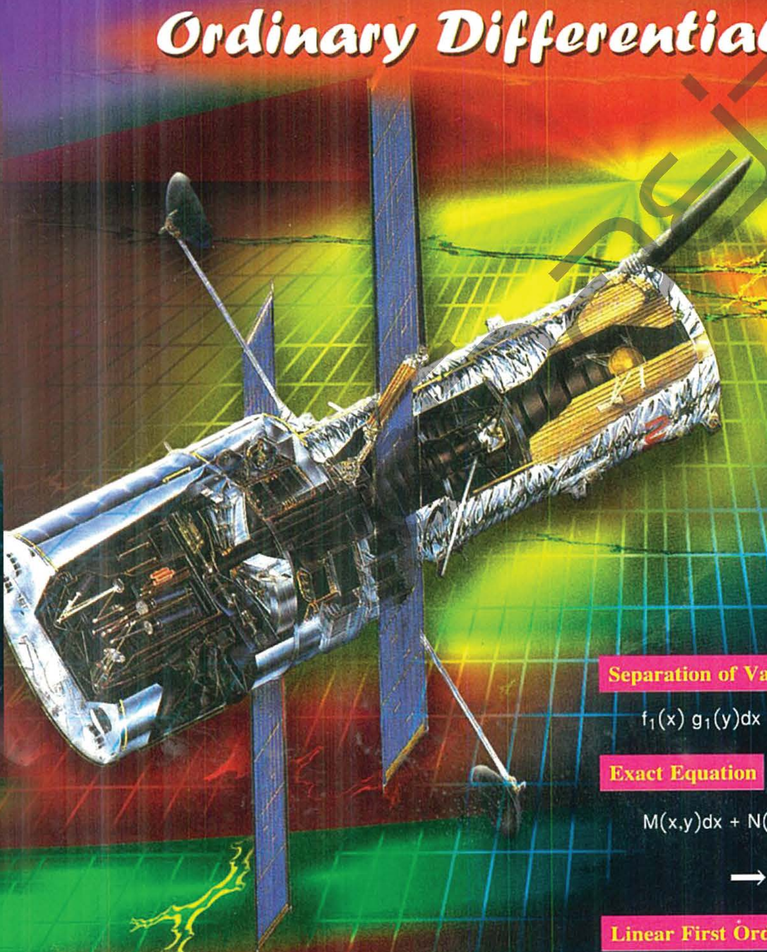
SKYBOOK
ชื่อหนังสือ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
บาร์โค้ด 9789743891328
ISBN 974-389-132-3

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

Ordinary Differential Equation



Separation of Variables

$$f_1(x)\,g_1(y)dx + f_2(x)\,g_2(y)dy = 0 \longrightarrow \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C$$

Exact Equation

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\longrightarrow \int M\partial x + \int \left(N + \frac{\partial}{\partial y}\int M\partial x \right) dy = C$$

Linear First Order Equation

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \longrightarrow ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}dx + C$$

Laplace Transform

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - s^{n-3}f^{(2)}(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

ศ. เลิศ สิทธิโกศล

สมการ
เชิงอนุพันธ์สามัญ

Ordinary Differential Equation

ผศ. เลิศ สิทธิโกศล

Cert. in Computer Programming

กศ.บ. (คณิตศาสตร์) ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์)

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

SKYBOOK

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

หมู่บ้านรัตนโกสินทร์ 200 ปี (รังสิต)

SKYBOOK COMPANY LIMITED

โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105

515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

E-mail: skybook1992@hotmail.com

" สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ "

พิมพ์ครั้งที่ 1 ตุลาคม 2544

ราคา 150 บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

เลิศ สิทธิโกศล

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ --- กรุงเทพฯ : สกายบุ๊กส์, 2544.

284 หน้า

1. สมการเชิงอนุพันธ์ I. ชื่อเรื่อง

515 . 35

ISBN 974-389-132-3

S7901-30-10-01

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย

SKYBOOK

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
หมู่บ้านรัตนโกสินทร์ 200 ปี (รังสิต)
SKYBOOK COMPANY LIMITED
โทร. 0-29581125-7, 0-25675119 โทรสาร. 0-25675105
515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
E-mail: skybook1992@hotmail.com

"เรามุ่งหวังให้เด็กเด็กรุ่นหลังรักการอ่าน"

พิมพ์ที่ บริษัท สยามสปอร์ต ซินดิเคท จำกัด
459 ซอยพิบูลย์อุปถัมภ์ (ลาดพร้าว 48) แขวงสามเสนนอก เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310
โทรศัพท์ : 0-26943010

คำนำ

หนังสือสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเล่มนี้ เหมาะสำหรับผู้สนใจทั่วไปและนิสิตนักศึกษาในระดับปริญญาตรีที่เรียนในสาขาคณิตศาสตร์ เคมี ฟิสิกส์ วิศวกรรมศาสตร์ วิทยาการคอมพิวเตอร์ วิทยาศาสตร์การอาหาร เทคโนโลยีอุตสาหกรรมและสาขาที่เรียนเกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์ โดยมีเนื้อหาประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ที่กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับ ดีกรี ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์และการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 ดีกรี 1 กล่าวถึงรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์ในทางด้านชีววิทยา เคมี ฟิสิกส์และคณิตศาสตร์ สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ผลการแปลงลาปลาซ ผลการแปลงผกผันลาปลาซ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับผลการแปลงลาปลาซ การแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซและการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

ผู้เรียบเรียงได้ใช้หนังสือศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2538 ในการอ้างอิงถึงการบัญญัติศัพท์ที่เป็นภาษาไทย แต่ก็ยังมีคำศัพท์บางคำที่ใช้จนคุ้นเคยแล้ว ผู้เรียบเรียงจะใช้คำทั้งสองโดยการเชื่อมคำเหล่านั้นด้วยคำว่า “หรือ” ก่อน แล้วจึงค่อยตัดออกให้เหลือเฉพาะคำศัพท์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน เหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะการค่อย ๆ เปลี่ยนทีละเล็กละน้อยจะทำให้คนทั้งสองกลุ่มค่อย ๆ ปรับเข้าหากันได้ อาทิคำว่า integration ซึ่งคำนี้เราใช้ (คุ้นเคย) ว่า การอินทิเกรต แต่ในศัพท์ฉบับราชบัณฑิตยสถานใช้การหาปริพันธ์ ดังนั้นผู้เรียบเรียงจะใช้คำว่าการอินทิเกรตหรือการหาปริพันธ์ (integration) แล้วจึงค่อย ๆ ตัดคำว่าการอินทิเกรตออกจนเหลือเพียงคำว่า การหาปริพันธ์ สำหรับคำอื่น ๆ จะยกตัวอย่างพอเป็นที่สังเขป เช่น อินทิเกรตหรือหาปริพันธ์ (integrate) อินทิกรัลหรือปริพันธ์ (integral) ตัวถูกอินทิเกรตหรือปริพัทธ์ (integrand) เป็นต้น ถ้าศึกษาให้ลึก ๆ จะพบว่ามีคำหลายคำที่ไม่มีบัญญัติไว้ การเขียนทับศัพท์ในคำบางคำก็มีประโยชน์มาก เพราะคำเหล่านั้นเป็นคำสากลที่ทุกชาติทุกภาษาเข้าใจตรงกันโดยไม่ต้องแปลอีกแล้ว

