector in the plane)



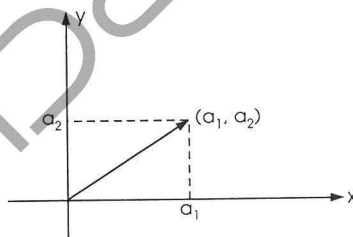
รูปที่ 1

ในเชิงเรขาคณิต รูปที่ 1 เรานิยามส่วนของเส้นตรงระบุทิศทาง (directed line segment) จากจุด P ไปจุด Q ว่าเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ จุด P เรียกว่า จุดเริ่มต้น (initial point) จุด Q เรียกว่า จุดปลายหรือ

จุดสิ้นสุด (terminal point) ความยาวจาก P ถึง Q เรียกว่าขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$ ซึ่งแทนด้วย $\|\overrightarrow{PQ}\|$ หรือ $|\overrightarrow{PQ}|$ เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ ในระนาบหรือเวกเตอร์ใน 2 มิติ อาจแทนด้วยตัวอักษรโดด (single letter) ก็ได้ ในที่นี้เราแทน $\overrightarrow{PQ}$ ด้วย $\vec{A}$

บทนิยาม 1.2.1 เวกเตอร์ 2 มิติ (2 – dimensional vector) หมายถึงคู่อันดับของจำนวนจริง (a_1, a_2) จำนวนจริง a_1 และ a_2 เรียกว่าส่วนประกอบ (components) ของเวกเตอร์ (a_1, a_2) ตามแกน x และแกน y ตามลำดับ
เซตของเวกเตอร์ 2 มิติ เขียนแทนด้วย R^2 นั่นคือ
$$R^2 = \{(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in R\}$$

เวกเตอร์ใน R^2 แทนได้ด้วยจุดในระนาบ xy โดยที่เวกเตอร์ (a_1, a_2) คือจุดซึ่งมีระยะห่างจากแกนพิทัก y เป็นระยะ a_1 และห่างจากแกนพิทัก x เป็นระยะ a_2 หรืออาจหมายถึงเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิดและมีจุดปลายอยู่ที่จุด (a_1, a_2) ดังรูปที่ 2 และเรียกเวกเตอร์นี้ว่าเวกเตอร์ตำแหน่ง (position vector) หรือเวกเตอร์รัศมี (radius vector) ของจุด (a_1, a_2)



รูปที่ 2

บทนิยาม 1.2.2 เวกเตอร์ n มิติ (n – dimensional vector) หมายถึง n สิ่งอันดับ (ordered n – tuple) $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ ของจำนวนจริง $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เรียกจำนวนจริงดังกล่าวว่าส่วนประกอบ ที่ 1, 2, 3, ..., n ตามลำดับ
เซตของเวกเตอร์ n มิติ เขียนแทนด้วย R^n นั่นคือ
$$R^n = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) | a_i \in R, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

จากบทนิยามข้างต้นเราเรียกสมาชิก $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ ของ R^n ว่าเวกเตอร์ n มิติ เรียก R^n ว่าปริภูมิ (space) n มิติ เรียก R^3 ว่าปริภูมิ 3 มิติ

1.3 พีชคณิตของเวกเตอร์ (vector algebra)

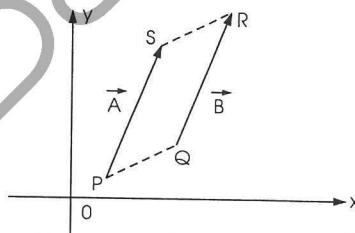
บทนิยาม 1.3.1 ถ้า $\vec{A} = (a_1, a_2)$ แล้วความยาว (length) หรือนอร์ม (norm) ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ เขียนแทนด้วย $\|\vec{A}\|$ บางตำราเขียน $|\vec{A}|$ กำหนดดังนี้

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

ตัวอย่าง 1.3.1 กำหนดให้ $\vec{A} = (-3, 5)$ จงหาขนาดของ $\vec{A}$

วิธีทำ $\|\vec{A}\| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2}$
 $= 34$

บทนิยาม 1.3.2 เวกเตอร์ $\vec{A}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\vec{B}$ ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์ $\vec{A}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\vec{B}$ เราเขียนแทนด้วย $\vec{A} = \vec{B}$ (รูปที่ 1)



