

รวมสูตร

คณิตวิศวะ

สำหรับ

**การศึกษาด้านวิศวกรรมศาสตร์
และ วิทยาศาสตร์**

ครอบคลุม 2000 สูตร สำหรับ

นักศึกษาสาขาวิศวกรรมศาสตร์
นักศึกษาสาขาวิทยาศาสตร์
ผู้สนใจงานด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นักศึกษาที่กำลังติวเข้มเพื่อเตรียมตัวสอบ
ในสาขาวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์

โดย... **มกัทร วัฒนเทพินทร์**
ประเสริฐ ปิ่นปฐมรัฐ

รวมสูตร

คณิตวิเศษฯ

สำหรับ

การศึกษาศาขวิทวกรรมศาสตร์

และ วิทยาศาสตร์

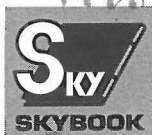
โดย

**นภัทร วัฒนเทพินทร์
ประเสริฐ ปันปฐมรัฐ**

นางสาว 11

หนังสือคณิตวิเศษฯ

(18-08-47)



สกายบุ๊กส์

หมู่บ้านรัตนโกสินทร์ 200 ปี (รังสิต)

SKYBOOK COMPANY LIMITED

515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

โทร. 958-1125-7, 567-5119 โทรสาร. 567-5105

“ รวมสูตรคณิตวิเศษฯ ”

พิมพ์ครั้งที่ 1 กรกฎาคม 2543

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย
ห้ามตัดลอกถ่ายเอกสารหรือพิมพ์
หรือวิธีหนึ่งวิธีใดของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาต
จากบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

ราคา 95 บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

นักثر วังเทพินทร์

รวมสูตรคณิตวิเศษฯ -- กรุงเทพฯ : สกายบุ๊กส์ , 2543.

172 หน้า

1. คณิตศาสตร์ -- สูตรสมการ 1. ชื่อเรื่อง

510 . 212

ISBN : 974-8516-91-1

S7901-30-07-00

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย



สกายบุ๊กส์

หมู่บ้านรัตนโกสินทร์ 200 ปี (รังสิต)

SKYBOOK COMPANY LIMITED

515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

โทร. 958-1125-7, 567-5119 โทรสาร. 567-5105

“เรามุ่งหวังให้เด็กเด็กเรียนรู้หลังรักการอ่าน”

พิมพ์ที่ บริษัท สยามสปอร์ต ซินดิเคท จำกัด

459 ซอยพญาสุพรรณภิรมย์ (ลาดพร้าว 48) แขวงสามเสนนอก เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310

โทรศัพท์ : 6943010

คำนำ

การรวบรวมสูตรต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์สำหรับนักศึกษาที่กำลังศึกษาในระดับอุดมศึกษา สาขาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี รวมทั้งนักศึกษาในสายวิศวกรรมศาสตร์ทุกสาขา มีความจำเป็นจะต้องใช้งานและสามารถเปิดสูตรต่าง ๆ ใช้อย่างรวดเร็ว ผู้เรียบเรียงจึงได้ดำเนินการเรียบเรียงหนังสือ รวมสูตรคณิตวิเศษ สำหรับการศึกษาศาสาวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ เล่มนี้ ขึ้นจากตำราอ้างอิงหลายเล่ม จึงหวังว่าจะเกิดประโยชน์ต่อผู้เกี่ยวข้องบ้างไม่มากนักน้อย

สาเหตุที่เป็นแรงจูงใจให้เรียบเรียงหนังสือเล่มนี้ขึ้น เนื่องจากว่าในการที่ผู้เรียบเรียงต้องการใช้สูตรหรือฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์บางฟังก์ชัน ต้องไปค้นหาจากภาคผนวกของตำราหลาย ๆ เล่มจึงจะพบและนำมาใช้งานได้ ซึ่งทำให้เสียเวลาในการทำงานมากเกินไป จึงมีแนวคิดว่าจะได้รวบรวมเรียบเรียงสูตรต่าง ๆ เหล่านี้ไว้ในที่เดียวกัน น่าจะเป็นประโยชน์แก่ผู้สนใจงานดังกล่าว



(นภัทร วัฒนเทพินทร์)

บทที่ 1	ค่าคงที่ที่สำคัญ	6
บทที่ 2	ตัวคูณและตัวประกอบ	8
บทที่ 3	สูตรไบโนเมียลและสัมประสิทธิ์ไบโนเมียล	10
บทที่ 4	สูตรเรขาคณิต	12
บทที่ 5	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	22
บทที่ 6	เลขเชิงซ้อน	35
บทที่ 7	ลอการิทึมและฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	38
บทที่ 8	ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	41
บทที่ 9	การแก้ปัญหасวมการพีชคณิต	48
บทที่ 10	ระนาบเรขาคณิตที่ว่าด้วยการจำแนกจุด เส้น และพื้นที่	50
บทที่ 11	เส้นโค้งพิเศษบนระนาบ	58
บทที่ 12	สูตรเรขาคณิตที่ว่าด้วยการจำแนกจุด เส้น และพื้นที่	65