ผู้เรียบเรียงเป็นผู้หนึ่งที่เรียบเรียงหนังสือคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมาก และพิมพ์เผยแพร่ทั่วประเทศแล้ว โดยจะเน้นศึกษาค้นคว้าจากหนังสือที่เป็นแหล่งข้อมูลเริ่มต้นหรือต้นฉบับ กล่าวคือ จะศึกษาหนังสือคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาอังกฤษล้วน ๆ แล้วใช้หนังสือที่คนไทยเรียบเรียงขึ้นมาประกอบ เพราะการค้นคว้าจากแหล่งข้อมูลเริ่มต้น จะได้ข้อมูลหรือบทนิยามที่เขียนเป็นสากลมากกว่าข้อมูลที่บรรยายด้วย

ถ้อยภาษา จนบางครั้งผู้เรียบเรียงรู้ได้ทันทีว่าหนังสือที่พิมพ์เผยแพร่แล้วใช้หนังสือเล่มใดประกอบ พร้อมทั้งสามารถบอกหน้าที่ที่ใช้อ้างอิงได้ด้วย การอ่านมาก ศึกษามาก ทำให้แตกฉาน จนกล่าวได้ว่าคณิตศาสตร์ไม่ใช่วิชาที่ยากเลย

ผู้เรียบเรียงรู้สึกดีใจและรู้สึกภูมิใจที่อย่างน้อยได้มีส่วนช่วยชาติ ช่วยแผ่นดินเกิดเพิ่มหนังสือคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาไทยอีก 1 เล่ม แม้ว่าหลาย ๆ ครั้งจะรู้สึกเหนื่อย (เหนื่อยมาก ๆ) รู้สึกล้า กว่าจะเขียนเสร็จแต่ละบรรทัด กว่าจะพิมพ์เสร็จแต่ละหน้า กว่าหนังสือจะแล้วเสร็จแต่ละเล่มต้องใช้สมาธิ ความเพียร ความพยายาม ความอุตสาหะอย่างมาก ไม่ว่าในด้านการเรียบเรียง การค้นคว้า การพิมพ์ การพิสูจน์อักษร และอื่น ๆ โดยยึดคติที่ว่า การทำบุญที่ยิ่งใหญ่ที่สุดคือการให้ความรู้เพราะถึงแม้นตัวเองจะตายไปแต่หนังสือก็ยังคงอยู่ตลอดไป มีชีวิตเมื่อมีความรู้ก็ต้องให้ ก็ต้องเผยแพร่ อย่างน้อยที่สุดก็มีประโยชน์กับส่วนรวม ประเทศชาติและแผ่นดินเกิด (หนังสือเล่มนี้ใช้เวลาในการพิมพ์ถึง 2 ปี กว่า ๆ ซึ่งยังไม่รวมถึง การเรียบเรียง การพิสูจน์อักษร) แต่กระนั้นก็มีผลงานที่พิมพ์เผยแพร่ทั่วประเทศแล้วมากมาย อาทิ

1. คณิตศาสตร์พื้นฐาน
2. แคลคูลัสพื้นฐาน
3. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
4. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ I
5. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ II
6. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ III
7. ทอพอโลยี
8. พีชคณิตนามธรรม
9. การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ (กำลังเขียน)

ผู้เรียบเรียงขอขอบพระคุณผู้เขียนหนังสือทุกเล่มที่ได้ถูกนำมาใช้อ้างอิง ค้นคว้าประกอบการเขียนหนังสือเล่มนี้ ดังปรากฏไว้ในบรรณานุกรมท้ายเล่ม

เลิศ สิทธิโกศล

เมษายน 2542

โทร. 02-9847358

01-3820417

สารบัญ

1 สมการเชิงอนุพันธ์

วิชาสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับสมการที่เขียนอยู่ในรูปอนุพันธ์ (derivative) หรือค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของฟังก์ชันตัวไม่รู้ค่า ซึ่งเรามีเป้าหมายจะแก้สมการเพื่อหาฟังก์ชันตัวไม่รู้ค่านี้ กว่าวิชาสมการเชิงอนุพันธ์จะเกิดเป็นรูปเป็นร่างดังเช่นในปัจจุบัน ต้องใช้เวลายาวนานในการพัฒนาถึงสามร้อยกว่าปี เพราะนักคณิตศาสตร์แต่ละท่านต่างคนต่างก็ศึกษา ยิ่งในช่วงแรก ๆ แล้วมีการศึกษาในเรื่องนี้ไม่มากนัก ในการพัฒนาจนถึงปัจจุบันนี้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านที่มีส่วนช่วยให้วิชานี้เจริญก้าวหน้า ไม่เพียงแต่นักคณิตศาสตร์เท่านั้น นักฟิสิกส์ นักเคมี นักชีววิทยา และอื่น ๆ ได้นำความรู้เหล่านี้สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ตามธรรมชาติทางด้านฟิสิกส์ วิศวกรรม เคมี ชีววิทยา และอื่น ๆ อีกมากมาย

ตัวอย่างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

การหล่นของก้อนหิน :	$y'' = g$
การเคลื่อนที่ของลูกตุ้ม :	$L'' + g \sin\theta = 0$
การพยากรณ์ประชากรของมนุษย์ :	$P' = P(a - bP), \quad a > 0, b > 0$

1.1 ความหมายของสมการเชิงอนุพันธ์

บทนิยาม 1.1.1 **สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)** คือ สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ (derivative) หรือค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของตัวแปรตาม (dependent variable) หนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรอิสระ (independent variable) หนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัว

ตัวอย่าง 1.1.1 ต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์

1. $\frac{dy}{dx} = \sin x$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} - k^5 y = 0$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 8y = 0$
4. $\frac{\partial u}{\partial t} = k^3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5y = e^{8x}$
6. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$

