ชื่อหนังสือ ติวเข้ม MATH วิศวะฯ
รหัสสินค้า 9789748323008
พิมพ์ครั้งที่ 1

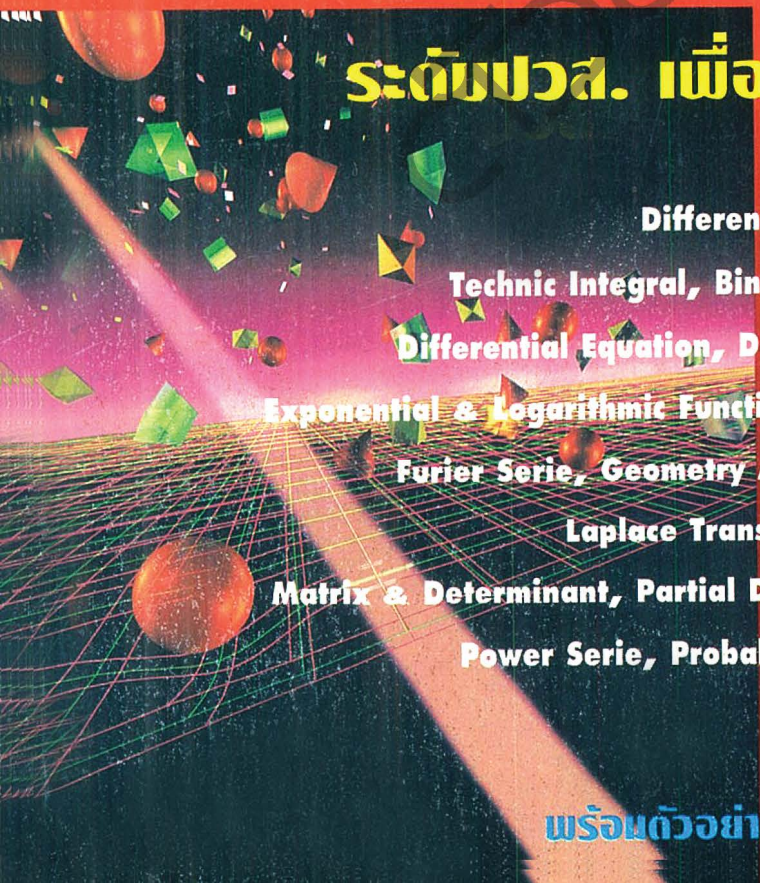
ใหม่ล่าสุด

เตรียมสอบวิศวะฯ ทุกสาขา

ติวเข้ม

MATH

ระดับปวส. เพื่อศึกษาต่อปริญญาตรี



Differentiation & Its Application
Technic Integral, Binomial, Complex Number
Differential Equation, Double & Tripple Integral
Exponential & Logarithmic Function, Function & Relation
Furier Serie, Geometry Analysis & Conic Section
Laplace Transform, Limit & Continuty
Matrix & Determinant, Partial Differentiate, Polar Form
Power Serie, Probability, Serie & Sequence
Trigonometry & Vector.

พร้อมตัวอย่างและเฉลยวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

ใหม่ล่าสุด

เตรียมสอบวิศวะทุกสาขา

ติวเข้ม

MATH

ปวส, ปริญญาตรี

ตัวอย่าง

SKYBOOK COMPANY LIMITED
บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
โทรศัพท์: 5675105, 5675119, 9581125-7 โทรสาร: 5675105

ติวเข้มคณิตศาสตร์
พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2540

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย
ห้ามคัดลอกถ่ายเอกสารหรือพิมพ์
หรือวิธีหนึ่งวิธีใดของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาต
จากบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

ราคา 160 บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

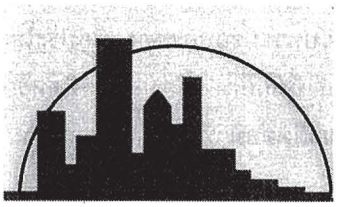
พิชัย ดีเส็ง

ติวเข้มคณิตศาสตร์ - - กรุงเทพฯ : สกายบุ๊กส์, 2539.
365 หน้า
1. คณิตศาสตร์ 2. คณิตศาสตร์ - - ข้อสอบและเฉลย I. ชื่อเรื่อง
510
ISBN 974-8323-00-5
S7901-30-0197

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
SKY BOOK COMPANY LIMITED
515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
โทรศัพท์: 5675105, 5675119, 9581125-7
โทรสาร: 5675105

พิมพ์ที่ บริษัทสยามสปอร์ต ซินดิเคท จำกัด
1776-1784 ถนนพระราม 4 แยกเกษมราษฎร์ คลองเตย พระโขนง กรุงเทพฯ 10110
โทรศัพท์: 2490250, 2490447, 2490295, 2490299