บทที่ 13	อนุพันธ์	76
บทที่ 14	การอินทิกรัลแบบไม่กำหนด	81
บทที่ 15	การอินทิกรัลแบบกำหนด	121
บทที่ 16	อนุกรมที่สำคัญ	129
บทที่ 17	ตัวเลขของเบอร์нулลีและอูเลอร์	140
บทที่ 18	เกมมาฟังก์ชันและบีตาฟังก์ชัน	142
บทที่ 19	สมการดิฟเฟอเรนเชียลเบื้องต้น	145
บทที่ 20	การวิเคราะห์เวกเตอร์	149
บทที่ 21	การแปลงลาปลาซ	162



1.1 ค่าคงที่ที่สำคัญ

1. π = 3.14159 26535 89793 ...
2. e = 2.71828 18284 59045 ...
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) =$ ลอการิทึมฐานธรรมชาติ
3. e^π = 23.14069 26327 ...
4. e^e = 15.15426 22414 ...
5. $e^{\frac{1}{e}}$ = 1.78107 24179 90197 ...
6. $\sqrt{e}$ = 1.64872 12707 00128 ...
7. $\sqrt{2}$ = 1.41421 35623 ...
8. $\sqrt{3}$ = 1.73205 08075 ...
9. $\sqrt{5}$ = 2.23606 79774 ...
10. $\sqrt[3]{2}$ = 1.25992 1050 ...
11. $\sqrt[3]{3}$ = 1.44224 9570 ...
12. $\sqrt[5]{2}$ = 1.14869 8355 ...
13. $\sqrt[5]{3}$ = 1.24573 0940 ...
14. π^e = 22.45915 77183 61045 ...
15. $\log_{10} 2$ = 0.30102 99956 ...
16. $\log_{10} 3$ = 0.47712 12547 19662 ...
17. $\log_{10} e$ = 0.43429 44819 03251 ...

$$18. \log_{10} \pi = 0.49714 \ 98726 \ 94133 \dots$$

$$19. \log_e 10 = \ln 10 = 2.30258 \ 50929 \ 94045 \dots$$

$$20. \log_e 2 = \ln 2 = 0.69314 \ 71805 \ 59945 \dots$$

$$21. \log_e 3 = \ln 3 = 1.09861 \ 22886 \ 68109 \dots$$

$$22. \gamma = 0.57721 \ 56649 \ 01532 \dots$$

= ค่าคงที่ของอูลเลอร์

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

$$23. \sqrt{\pi} = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.77245 \ 38509 \ 05516 \dots$$

เมื่อ Γ คือฟังก์ชันแกมมา

$$24. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2.67893 \ 85347 \dots$$

$$25. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 3.62560 \ 99082 \dots$$

$$26. 1 \text{ เรเดียน} = 180^\circ/\pi = 57.29577 \ 95130 \dots$$

$$27. 1^\circ = \pi/180 \text{ เรเดียน} = 0.01745 \ 32925 \ 19943 \dots \text{ เรเดียน}$$

2 ตัวคูณและตัวประกอบ

2.1 ผลคูณของตัวประกอบยกกำลัง 2, 3, 4, 5, 6

1. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
3. $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
4. $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
5. $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
6. $(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$
7. $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$
8. $(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$
9. $(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$
10. $(x - y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$
11. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
12. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
13. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
14. $x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$
15. $x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$
16. $x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$
17. $x^6 - y^6 = (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
18. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
19. $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$

2.2 ผลคูณของตัวประกอบเลขยกกำลัง n เมื่อ n คือเลขจำนวนเต็มบวก

$$\begin{aligned}
 20. \quad x^{2n+1} - y^{2n+1} &= (x - y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \dots + y^{2n}) \\
 &= (x - y) \left(x^2 - 2xy \cos \frac{2\pi}{2n+1} + y^2 \right) \left(x^2 - 2xy \cos \frac{4\pi}{2n+1} + y^2 \right) \dots \left(x^2 - 2xy \cos \frac{2n\pi}{2n+1} + y^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21. \quad x^{2n+1} + y^{2n+1} &= (x + y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \dots + y^{2n}) \\
 &= (x + y) \left(x^2 + 2xy \cos \frac{2\pi}{2n+1} + y^2 \right) \left(x^2 + 2xy \cos \frac{4\pi}{2n+1} + y^2 \right) \dots \left(x^2 + 2xy \cos \frac{2n\pi}{2n+1} + y^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22. \quad x^{2n} - y^{2n} &= (x - y)(x + y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots) \\
 &= (x - y)(x + y) \left(x^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{n} + y^2 \right) \left(x^2 - 2xy \cos \frac{2\pi}{n} + y^2 \right) \dots \left(x^2 - 2xy \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + y^2 \right)
 \end{aligned}$$