สมการในข้อ 1 ข้อ 2 ข้อ 3 ข้อ 5 เป็นสมการที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระหนึ่งตัว คือ x ตัวแปรตามหนึ่งตัวคือ y และอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x สมการในข้อ 6 เป็นสมการที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระสองตัวคือ x, y ตัวแปรตามหนึ่งตัวคือ V และอนุพันธ์ของ V เทียบกับ x อนุพันธ์ของ V เทียบกับ y แต่สมการในข้อ 4 เป็นสมการที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระสามตัวคือ t, x, y ตัวแปรตามหนึ่งตัวคือ u และอนุพันธ์ของ u เทียบกับ t อนุพันธ์ของ u เทียบกับ x อนุพันธ์ของ u เทียบกับ y

สมการเชิงอนุพันธ์แบ่งออกเป็น 2 ชนิดคือ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation)

บทนิยาม 1.1.2

1. สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์สามัญ (ordinary derivative) ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวจะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เขียนย่อ ๆ ว่า ODE
2. สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ย่อย (partial derivative) ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัวขึ้นไปจะเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เขียนย่อ ๆ ว่า PDE

สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่รู้จักกันดี

$\frac{dy}{dx} + y = y^2$ สมการของแบร์นูลลี (Bernoulli's equation)

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - 4)y = 0$ สมการของเบสเซล (Bessel's equation)

$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$ สมการคลื่นของเลอจองด์ (Legendre's wave equation)

สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่พบบ่อย ๆ

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ สมการคลื่น (wave equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ สมการความร้อน (heat equation)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \end{aligned}\right\}$$ สมการของลาปลาซ (Laplace's equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y)$$ สมการปัวซอง (Poisson equation)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$ สมการฟลักซ์ (flux equation)

ตัวอย่าง 1.1.2 จากตัวอย่าง 1.1.1 จะพบว่า

ข้อ 1, 2, 3, 5 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (มี x เป็นตัวแปรอิสระ)

ข้อ 4, 6 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (มี t, x, y และ x, y เป็นตัวแปรอิสระตามลำดับ)

1.2 อันดับและดีกรี

บทนิยาม 1.2.1

1. อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการ
2. ดีกรี (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือเลขชี้กำลัง (ที่เป็นจำนวนเต็มบวกและมีค่าน้อยสุด) ของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุด (โดยที่สมการเชิงอนุพันธ์นั้นต้องเขียนในรูปพหุนาม (polynomial) ของอนุพันธ์) โดยที่ทุก ๆ อนุพันธ์ในสมการต้องมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 1.2.1 แสดงอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1. $y' - 4x = 10$ เป็นสมการอันดับ 1
2. $y'' + y' - 4x = 40$ เป็นสมการอันดับ 2
3. $y''' + y'' + y' - 4x = 50$ เป็นสมการอันดับ 3

ตัวอย่าง 1.2.2 แสดงดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1. $(y')^3 - 4x = 10$ สมการนี้มีดีกรี = 3
2. $(y'')^4 + (y')^9 - 4x = 40$ สมการนี้มีดีกรี = 4
3. $(y''')^5 + (y'')^4 + (y')^9 - 4x = 40$ สมการนี้มีดีกรี = 5

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $y' - 4xy = 10$ เป็นสมการอันดับ 1 ดีกรี 1 (จะกล่าวในบทที่ 2) ซึ่งสามารถเขียนเป็น

$$\frac{dy}{dx} - 4xy = 10 \text{ หรือ } dy - 4xydx = 10dx$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ดีกรี 1 สามารถเขียนในรูป $y' = F(x, y)$ หรือ $F(x, y, y') = 0$

$y'' + y' - 4x = 10$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 2 ดีกรี 1 เขียนได้เป็น $F(x, y, y', y'') = 0$

$y''' + y'' + y' - 4x = 10$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 3 ดีกรี 1

แต่ $(y'')^4 + y' - 4x = 10$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 2 ดีกรี 4

$(y''')^5 + y'' + y' - 4x = 10$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 3 ดีกรี 5

ดังได้กล่าวแล้วว่าอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการ ดังนั้น

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2b\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 0$$

เป็นสมการที่มี “อันดับ 2 (order two)” อันซึ่งจะนำไปสู่การอ้างถึง “สมการอันดับ 2” และจะกล่าวถึงในกรณีสมการอันดับ n ในบทต่อ ๆ ไป

ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ดีกรี n ของตัวแปร x หมายถึงฟังก์ชันที่เขียนในรูป

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \text{ ; } a_n \neq 0,\ a_i \in R,\ n \in I^+ \cup \{0\}$$

ซึ่งจะเห็นว่าตัวแปรที่อยู่ในแต่ละพจน์มีเลขชี้กำลัง n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์เท่านั้นไม่เป็นจำนวนเต็มลบเด็ดขาด เราใช้ I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก

$f(x, y) = 20x^2y - 6x - 20y$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม x, y

$f(x, y) = 20x^2y - \frac{x^3}{y^2} - x^{20}$ ไม่เป็นฟังก์ชันพหุนามเพราะ $\frac{-x^3}{y^2} = -x^3y^{-2}$ จะมีตัวแปร y มีเลขชี้กำลังเป็น -2

บทนิยาม 1.2.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation)

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n คือสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีอิสระเพียงตัวเดียว ซึ่งมีรูปทั่วไปดังนี้

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad \text{..........(1-1)}$$

หรือ

$$y^{(n)} = F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)}) \qquad \text{..........(1-2)}$$

เมื่อ x เป็นตัวแปรอิสระ y เป็นตัวแปรตาม $y^{(i)}$; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ เป็นอนุพันธ์อันดับที่ i ของ y และ F เป็นฟังก์ชันของ n + 2 ตัวแปร $x, y, y^{(1)}, y^{(2)} \dots, y^{(n)}$

หมายเหตุ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่สามารถเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันพหุนามหรือสมการพหุนามได้จะมีดีกรีเสมอ

ตัวอย่าง 1.2.3 แสดงถึงอันดับ และดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1. $3xy'' + 4y' - 7y - 6x = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ดีกรี 1 (พิจารณาจาก y')

เหตุผล เขียนในรูปสมการพหุนามได้หรือเขียนแบบสมการ (ก), (ข) ได้ดังนี้

แบบสมการ (ก) $[3x]y'' + [4]\,y' - [7]y - [6]x = 0$

แบบสมการ (ข) $[3x]y'' = [6]x + [7]y - [4]y'$

2. $[3x](y''')^6 + [4]y'' + (y')^{10} = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3 ดีกรี 6 (พิจารณาจาก y''')