คำนำ

ปัจจุบันเป็นที่ทราบกันดีว่า อัตราการแข่งขันทางการศึกษานับวันจะยิ่งทวีสูงขึ้น ซึ่งไม่เฉพาะแต่นักเรียนในสายสามัญเท่านั้น นักศึกษาในกลุ่มอาชีวะ หรือที่เรียกกันติดปากว่า "เด็กช่าง" นั้นก็ไม่ยิ่งหย่อนไปกว่ากัน จุดมุ่งหมายคงไม่พ้นกับอาชีพวิศวกร ซึ่งก็แล้วแต่ว่าจะเป็นสาขาใด จนปัจจุบันมีค่านิยมที่ว่าจะต้องจบปริญญาตรีเป็นอย่างน้อย การสอบในระดับ ปวส. เพื่อศึกษาต่อในระดับปริญญาตรี มีเนื้อหาค่อนข้างหลากหลาย ตำราที่เขียนครอบคลุมในทุกหัวเรื่องหาได้ยากเต็มที ส่วนใหญ่จะต้องอาศัยการอ่านจากตำราหลาย ๆ เล่ม โดยหยิบบางตอนจากเล่มโน้นบ้างเล่มนี้บ้าง ซึ่งบางครั้งก็ไม่ตรงนักหรือไม่พบบางเรื่องบางหัวข้อเลยก็มี

ตำราเล่มนี้ได้รวบรวมเนื้อหาที่ต้องใช้ในการสอบเข้าเรียนต่อทั้งหมด โดยยึดจากแนวข้อสอบเก่าเป็นหลัก โดยพยายามรวบรวมเนื้อหาทั้งจากตำราไทยและเทศ เพื่อความสะดวกรวดเร็ว และลดความสับสนในการค้นคว้า ทั้งยังลดค่าใช้จ่ายในการซื้อตำราหลาย ๆ เล่ม เพื่อให้ได้เนื้อหาครอบคลุมครบถ้วน ซึ่งผู้เรียบเรียงได้ตัดทอนบางตอนที่เห็นว่าไม่จำเป็นนักออก เพื่อไม่ให้เป็นตำราที่หนาเกินไป ซึ่งถ้านักศึกษามีความต้องการศึกษาในรายละเอียดปลีกย่อย ก็สามารถหาได้จากหนังสืออ้างอิง ดังแสดงไว้ในตอนท้ายของแต่ละบทและท้ายเล่ม

เนื้อหาในเล่ม บางบทบางตอนนักศึกษาอาจสามารถใช้ประกอบการเรียน ในระดับ ปวส. ในวิชาคณิตศาสตร์ที่กำลังศึกษา และยังนำไปใช้อ้างอิงหรือประกอบการเรียนในระดับปริญญาตรี ปี 1 ได้อีกในอนาคต หลังจากที่สอบเข้าเรียนได้แล้ว

ในการจัดทำหนังสือเล่มนี้ ค่อนข้างยุ่งยากและพบอุปสรรคหลายประการ แต่ก็สามารถลุล่วงไปด้วยดี เพราะได้รับความอนุเคราะห์จากบุคคลหลายฝ่าย ซึ่งมิอาจนำมากล่าวได้ทั้งหมดตรงนี้ และขอบคุณสำนักพิมพ์สกายบุ๊กส์ที่เรียบเรียงต้นฉบับขึ้น

อนึ่ง หากพบข้อสงสัย จุดบกพร่อง หรือสิ่งที่ไม่เข้าใจใด ๆ ภายในเล่ม ผู้เขียนยินดีให้ความกระจ่างและรับทราบข้อบกพร่อง เพื่อประโยชน์ในการแก้ไขในการจัดพิมพ์ครั้งต่อ ๆ ไป

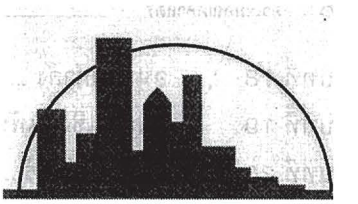
ในกรณีที่นักศึกษาต้องการวิธีคิดหรือเฉลยโดยละเอียดที่นอกเหนือจากที่กล่าวไว้ในหนังสือเล่มนี้ กรุณาติดต่อมาที่

อ.พิชัย ดีเส็ง
ตู้ ปณ. 199
ปท. นนทบุรี
11000

หรือโทรศัพท์มายัง 588-1198, 951-2236, 01-4430081 ผู้เขียนขอขอบพระคุณล่วงหน้าไว้ ณ ที่นี้