3 สูตรไบนอมิเยล และสัมประสิทธิ์ไบนอมิเยล

3.1 แฟคทอเรียลที่ n

ถ้า $n = 1, 2, 3 \dots$ แฟคทอเรียล n หรือ n แฟคทอเรียล คือ

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$$

เมื่อ $n = 0$ แฟคทอเรียลที่ 0 คือ

$$0! = 1$$

3.2 สูตรไบนอมิเยลสำหรับเลขจำนวนเต็มบวก

ถ้า $n = 1, 2, 3, \dots$ ดังนั้น

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \dots + y^n$$

3.3 สูตรสัมประสิทธิ์ไบนอมิเยล

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

เมื่อสัมประสิทธิ์นี้เรียกว่าสัมประสิทธิ์ไบนอมิเยล โดยกำหนดให้

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

3.4 คุณสมบัติของสัมประสิทธิ์ไบนอมิเยล

$$1. \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

2. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$
3. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$
4. $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$
5. $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}$
6. $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$
7. $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$
8. $\binom{m}{0} \binom{n}{p} + \binom{m}{1} \binom{n}{p-1} + \dots + \binom{m}{p} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{p}$
9. $(1) \binom{n}{1} + (2) \binom{n}{2} + (3) \binom{n}{3} + \dots + (n) \binom{n}{n} = n2^{n-1}$
10. $(1) \binom{n}{1} - (2) \binom{n}{2} + (3) \binom{n}{3} - \dots + (-1)^{n+1} (n) \binom{n}{n} = 0$

3.5 สูตรของ Multinomial

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_p!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p}$$

ซึ่งผลรวมเกิดจากค่าของจำนวนเต็มบวก $n_1, n_2, \dots, n_p$

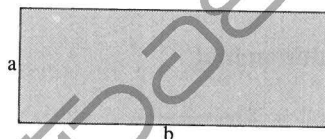
เมื่อค่าของ $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$



4.1 สูตรเรขาคณิต

1. สี่เหลี่ยมผืนผ้า

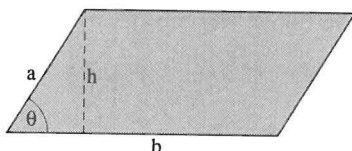
$$\begin{aligned}\text{พื้นที่} &= ab \\ \text{เส้นรอบรูป} &= 2a + 2b\end{aligned}$$



รูปที่ 4.1

2. สี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่} &= bh = ab \sin \theta \\ \text{เส้นรอบรูป} &= 2a + 2b\end{aligned}$$



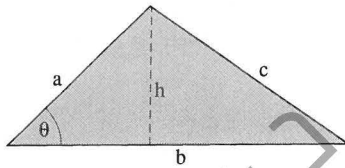
รูปที่ 4.2

3. สามเหลี่ยม

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่} &= \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} ab \sin \theta \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{aligned}$$

$$\text{ซึ่ง } s = \frac{1}{2} (a + b + c) = \text{ครึ่งหนึ่งของเส้นรอบรูป}$$

$$\text{เส้นรอบรูป} = a + b + c$$

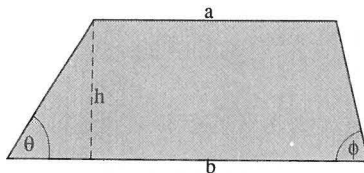


รูปที่ 4.3

4. สี่เหลี่ยมคางหมู

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2} h(a + b)$$

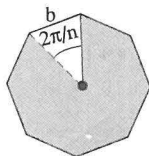
$$\begin{aligned}\text{เส้นรอบรูป} &= a + b + h \left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \phi} \right) \\ &= a + b + h(\csc \theta + \csc \phi)\end{aligned}$$



รูปที่ 4.4

5. กฎของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าจำนวน n ด้าน

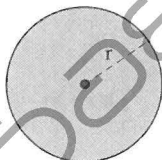
$$\begin{aligned}\text{พื้นที่} &= \frac{1}{4} nb^2 \cot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{4} nb^2 \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)} \\ \text{เส้นรอบรูป} &= nb\end{aligned}$$