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[5]{\dfrac{dy}{dx} + y}$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ดีกรี 5 ซึ่งหาได้โดยการจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 = \frac{dy}{dx} + y$$

บทนิยาม 1.2.3 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n (linear differential equation of order n) คือสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ที่มีรูปแบบ

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(1)} + a_n(x)y = R(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1\text{-}3)$$

เมื่อ $a_0(x) \neq 0$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$, $R(x)$ คือฟังก์ชันของ x เท่านั้น x, y เป็นตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม ตามลำดับ $y^{(i)}$ คืออนุพันธ์อันดับ i ของ y เทียบกับ x

จากบทนิยามข้างต้น สมการ (1-3) เขียนได้อยู่ในรูป

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{(n-2)}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = R(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1\text{-}4)$$

ในกรณีที่ $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ เป็นค่าคงตัว เรียกสมการนี้ว่า สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว (constant coefficients) ในกรณีที่ค่าเหล่านั้นเป็นฟังก์ชันของ x จะเรียกสมการนั้นว่าสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร (variable coefficients) เราเรียกสมการที่ไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูป (1-3) ได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ไม่ใช่เชิงเส้น (non–linear differential equations)

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นมีลักษณะเฉพาะดังนี้

1. ตัวแปรตาม y และอนุพันธ์ทั้งหมดของมันจะมีดีกรีเป็น 1 เท่านั้น

2. ไม่มีผลคูณระหว่างตัวแปรตาม y และอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของตัวแปรตาม y ในสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

3. ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิศัยของตัวแปรตาม y หรืออนุพันธ์ของตัวแปรตาม y ในสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น อาทิ e^y หรือ $\sin y$ ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่ได้ สมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ไม่ใช่เชิงเส้น สมการ

$$xdy - ydx = 0,\ y'' - 5y' + y = 0,\ x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 5x\frac{d^2y}{dx^2} - 10y = e^x$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ 1 อันดับ 2 และอันดับ 3 ตามลำดับ แต่สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 อันดับ 3 และอันดับ 4 ที่ไม่ใช่เชิงเส้น

สัมประสิทธิ์ขึ้นกับตัวแปร y | ตัวแปรตาม y | เลขชี้กำลังไม่ใช่ 1

$$(200 + y)y' + 10y = e^x,\ \frac{d^3y}{dx^3} - \sin y,\ \frac{d^4y}{dx^4} + y^5 = 0$$

ตัวอย่าง 1.2.4 จงพิจารณาว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น หรือกล่าวย่อ ๆ ว่าสมการเชิงเส้นหรือไม่ โดยใช้บทนิยาม 1.2.3

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 20\frac{dy}{dx} + 80y^5 = 0$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้นเพราะ (ก)

(ก) y เป็นตัวแปรตามในสมการนี้ แต่มีเลขชี้กำลังเป็น 5

(ข) นี่คืออนุพันธ์ของ y ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็น 1

(ค) นี่คืออนุพันธ์ของ y ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็น 1 แต่ถ้าตรงนี้เขียนเป็น $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^6$ จะได้ว่าอนุพันธ์ของ y นี้มีเลขชี้กำลังเป็น 6 ซึ่งจะไม่เป็นสมการเชิงเส้นทันที (ถ้าเกิดเหตุการณ์ดัง (ก) แล้วอาจไม่ต้องพิจารณาตรงนี้ก็สามารถตอบได้ทันที)

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 20\frac{dy}{dx} + 80y = 0$ เป็นสมการเชิงเส้น

3. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^7 + 20\frac{dy}{dx} + 80y = 0$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้นเพราะมีพจน์ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^7$ (ซึ่งก็คืออนุพันธ์ของตัวแปร y มีเลขชี้กำลังมากกว่า 1)

4. $\frac{d^2y}{dx^2}+20y\frac{dy}{dx}+80y = 0$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้นเพราะมีพจน์ $y\frac{dy}{dx}$ (ซึ่งก็คือผลคูณของตัวแปรตามกับอนุพันธ์ของตัวแปรดังกล่าว) แต่ถ้าเปลี่ยน y เป็น x^2 จะเป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่ ให้ผู้อ่านพิจารณาเอง

5. $\frac{d^2y}{dx^2}+20\frac{dy}{dx}+80y = \ln x^2 + e^{3x}$ เป็นสมการเชิงเส้น

6. $\frac{d^2y}{dx^2}+20\frac{dy}{dx}+80y = \sin x$ เป็นสมการเชิงเส้น

7. $\frac{d^2y}{dx^2}+20\frac{dy}{dx}+80y = \sin y$ สำหรับคำถามนี้ให้ผู้เรียนตอบว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นหรือไม่เอง (*)

8. $\frac{d^2y}{dx^2}+20\frac{dy}{dx}+80\sin y = 0$ สำหรับคำถามนี้ให้ผู้เรียนตอบว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นหรือไม่เอง (*)

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงบอกอันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

    1) $dy + (xy - \cos x)dx = 0$
    2) $L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$
    3) $y''' + xy'' + 2y(y')^2 + xy = 0$
    4) $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} + x\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + v = 0$
    5) $\left(\frac{d^3w}{dv^3}\right)^2 - \left(\frac{d^2w}{dv^2}\right) - vdv = 0$
    6) $e^{y'''} - xy'' + y = 0$
    7) $\sqrt{y' + y} = \sin x$
    8) $y' + x = (y - xy')^{-3}$
    9) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[4]{y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

2. สมการเชิงอนุพันธ์ใดเป็นสมการเชิงเส้น สมการไม่ใช่เชิงเส้น และบอกอันดับของสมการด้วย

    1) $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$
    2) $yy' + 2y = 1 + x^2$
    3) $x^3y^{(4)} - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$
    4) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$
    5) $(\sin x)y''' - (\cos x)y' = 2$

เฉลย แบบฝึกหัด 1.1

1. 1) อันดับ 1 ดีกรี 1
   2) อันดับ 2 ดีกรี 1
   3) อันดับ 3 ดีกรี 1
   4) อันดับ 2 ดีกรี 1
   5) อันดับ 3 ดีกรี 2
   6) อันดับ 3 ดีกรีไม่นิยาม
   7) อันดับ 1 ดีกรี 1
   8) อันดับ 1 ดีกรี 4
   9) อันดับ 2 ดีกรี 4

2. 1) เชิงเส้น, อันดับ 2
   2) ไม่ใช่เชิงเส้น, อันดับ 1
   3) เชิงเส้น, อันดับ 4
   4) ไม่ใช่เชิงเส้น, อันดับ 2
   5) เชิงเส้น, อันดับ 3

1.3 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

บทนิยาม 1.3.1 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (solution of differential equation)