รูปที่ 1

บทนิยาม 1.3.3 เวกเตอร์ $\vec{A} = (a_1, a_2)$ และ $\vec{B} = (b_1, b_2)$ จะเรียกว่าเป็นเวกเตอร์ที่เท่ากันก็ต่อเมื่อส่วนประกอบที่สมนัยกันเท่ากัน
 นั่นคือ $\vec{A} = \vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = b_1$ และ $a_2 = b_2$

บทนิยาม 1.3.4 เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector, null vector) เขียนแทนด้วย $\vec{0}$ หมายถึงเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 0 มีทิศทางใดก็ได้

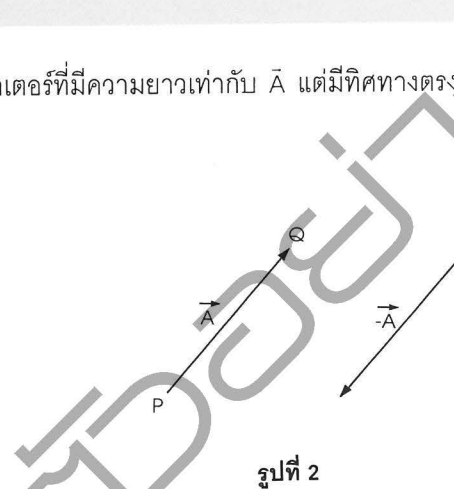
บทนิยาม 1.3.5 ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2)$, $\vec{B} = (b_1, b_2)$ ผลบวก (sum) หรือผลลัพธ์ (resultant) ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ นิยามดังนี้

$$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

บทนิยาม 1.3.6 ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2)$ แล้ว เวกเตอร์ $(-a_1, -a_2)$ เรียกว่าเวกเตอร์นิเสธของ $\vec{A}$ (negation of $\vec{A}$) เขียนแทนด้วย $-\vec{A}$

$-\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีความยาวเท่ากับ $\vec{A}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้าม (รูปที่ 2) และจะเห็นว่า

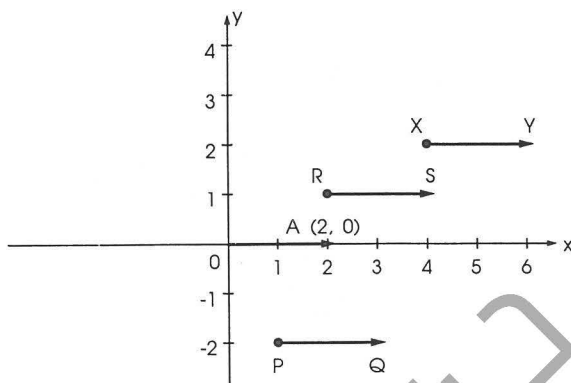
$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$$



บทนิยาม 1.3.7 ผลต่างของเวกเตอร์ $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ เขียนแทนด้วย $\vec{A} - \vec{B}$ คือเวกเตอร์ $\vec{A}$ บวกกับ เวกเตอร์ลบของ $\vec{B}$ นั่นคือ $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

บทนิยาม 1.3.8 ตัวแทนเรขาคณิต (geometric representation) ของ (a_1, a_2) คือส่วนของเส้นตรงใน ระนาบที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด จุดปลายที่จุดในระนาบพิกัด (a_1, a_2) หรือ ส่วนของเส้นตรงที่มีขนาดและทิศทางเดียวกับส่วนของเส้นตรงดังกล่าว

ตัวอย่าง 1.3.2 ให้ $\overrightarrow{OA} = (2, 0)$ หรือ $\vec{A} = (2, 0)$ จะได้ว่า (ดูรูปที่ 3) ส่วนของเส้นตรงระบุทิศทาง $\overrightarrow{PQ}$ ส่วนของเส้นตรงระบุทิศทาง $\overrightarrow{RS}$ และส่วนของเส้นตรงระบุทิศทาง $\overrightarrow{XY}$ เป็นตัวแทน เวกเตอร์ของเวกเตอร์ $(2, 0)$