รูปที่ 4.5

6. วงกลม

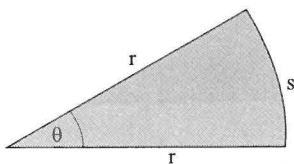
$$\begin{aligned}\text{พื้นที่} &= \pi r^2 \\ \text{เส้นรอบรูป} &= 2\pi r\end{aligned}$$



รูปที่ 4.6

7. เลี้ยวของวงกลม

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่} &= \frac{1}{2} r^2 \theta \quad [\theta \text{ เป็นเรเดียน}] \\ \text{ความยาวส่วนโค้ง } s &= r\theta\end{aligned}$$

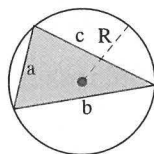


รูปที่ 4.7

8. รัศมีของวงกลมที่บรรจุด้วยสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

ซึ่ง $s = \frac{1}{2}(a+b+c) =$ ครึ่งหนึ่งของเส้นรอบรูป

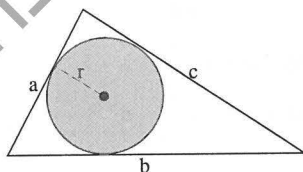


รูปที่ 4.8

9. รัศมีของวงกลมที่อยู่ภายในสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

ซึ่ง $s = \frac{1}{2}(a+b+c) =$ ครึ่งหนึ่งของเส้นรอบรูป

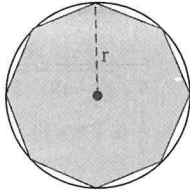


รูปที่ 4.9

10. รูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ในวงกลม

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2} nr^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} nr^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

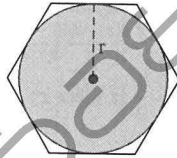
$$\text{เส้นรอบรูป} = 2nr \sin \frac{\pi}{n} = 2nr \sin \frac{180^\circ}{n}$$



รูปที่ 4.10

11. รูปหลายเหลี่ยมที่มีวงกลมบรรจุอยู่ภายใน

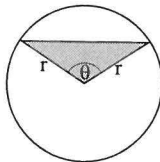
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่} &= nr^2 \tan \frac{\pi}{n} = nr^2 \tan \frac{180^\circ}{n} \\ \text{เส้นรอบรูป} &= 2nr \tan \frac{\pi}{n} = 2nr \tan \frac{180^\circ}{n} \\ \text{เมื่อ } n &= \text{จำนวนเหลี่ยม} \end{aligned}$$



รูปที่ 4.11

12. เส้นโค้งวงกลม

$$\text{พื้นที่ของเส้นโค้งวงกลม} = \frac{1}{2} r^2 (\theta - \sin \theta)$$



รูปที่ 4.12

ประวัติผู้เขียน



นัทธร วิจารณ์เทพินทร์

• การทำงาน

ตำแหน่งอาจารย์ 3 ระดับ 7

ทำหน้าที่ ผู้ช่วยผู้อำนวยการฝ่ายวิจัย
และฝึกอบรม

สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตนนทบุรี

• การศึกษา

ครุศาสตรบัณฑิตสาขานวัตกรรมมหาบัณฑิต

สาขาไฟฟ้า พ.ศ. 2534

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า พระนครเหนือ

• ประสบการณ์

ผ่านการฝึกอบรม และศึกษาดูงานทางด้าน
อิเล็กทรอนิกส์กำลังและการขับเคลื่อนไฟฟ้า
จากประเทศสหรัฐอเมริกา พ.ศ. 2536

และประเทศสหพันธรัฐเยอรมัน พ.ศ. 2539

• ความชำนาญพิเศษ

- ด้านการพัฒนาสื่อการเรียนการสอนในสาขาไฟฟ้า
และอิเล็กทรอนิกส์

- ด้านระบบอิเล็กทรอนิกส์กำลัง และการขับเคลื่อนไฟฟ้า

ประวัติผู้เขียน



ประเสริฐ ปันปฐมรัฐ

จบการศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิศวกรรมเทคโนโลยี

สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล พ.ศ. 2528

จบการศึกษาระดับปริญญาโท วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า

มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ พ.ศ. 2539

ทำหน้าที่ผู้อำนวยการฝ่ายบริการการศึกษา สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล
วิทยาเขตสาขลา



สกายบุ๊กส์
SKYBOOK COMPANY LIMITED

จัดทำโดย บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
515/276-8 หมู่บ้านรัตนโกสินทร์ ถ.รังสิต-ปทุมธานี
ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
โทร. 958-1125-7, 567-5119 โทรสาร. 567-5105

รวมสูตรคณิตวิเศษ

ISBN 974-8516-91-1



9 789748 516912

ราคา 95 บาท