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ซึ่งมีสมการเป็น

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}) = 0 \qquad ....(1\text{-}5)$$

ฟังก์ชัน y = f(x) ซึ่งนิยามบนบางช่วง D เป็นผลเฉลย (solution) ของสมการ (1-5) ก็ต่อเมื่อถ้า $y^{(i)}$; i = 1, 2, 3, ..., n มีจริงบนช่วง D และ

$F(x, f(x), f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in D$

ในบทนิยามดังกล่าวช่วง D อาจหมายถึงช่วงเปิด (a, b) ช่วงปิด [a, b] ช่วงอนันต์ (a, ∞) และอื่น ๆ

ตัวอย่าง 1.3.1 จงแสดงฟังก์ชัน y = sin x – cos x + 1 เป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์อันดับ 2

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 1 \qquad ....(1)$$

สำหรับทุกจำนวนจริง x

วิธีทำ จะพบว่า y นิยามบนช่วง $(-\infty, \infty)$ และ $y'' = -\sin x + \cos x$ นำ y และ y″ แทนพจน์ด้านซ้ายของ (1) จะได้

$$(-\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x + 1) = 0$$

สำหรับทุก x ซึ่ง $-\infty < x < \infty$

บทนิยาม 1.3.2 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ซึ่งมีรูปแบบทั่วไป คือ

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}) = 0 \qquad ....(1\text{-}6)$$

เรากล่าวว่า y = f(x) เป็นผลเฉลยโดยชัดแจ้ง (explicit solution) ของสมการ (1-6) บนช่วง D ถ้า y = f(x) สอดคล้องสมการ (1-6) สำหรับทุก ๆ x บน D นั่นคือ

$F(x, f(x), f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0$ สำหรับทุก x บนช่วง D

และกล่าวว่า ความสัมพันธ์ g(x, y) = 0 เป็นผลเฉลยโดยปริยาย (implicit solution) ของสมการ (1-6) บนช่วง D ถ้าความสัมพันธ์นี้นิยามฟังก์ชัน $f_1(x)$ อย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชันโดยที่ $f_1(x)$ เป็นผลเฉลยโดยชัดแจ้งของสมการ (1-6) บนช่วง D รวมเรียกผลเฉลยโดยชัดแจ้งและผลเฉลยโดยปริยายว่าผลเฉลย

ตัวอย่าง 1.3.2 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $y = xe^x$ เป็นผลเฉลยโดยชัดแจ้งของสมการเชิงเส้น $y'' - 2y' + y = 0$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$

วิธีทำ เนื่องจาก $y' = xe^x + e^x$ และ $y'' = xe^x + 2e^x$

$y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \qquad \text{..........(1-7)}$$

หรือ

$$dy = 3x^2dx \qquad \text{..........(1-8)}$$

เมื่อหาอินทิเกรตหรือปริพันธ์ (integrate) สมการ (1-8) จะได้

$$\int dy = \int 3x^2dx$$

$$y = x^3 + C \qquad \text{..........(1-9)}$$

เรียกสมการ (1-9) ว่าผลเฉลยทั่วไป (general solution) ของสมการ (1-7) หรืออาจเรียกผลเฉลยสมบูรณ์ (complete solution) หรือปฐมฐาน (primitive) ของสมการ (1-7) เมื่อ C คือตัวคงค่าเลือก (arbitrary constant)

แต่ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) เป็น $x = 2$, $y = 11$ จะได้ $C = 9$ ดังนั้นจากสมการ (1-9) จะได้สมการใหม่

$$y = x^3 + 9 \qquad \text{..........(1-10)}$$

เรียกสมการ (1-10) ว่าผลเฉลยเฉพาะ (particular solution) ของสมการ (1-7) จะเห็นว่าผลเฉลยทั่วไป เราต้องบวกตัวคงค่าเลือกเสมอ แต่ผลเฉลยเฉพาะเป็นผลเฉลยที่ทราบตัวคงค่าเลือกแล้ว

ในทางเรขาคณิต ผลเฉลยทั่วไปคือสมการของวงศ์ของเส้นโค้ง (family of curves) ซึ่งมีเส้นโค้งมากมาย โดยขึ้นอยู่กับค่า C ที่เป็นตัวคงค่าเลือก ส่วนคำตอบเฉพาะนั้นเป็นเพียงสมการเส้นโค้งเส้นเดียวในวงศ์ของเส้นโค้งนั้น เราเรียกเส้นโค้งต่าง ๆ ทั้งหมดนั้นว่า *เส้นโค้งอินทิกรัลหรือเส้นโค้งปริพันธ์ (integral curve)* ของสมการเชิงอนุพันธ์

บทนิยาม 1.3.3 กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ดังในสมการ (1-5)

1. ผลเฉลยของ (1-5) ที่ประกอบด้วยตัวคงค่าเลือก n ค่าเรียกว่า ผลเฉลยทั่วไป
2. เมื่อทราบค่าของตัวคงค่าเลือก n ค่า ในผลเฉลยทั่วไปจะเรียกผลเฉลยเฉพาะ
3. ผลเฉลยของสมการ (1-5) ที่ไม่สามารถหาได้จากการแทนค่าใด ๆ ในผลเฉลยทั่วไปด้วยค่าเฉพาะได้ เรียกว่า ผลเฉลยซิงกูลาร์ (singular solution)

การประยุกต์ใช้สมการเชิงอนุพันธ์ทางด้านกลศาสตร์ ทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ เราจะพบคำสี่คำนี้เสมอ ๆ นั่นคือ ปัญหาค่าเริ่มต้น (initial value problem) เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) ปัญหาค่าขอบเขต (boundary value problem) เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) โดยที่เงื่อนไขเริ่มต้นเราจะกำหนด ณ ตัวแปรอิสระ x เพียงจุดเดียวเท่านั้น ไม่ว่าจะเป็นค่าของตัวแปรตาม y และค่าของอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของตัวแปรตาม y แต่เงื่อนไขขอบเขตเรากำหนด ณ ตัวแปรอิสระ x ตั้งแต่สองจุดขึ้นไป ทั้งค่าของตัวแปรตามและค่าของอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของตัวแปรตาม ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.3.4 กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ดังในสมการ (1-5)

ปัญหาค่าเริ่มต้น (initial value problem) เขียนแทนด้วย IVP คือปัญหาที่ประกอบด้วยสมการ (1-5) และเงื่อนไขเริ่มต้น n เงื่อนไข ในรูป

$$y(x_0) = c_0,\ y^{(1)}(x_0) = c_1,\ y^{(2)}(x_0) = c_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$$