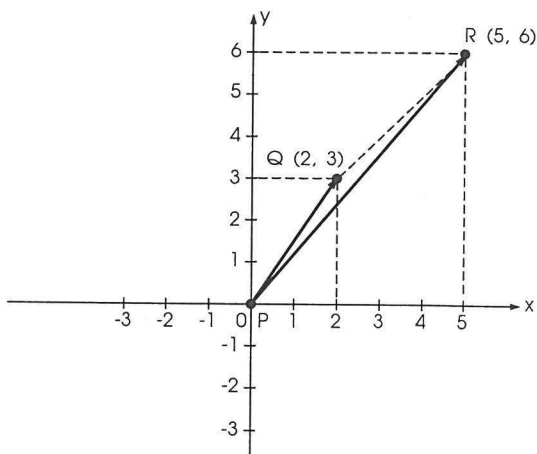
รูปที่ 3

ถ้า $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$ มีจุด $P(a_1, a_2)$ เป็นจุดเริ่มต้น จุด $Q(b_1, b_2)$ เป็นจุดปลายแล้ว $\vec{A} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

ตัวอย่าง 1.3.3 ให้จุด P, Q, R มีพิกัด $(0, 0), (2, 3), (5, 6)$ ตามลำดับ จงหา

1. $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}$
2. $\|\overrightarrow{PQ}\|, \|\overrightarrow{QR}\|$

วิธีทำ



รูปที่ 4

$$1. \overrightarrow{PQ} = (2, 3) - (0, 0) = (2, 3)$$

$$\overrightarrow{QR} = (5, 6) - (2, 3) = (5 - 2, 6 - 3) = (3, 3)$$

$$2. \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

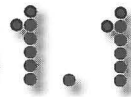
$$\|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

จากข้อ 1 ให้ผู้เรียนหาส่วนประกอบ a_1, a_2 ของ $\overrightarrow{PQ}$ เอง

บทนิยาม 1.3.9 ถ้า $\vec{A} = (a_1, a_2)$ เป็นเวกเตอร์ และ c เป็นสเกลาร์แล้วผลคูณ (product) ของ c และ $\vec{A}$ คือเวกเตอร์ซึ่งเขียนแทนด้วย $c\vec{A}$ นิยามดังนี้

$$c\vec{A} = (ca_1, ca_2)$$

แบบฝึกหัด



ข้อ 1 ถึง 3 จงเขียนรูปของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเขียนรูปของ $\vec{A}$ เมื่อ P เป็นจุดเริ่มต้น พร้อมทั้งหาขนาดของ $\vec{A}$

1. $\vec{A} = (3, 4), P(2, 1)$
2. $\vec{A} = (0, -2), P(-3, 4)$
3. $\vec{A} = (3, \sqrt{2}), P(4, -\sqrt{2})$

ข้อ 4 ถึง 6 จงหาเวกเตอร์ $\vec{A}$ ซึ่งมี $\vec{PQ}$ เป็นตัวแทนเรขาคณิต และเขียนรูป $\vec{PQ}$

4. $P = (3, 7), Q = (5, 4)$
5. $P = (-3, 5), Q = (-5, 2)$
6. $P = (-5, -3), Q = (0, 3)$

ข้อ 7 ถึง 8 จงหาจุด S เพื่อว่า $\vec{PQ}$ และ $\vec{RS}$ เป็นตัวแทนเรขาคณิตของเวกเตอร์เดียวกัน

7. $P = (2, 5), Q = (1, 6), R = (-3, 2)$
8. $P = (0, 3), Q = (5, -2), R = (7, 0)$

ข้อ 9 ถึง 11 จงหาผลบวกของสองเวกเตอร์ต่อไปนี้พร้อมทั้งเขียนรูป

9. $(2, 4), (-3, 5)$
10. $(-3, 0), (4, 5)$
11. $(0, 0), (-2, 2)$

ข้อ 12 ถึง 14 จงลบเวกเตอร์ที่สองจากเวกเตอร์ที่หนึ่งต่อไปนี้พร้อมทั้งเขียนรูป

12. $(4, 5), (-3, 2)$
13. $(-3, -4), (6, 0)$
14. $(0, \sqrt{3}), (-\sqrt{2}, 0)$

ข้อ 15 กำหนดให้ $\vec{A} = (2, -5)$, $\vec{B} = (3, 1)$, $\vec{C} = (-4, 2)$

(1) จงหา $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ พร้อมเขียนรูป

(2) จงหา $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ พร้อมเขียนรูป

ข้อ 16 ถึง 18 กำหนดให้ $\vec{A} = (2, 4)$, $\vec{B} = (4, -3)$, $\vec{C} = (-3, 2)$