เมื่อ $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$ เป็นค่าคงตัว

ปัญหาค่าขอบเขต (boundary value problem) เขียนแทนด้วย BVP คือปัญหาที่ประกอบด้วยสมการ (1-5) และเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) n เงื่อนไขในรูป

$$y(x_0) = c_0,\ y^{(1)}(x_1) = c_1,\ y^{(2)}(x_2) = c_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_{n-1}) = c_{n-1}$$

เมื่อ $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 1.3.3 สมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + y = 0$$

ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข $y(0) = 0,\ y'\left(\frac{\Pi}{2}\right) = 1$ เป็น BVP

1.4 การสร้างสมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์ถูกสร้างขึ้นโดยอาศัยปัญหาต่าง ๆ อาทิ

1. โดยอาศัยการกำจัดตัวคงค่าเลือก (the elimination of arbitrary constant) ในสมการทั่วไป ซึ่งเราอาศัยการหาอนุพันธ์ โดยจำนวนครั้งของการหาอนุพันธ์จะต้องเท่ากับจำนวนของตัวคงค่าเลือกในสมการ

ตัวอย่าง 1.4.1 จงกำจัดตัวคงค่าเลือก a จากสมการ $(x-a)^2 + y^2 = a^2$

วิธีทำ โดยการหาอนุพันธ์จะได้

$$2(x-a) + 2yy' = 0$$

หาค่า a จะได้ $a = x + y\,y'$

นำค่านี้แทนในสมการที่โจทย์กำหนดให้

$$(yy')^2 + y^2 = (x + yy')^2$$

$$y^2 = x^2 + 2xyy'$$

เขียนใหม่จะได้

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$

หรืออาจทำอีกวิธีได้ดังนี้

จากโจทย์จะได้ $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

$$\frac{x^2 + y^2}{x} = 2a$$

โดยการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{x(2xdx + 2ydy) - (x^2 + y^2)dx}{x^2} = 0$$

$$\therefore\ (x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$

ตัวอย่าง 1.4.2 จงกำจัดตัวคงค่าเลือกจากสมการ $y = Ae^{2x} + B^{e^{-x}}$ ....(1)

วิธีทำ หาอนุพันธ์สองครั้งโดยเทียบกับ x

$$y' = 2Ae^{2x} - Be^{-x} \qquad \text{..........(2)}$$

$$y'' = 4Ae^{2x} + Be^{-x} \qquad \text{..........(3)}$$

บวกสมการ (1) กับ (2) และสมการ (2) กับ (3) เพื่อกำจัด B

$$y + y' = 3Ae^{2x} \qquad \text{..........(4)}$$

$$y'' + y' = 6Ae^{2x} \qquad \text{..........(5)}$$

คูณสมการ (4) ด้วย 2 แล้วนำมาลบจากสมการ (5) เพื่อกำจัด A จะได้สมการตามต้องการ

$$y'' - y' - 2y = 0$$

ตัวอย่าง 1.4.3 จงกำจัดตัวคงค่าเลือก C จากสมการ $xy = C(x^5 + y^5)$

วิธีทำ ทำให้ C อยู่ตามลำพังโดยหาร $x^5 + y^5$ ด้วย Cxy

$$\frac{x^4}{y} + \frac{y^4}{x} = \frac{1}{C}$$

หาอนุพันธ์จะได้

$$\frac{4x^3y - x^4y'}{y^2} + \frac{4xy^3y' - y^4}{x^2} = 0$$

หรือ $x(4y^5 - x^5)y' + y(4x^5 - y^5) = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำจัดค่า C แล้ว

2. *โดยอาศัยการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต* เราพิจารณาวงศ์ของเส้นโค้ง ซึ่งผู้เรียนต้องหาสมการของผลเฉลยทั่วไปจากสมบัติของวงศ์ของเส้นโค้งให้ได้เสียก่อนแล้วจึงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ที่ต้องการ

ตัวอย่าง 1.4.4 จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์ของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดและจุดโฟกัสอยู่บนแกน y

วิธีทำ จากวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ เราหาสมการของวงศ์ของพาราโบลาได้คือ

$$x^2 = 4ay$$

หรือ

$$\frac{x^2}{y} = 4a$$

กำจัดค่า a โดยการหาอนุพันธ์ จะได้ $2xydx - x^2dy = 0$ หรือ $2ydx - xdy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ตามต้องการ

ตัวอย่าง 1.4.5 จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน y

วิธีทำ จากวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ เราหาสมการของวงศ์ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางบนแกน y (จุด (0, b)) รัศมี = r คือ

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad ....(1)$$

กำจัด b และ r จากสมการ (1) ได้ $x + (x - b)y' = 0$

$$\frac{x + yy'}{y'} = b \qquad ....(2)$$

โดยการหาอนุพันธ์ สมการ (2) ได้ $\frac{y'[1 + yy'' + (y')^2] - y''(x + yy')}{(y')^2} = 0$

$$xy'' - (y')^3 - y' = 0$$

3. *โดยอาศัยการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ ในที่นี้จะกล่าวถึงกฎการเย็นตัวของนิวตัน*

กฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton's law of cooling) ซึ่งกล่าวว่า "อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลต่างของอุณหภูมิของสิ่งล้อมรอบวัตถุนั้น" สิ่งล้อมรอบวัตถุอาจเป็นน้ำ อากาศ หรืออื่น ๆ

ถ้า $T(t)$ เป็นอุณหภูมิของวัตถุ ณ เวลา t

$S(t)$ เป็นอุณหภูมิของสิ่งล้อมรอบวัตถุนั้น ณ เวลา t

โดยกฎการเย็นของนิวตันจะได้

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - S)$$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - S) \text{ เมื่อ } k \text{ เป็นค่าคงตัวซึ่ง } k > 0$$

ถ้า $T > S$ แล้ว $\frac{dT}{dt} < 0$ แสดงว่าอุณหภูมิของวัตถุลดลง และถ้า $T < S$ แล้ว $\frac{dT}{dt} > 0$ แสดงว่าอุณหภูมิของวัตถุเพิ่มขึ้น

สมมุติว่าแท่งเหล็กที่ร้อนแดงถูกแขวนไว้ในอากาศซึ่งมีอุณหภูมิคงตัว 18 °F เราสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับอุณหภูมิของแท่งเหล็กซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาได้ดังนี้

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 18)$$

ถ้าอุณหภูมิของอากาศซึ่งเป็นสิ่งล้อมรอบวัตถุในที่นี้คือเหล็ก ซึ่งอากาศมีอุณหภูมิคงตัวเป็น 30 °F จะได้สมการเชิงอนุพันธ์เป็น

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 30)$$

แบบฝึกหัด 1.2

ข้อ 1 ถึง 11 จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้หรือไม่

1. $2y' + y = 0,\ y = e^{-\frac{x}{2}}$
2. $\dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{3x},\ y = 3^{ex} + 10e^{2x}$
3. $y' = 25 + y^2,\ y = 5\tan 5x$
4. $y' + y = \sin x,\ y = \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$
5. $\dfrac{dX}{dt} = (2 - X)(1 - X),\ \ln\dfrac{2 - X}{1 - X} = t$
6. $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0,\ C_1(x + y)^2 = xe^{\frac{y}{x}}$
7. $y'' - 6y' + 13y = 0,\ y = e^{3x}\cos 2x$
8. $y'' = y,\ y = \cosh x + \sinh x$
9. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0,\ y = C_1 + C_2x^{-1}$
10. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0,\ y = x^2 + x^2\ln x,\ x > 0$
11. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,\ y = x^2e^x$
12. จงหาค่า m เมื่อ $y = e^{mx}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - 5y' + 6y = 0$
13. จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์ของเส้นโค้งซึ่งกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้
    1) เส้นตรงซึ่งมีความชันและระยะตัดแกน y เท่ากัน
    2) วงกลมที่สัมผัสแกน x
    3) วงกลมในระนาบ xy
14. จงกำจัดตัวคงค่าเลือก
    1) $x^3 - 3x^2y = C$
    2) $y\sin x - xy^2 = C$
    3) $PV = C$
    4) $x^2y = 1 + Cx$

5) $Cy^2 = x^2 + y$

6) $x = A \sin (wt + B)$, w = ตัวแปรเสริม (parameter) ไม่ต้องกำจัด

7) $x = C_1\cos wt + C_2\sin wt$, w = ตัวแปรเสริม

8) $y = Cx + C^2 + 1$

9) $y = mx + \dfrac{h}{m}$, h = ตัวแปรเสริม, m ต้องกำจัด

10) $y^2 = 4ax$

11) $y = ax^2 + bx + c$

12) $y = C_1 + C_2e^{2x}$

13) $y = 4 + C_1e^{2x}$

14) $y = C_1 + C_2e^{-3x}$

15) $y = C_1e^{-x} + C2e^{-3x}$

16) $y = x + C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$

17) $y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$

18) $y = x^2 + C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$

19) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

20) $y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$

21) $y = C_1e^{2x}\cos 3x + C_2e^{2x}\sin 3x$

22) $y = C_1e^{ax}\cos bx + C_2e^{ax}\sin bx$; a, b = ตัวแปรเสริม

23) $y = C_1x + C_2e^{-x}$

24) $y = x^2 + C_1x + C_2e^{-x}$

25) $y = C_1x^2 + C_2e^{2x}$

เฉลย แบบฝึกหัด 1.2

1. $2y' + y = 2\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} = 0$

2. $\frac{dy}{dx} - 2y - e^{3x} = (3e^{3x} + 20e^{2x}) - 2(e^{3x} + 10e^{2x}) - e^{3x} = 0$

3. $y' - 25 - y^2 = 25\sec^2 5x - 25(1 + \tan^2 5x) = 25\sec^2 5x - 25\sec^2 5x = 0$

4. $y' + y - \sin x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x - 10e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x} - \sin x = 0$

5. $\frac{d}{dt}\ln\frac{2-X}{1-X} = 1,\ \left[\frac{-1}{2-X} + \frac{1}{1-X}\right]\frac{dX}{dt} = 1,\ \frac{dX}{dt} = (2-X)(1-X)$

6. ค่าเชิงอนุพันธ์ของ $C_1 = \dfrac{xe^{\frac{y}{x}}}{(x+y)^2}$ คือ

$$\left\{\frac{(x+y)^2\left[xe^{\frac{y}{x}}\left(xdy - \frac{y}{x^2}dx\right) + e^{\frac{y}{x}}dx\right] - xe^{\frac{y}{x}}2(x+y)(dx+dy)}{(x+y)^4}\right\} = 0$$

คูณด้วย $-x^2(x+y)^3 e^{\frac{-y}{x}}$ และทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

7. $y'' - 6y' + 13y = 5e^{3x}\cos 2x - 12e^{3x}\sin x + 12e^{3x}\sin 2x - 18e^{3x}\cos 2x$

$+ 13e^{3x}\cos 2x = 0$

8. $y'' = \cosh x + \sinh x = y$

9. $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = x(2C_2x^{-3}) + 2(-C_2x^{-2}) = 0$

10. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2(5 + 2\ln x) - 3x(3x + 2x\ln x) + 4(x^2 + x^2\ln x)$

$= 9x^2 - 9x^2 + 6x^2\ln x - 6x^2\ln x = 0$

11. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2e^x + 6xe^x + 6e^x - 3x^2e^x - 12xe^x - 6e^x + 3x^2e^x$

$+ 6xe^x - x^2e^x = 0$

12. $m = 2$ และ $m = 3$

13. 1) $y - (x+1)y' = 0$ 2) $[1 + (y')^2]^3 = [yy'' + 1 + (y')^2]^2$

3) $y'''[1 + (y')^2] = 3y'(y'')^2$

14. 1) $(x-2y)dx - xdy = 0$
2) $y(\cos x - y)dx + (\sin x - 2xy)dy = 0$
3) $PdV + VdP = 0$
4) $(x^2y+1)dx + x^3dy = 0$
5) $2xydx - (y+2x^2)dy = 0$
6) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$
7) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$
8) $y = xy' + (y')^2 + 1$
9) $y = xy' + \dfrac{h}{y'}$
10) $2xdy - ydx = 0$
11) $y''' = 0$
12) $y'' - 2y' = 0$
13) $y' - 2y = -8$
14) $y'' + 3y' = 0$
15) $y'' + 4y' + 3y = 0$
16) $y'' + 4y' + 3y = 4 + 3x$
17) $y'' + y' - 2y = 0$
18) $y'' + y' - 2y = 2(1 + x - x^2)$
19) $y'' + 2y' + y = 0$
20) $y'' - 4y' + 4y = 0$
21) $y'' - 4y' + 13y = 0$
22) $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$
23) $(x+1)y'' + xy' - y = 0$
24) $(x+1)y'' + xy' - y = x^2 + 2x + 2$
25) $x(1-x)y'' + (2x^2 - 1)y' - 2(2x-1)y = 0$