16. จงหา $\vec{A} - \vec{B}$

17. จงหา $\|\vec{C} - \vec{B}\|$

18. จงหา $\|7\vec{A} - \vec{B}\|$

ข้อ 19 จงพิสูจน์อสมการรูปสามเหลี่ยมสำหรับเวกเตอร์ (triangle inequality for vector)

$$\|\vec{A} + \vec{B}\| \leq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$$

เฉลยแบบฝึกหัด

1.1

1. 5
2. 2
3. $\sqrt{11}$
4. $(2, -3)$
5. $(-2, -7)$
6. $(5, 6)$
7. $(-4, 3)$
8. $(12, -5)$
9. $(-1, 9)$
10. $(1, -5)$
11. $(-2, 2)$
12. $(7, 3)$
13. $(-9, -4)$
14. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
15. $(1) (1, -2) (2) (1, -2)$
16. $(-2, 7)$
17. $\sqrt{74}$
18. $\sqrt{1061}$

1.4 สมบัติของเวกเตอร์ (properties of vector)

ทฤษฎีบท 1.4.1 สมบัติของการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
(properties of vector addition and scalar multiplication)

ให้ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\mathbb{R}^2$ และ m, n เป็นสเกลาร์ใด ๆ แล้วการบวก
เวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์สอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

1. $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก
2. $\exists \vec{O} \in \mathbb{R}^2$ ซึ่ง $\vec{A} + \vec{O} = \vec{A}, \forall \vec{A} \in \mathbb{R}^2$ สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก
3. $\forall \vec{A} \in \mathbb{R}^2, \exists (-\vec{A}) \in \mathbb{R}^2$ ซึ่ง $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{O}$ สมบัติการมีอินเวอร์สสำหรับการบวก
4. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ สมบัติการสลับที่
5. $(m + n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$ สมบัติการกระจาย
6. $m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$ สมบัติการกระจาย
7. $(mn)\vec{A} = m(n\vec{A}) = mn\vec{A}$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ
8. $1(\vec{A}) = \vec{A}$ สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณของสเกลาร์

พิสูจน์ ให้เป็นแบบฝึกหัด

เรียกเซตของเวกเตอร์ใด ๆ พร้อมการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ซึ่งสอดคล้องสมบัติข้อ 1 ถึง 8 ในทฤษฎีบทข้างต้นว่าเวกเตอร์สเปซหรือปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) และเรียกสมาชิกของเซตนั้นว่าเวกเตอร์ ดังนั้น $(\mathbb{R}^2, \text{การบวก, การคูณ})$ ในทฤษฎีบทดังกล่าวเป็นปริภูมิเวกเตอร์

1.5 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)

บทนิยาม 1.5.1 เรียกเวกเตอร์ $\vec{A}$ ว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) ถ้าขนาดของ $\vec{A}$ เท่ากับ 1 หน่วย

ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ซึ่ง $\|\vec{A}\| \neq 0$ แล้ว เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{A}$ คือ $\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$

ตัวอย่าง 1.5.1 จงแสดงว่า $\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย เมื่อ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ซึ่ง $\|\vec{A}\| \neq 0$

วิธีทำ จะหาขนาดของเวกเตอร์ที่โจทย์ต้องการจะได้

$$\left\| \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} \right\| = \frac{1}{\|\vec{A}\|} \|\vec{A}\|$$

$$= 1$$

เวกเตอร์ใด ๆ $\vec{A} = (a_1, a_2)$ ใน R^2 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปลักษณะพิเศษ คือ

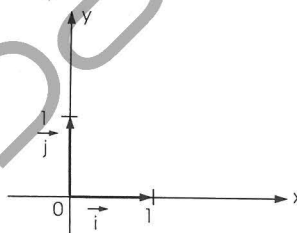
$$\vec{A} = (a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1)$$

เวกเตอร์ $(1, 0)$ และ $(0, 1)$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

บทนิยาม 1.5.2 เวกเตอร์ฐาน (base vector)

เรียกเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกน x และแกน y ตามลำดับ $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$ ว่าเวกเตอร์ฐาน (base vector, basis vector) ของพิกัดฉาก 2 มิติ