2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 และดีกรี 1

ในบทนี้จะกล่าวถึงรูปแบบต่าง ๆ ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 และดีกรี 1 (ordinary differential equation of first order and first degree) พร้อมทั้งทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง โดยมุ่งเน้นการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น โดยเริ่มจากการพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 ที่มีรูปแบบอย่างง่ายที่สุดคือ

$$y' = F(x) \qquad \text{..........(2-1)}$$

เมื่อ $F(x)$ ที่นิยามและต่อเนื่องสำหรับบางช่วง $a < x < b$ ของระนาบ xy ผลเฉลยทั้งหมดของสมการ (2-1) หาได้โดยการอินทิเกรตหรือการหาปริพันธ์ (integration)

$$y = \int F(x)dx + C,\ a < x < b$$

ส่วนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 และดีกรี 1 ที่อยู่ในรูปของ x, y อีกสมการหนึ่งเขียนได้เป็น

$$y' = F(x, y) \qquad \text{..........(2-2)}$$

หรือ

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \qquad \text{..........(2-3)}$$

$$F(x, y, y') = 0$$

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้อีกรูปแบบหนึ่ง คือ

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

ในเชิงเรขาคณิต กราฟของเส้นโค้ง $y = y(x)$ มีความชันที่จุด (x, y) เท่ากับ $\frac{dy}{dx}$ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (2-3) จึงหมายถึงเส้นโค้ง y มีความชันที่จุด (x, y) เท่ากับ $F(x, y)$ และมีความชันที่จุด (a, b) เท่ากับ $F(a, b)$ ต่อไปเป็นวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 และดีกรี 1

2.1 สมการแบบแยกตัวแปรได้

บทนิยาม 2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ จะถูกเรียกว่าเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ (variable separable) ถ้าสมการนั้นสามารถจัดอยู่ในรูป

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad \text{..........(2-4)}$$

เมื่อ $M(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว และ $N(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว

สมการแบบแยกตัวแปรได้เป็นสมการที่หาผลเฉลยได้ทันที โดยอินทิเกรตหรือหาปริพันธ์จากสมการ (2-4) จะได้ผลเฉลย

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

โดยที่ C เป็นตัวคงค่าเลือก

พิจารณา

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \qquad \text{..........(2-5)}$$

คูณตลอดด้วย $\dfrac{1}{g_1(y)f_2(x)}$ จะได้

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

เมื่ออินทิเกรตหรือหาปริพันธ์จะได้ผลเฉลยของสมการ (2-5) คือ

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = C$$

ตัวอย่าง 2.1.1 จงแก้สมการ $x^3dx + (y + 1)^2dy = 0$

วิธีทำ สมการที่โจทย์กำหนดให้เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ เราอินทิเกรตหรือหาปริพันธ์

$$\int x^3dx + \int (y + 1)^2dy = C_1$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{(y+1)^3}{3} = C_1$$

$$3x^4 + 4(y + 1)^3 = 12C_1$$

หรืออาจเขียนเป็น

$$3x^4 + 4(y + 1)^3 = C \quad \text{เมื่อ } C = 12C_1$$

ตัวอย่าง 2.1.2 จงแก้สมการ $(1+x)^2\dfrac{dy}{dx}+xy=0$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้

$$(1+x^2)dy+xydx=0$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\frac{x}{1+x^2}dx+\frac{1}{y}dy=0$$

เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ หลังจากนั้นหาปริพันธ์

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{1}{y}dy=C$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln|y|=C$$

$$\ln|y\sqrt{1+x^2}|=C$$

$$y\sqrt{1+x^2}=e^C$$

ตัวอย่าง 2.1.3 จงแก้สมการ $y^2dx-(1-x)dy=0$

วิธีทำ จัดรูปใหม่

$$\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{y^2}dy=0$$

เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ หลังจากนั้นหาปริพันธ์

$$\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{y^2}dy=0$$

$$\ln|x-1|-\frac{1}{y}=\ln C_1$$

$$\ln|x-1|-\ln C_1=\frac{1}{y}$$

$$\ln\frac{|x-1|}{C_1}=\frac{1}{y}$$

$$\frac{|x-1|}{C_1}=e^{\frac{1}{y}}$$

$$\pm\frac{(x-1)}{C_1}=e^{\frac{1}{y}}$$

$$C(x-1)=e^{\frac{1}{y}} \text{ เมื่อ } C=\pm\frac{1}{C_1}$$

ตัวอย่าง 2.1.4 จงแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx}=-x(1-y)^{\frac{1}{2}}$

วิธีทำ จัดรูปสมการที่โจทย์กำหนดให้ใหม่ จะได้

$$\frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}+xdx=0$$

หาปริพันธ์

$$\sin^{-1}y+\frac{1}{2}x^2=C$$

$$y=\sin\left(C-\frac{1}{2}x^2\right)$$

ผศ. เลิศ สิทธิโกศล

การศึกษา Cert. in Computer Programming
กศ.บ. (คณิตศาสตร์)
ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์)
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปัจจุบัน กำลังศึกษาต่อปริญญาเอก
ณ Curtin University of Technology,
Perth, Western Australia

ผลงานทางวิชาการ

1. เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส I
2. เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส II
3. เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส III
4. คณิตศาสตร์พื้นฐาน
5. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
6. การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์
7. พีชคณิตนามธรรม
8. ทอพอโลยี
9. การวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์

และอีกมากมายอาทิ คณิตศาสตร์ ม.1-ม.6

ความสามารถ

สอนคณิตศาสตร์และสถิติได้หลายคอร์ส :

Analytic Geometry and Calculus I-II-III ❖ Advance Calculus ❖ Set Theory ❖ Topology ❖ Differential Equation ❖ Mathematical Analysis ❖ Linear Algebra I-II ❖ Group Theory ❖ Number Theory ❖ Complex Analysis ❖ Probability ❖ Statistics I-II ❖ Modern Algebra ❖ Operation Research I-II ❖ Vector Analysis ❖ Modern Mathematics ❖ Inferential Statistics ❖ Fundamentals of Geometry ❖ Basic Concepts of Mathematics ❖ Abstract Algebra I-II ❖ Mathematical Logic ❖ Experimental Design ❖ Statistics Applied to Behavioral Science I-III ❖ Philosophy of Mathematics and Mathematics Education ❖ Individual Studies in Mathematics ❖ Principle of Mathematics ❖ Mathematical Statistics ❖ Statistical Analysis

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
หมู่บ้านรัตนโกสินทร์ 200 ปี (รังสิต)
SKYBOOK COMPANY LIMITED
E-mail: skybook1992@hotmail.com

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด :
515/276-8 หมู่บ้านรัตนโกสินทร์ ถ.รังสิต-ปทุมธานี
ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
ISBN 974-389-132-3
9 789743 891328
ราคา 150 บาท