จากบทนิยามข้างต้น เขียนเวกเตอร์ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ ได้ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

ตัวอย่าง 1.5.2 จงเขียนเวกเตอร์ $(3, -4)$ ในพจน์ของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$

วิธีทำ

$$(3, -4) = 3(1, 0) + (-4)(0, 1)$$

$$= 3\vec{i} - 4\vec{j}$$

ตัวอย่าง 1.5.3 กำหนดให้ $\vec{A} = (3, 1)$ และ $\vec{B} = (-2, 4)$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{A} - \vec{B}$

วิธีทำ

$$\vec{A} - \vec{B} = (3, 1) - (-2, 4) = (5, -3) = 5\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\text{ดังนั้น } \|\vec{A} - \vec{B}\| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ต้องการ = $\vec{U}$

$$= \frac{5}{\sqrt{34}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{34}}\vec{j}$$

แบบฝึกหัด

1.3

ข้อ 1 ถึง 4 กำหนดให้ $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ และ $\vec{B} = 4\vec{i} - \vec{j}$

1. จงหา $\vec{A} + \vec{B}$
2. จงหา $5\vec{A} - 6\vec{B}$
3. จงหา $\|\vec{A} - \vec{B}\|$
4. จงหา $\|3\vec{A} - 2\vec{B}\|$
5. กำหนดให้ $\vec{A} = 8\vec{i} + 5\vec{j}$ และ $\vec{B} = 3\vec{i} - \vec{j}$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{A} + \vec{B}$
6. กำหนดให้ $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{B} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{C} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ จงหาสเกลาร์ h, k ซึ่ง

$$\vec{C} = h\vec{A} + k\vec{B}$$

เฉลยแบบฝึกหัด

1.2

1. $6\vec{i} + 2\vec{j}$

2. $-14\vec{i} + 21\vec{j}$

3. $2\sqrt{10}$

4. $5\sqrt{5}$

5. $\frac{11}{\sqrt{137}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{137}}\vec{j}$

6. $h = 2, k = 3$

ตัวอย่าง



ผ.ศ. เลิศ สิทธิโกศล

การศึกษา Cert. in Computer Programming

กศ.บ. (คณิตศาสตร์)

ด.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์)

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปัจจุบัน

กำลังศึกษาต่อปริญญาเอก

ณ Curtin University of Technology,
Perth, Western Australia

ผลงานทางวิชาการ

1. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1
 2. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2
 3. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 3
 4. คณิตศาสตร์พื้นฐาน
 5. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
 6. การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์
 7. พีชคณิตนามธรรม
 8. ทอพอโลยี
 9. การวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์
- และอีกมากมายอาทิ คณิตศาสตร์ ม.1-ม.6

ความสามารถ

สอนคณิตศาสตร์และสถิติได้หลายคอร์ส :

Calculus and Analytic Geometry 1-2-3 ❖ Advance Calculus ❖ Set Theory ❖ Topology ❖
Differential Equations ❖ Mathematical Analysis ❖ Linear Algebra I-II ❖ Group Theory ❖
Number Theory ❖ Complex Analysis ❖ Probability ❖ Statistics I-II ❖ Modern Algebra ❖
Operation Research I-II ❖ Vector Analysis ❖ Modern Mathematics ❖ Inferential Statistics ❖
Fundamentals of Geometry ❖ Basic Concepts of Mathematics ❖ Abstract Algebra I-II ❖
Mathematical Logic ❖ Experimental Design ❖ Statistics Applied to Behavioral Science I-III ❖
Philosophy of Mathematics and Mathematics Education ❖ Individual Studies in Mathematics ❖
Principle of Mathematics ❖ Mathematical Statistics ❖ Statistical Analysis

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย



บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
SKYBOOK COMPANY LIMITED
215/216-217 ซ.โพธิ์-ทอง ถนนสุขุมวิท แขวงคลองเตย เขตคลองเตย กรุงเทพฯ 10110
โทร. 0-2562-1125-7, 0-2562-5119 โทรสาร 0-2562-5109
E-mail: skybook.b9c@hotmail.com

www.skybook.co.th

แคลคูลัส
และเรขาคณิตวิเคราะห์ 3

ISBN 974-389-309-1



9 789743 893094

ราคา 150 บาท