พิชัย ดีเส็ง

ตัวอย่าง



สารบัญ

ตัวอย่าง

การวิเคราะห์ข้อสอบคัดเลือก 7

ตัวอย่างข้อสอบและเทคนิคการตัดตัวเลือก 13

บทที่ 1	เมตริกซ์, ดีเทอร์มินันท์ และการแก้สมการเชิงเส้น	39
บทที่ 2	เวกเตอร์	66
บทที่ 3	จำนวนเชิงซ้อน	75
บทที่ 4	ระบบพิกัดเชิงขั้ว	81
บทที่ 5	ฟังก์ชันและความสัมพันธ์	87
บทที่ 6	เรขาคณิตวิเคราะห์, เส้นตรง, ภาคตัดกรวย	92
บทที่ 7	ตรีโกณมิติ, พีชคณิตฟังก์ชัน	114
บทที่ 8	ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และลอการิทึม	126
บทที่ 9	อนุกรม และลำดับ	137
บทที่ 10	ทฤษฎีความน่าจะเป็น	154
บทที่ 11	ทฤษฎีบททวินาม	162
บทที่ 12	ลิมิตและความต่อเนื่อง	165
บทที่ 13	อนุพันธ์และการประยุกต์	173
บทที่ 14	เทคนิคการอินทิเกรต	201
บทที่ 15	อนุพันธ์ย่อย	234
บทที่ 16	การอินทิเกรตฟังก์ชันหลายตัวแปร	239
บทที่ 17	ผลแปลงลาปลาซ	244

บทที่ 18 อนุกรมกำลัง 264
บทที่ 19 สมการเชิงอนุพันธ์ 269
บทที่ 20 อนุกรมฟูริเยร์ 290
บทที่ 21 สรุปสูตรคณิตศาสตร์ 300

บรรณานุกรม 357

ตัวอย่าง

การวิเคราะห์ข้อสอบคัดเลือก
วิชาคณิตศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า ลาดกระบัง

• •

ข้อสอบมีทั้งหมด 50 ข้อ เป็นแบบตอบปรนัย (มี 5 ตัวเลือก) ใช้เวลาสอบทั้งสิ้น 2 ชั่วโมง ไม่อนุญาตให้นำตำรา เอกสาร และเครื่องคำนวณทุกชนิดเข้าห้องสอบ

สัดส่วนเนื้อหาในการออกข้อสอบ (จากสถิติ ปี 2534 – 2538)

ลำดับที่	เรื่อง	%ในการออกสอบโดยประมาณ
1.	อนุพันธ์และการประยุกต์	12.6%
2.	เรขาคณิตวิเคราะห์, ภาคตัดกรวย 2 มิติ 3 มิติ และเส้นตรง	12%
3.	เทคนิคการอินทิเกรต	8.6%
4.	อนุกรมและลำดับ	8.6%
5.	เมตริกซ์และการแก้สมการเชิงเส้น	8%
6.	เวกเตอร์	8%
7.	ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม	7.3%
8.	ลิมิตและความต่อเนื่อง	6%
9.	สมการเชิงอนุพันธ์	5.3%
10.	จำนวนเชิงซ้อน	5.3%
11.	ตรีโกณมิติ และพีชคณิตฟังก์ชัน	4.6%
12.	ทฤษฎีความน่าจะเป็น	4.6%
13.	อนุพันธ์ย่อย	2%
14.	การอินทิเกรตฟังก์ชันหลายตัวแปร	2%
15.	ระบบพิกัดเชิงขั้ว	13%
16.	ทฤษฎีบททวินาม	0.6%

ตัวอย่าง

การวิเคราะห์ข้อสอบคัดเลือก
วิชาคณิตศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า ธนบุรี

ข้อสอบมีทั้งหมด 20 ข้อ เป็นแบบตอบอัตนัย บางปีเป็นแบบแสดงวิธีทำ ใช้เวลาสอบทั้งสิ้น 3 ชั่วโมง ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณ และห้ามนำเอกสารใดเข้าห้องสอบ

สัดส่วนเนื้อหาในการออกข้อสอบ (จากสถิติ ปี 2534 – 2538)

ลำดับที่	เรื่อง	%ในการออกสอบโดยประมาณ
1.	อนุพันธ์และการประยุกต์	16.25%
2.	เทคนิคการอินทิเกรต	15%
3.	เมตริกซ์ และระบบสมการเชิงเส้น	11.25%
4.	การอินทิเกรตฟังก์ชันหลายตัวแปร	10%
5.	อนุมานฟังก์ชันหลายตัวแปร (อนุพันธ์ย่อย)	7.5%
6.	ลิมิตและความต่อเนื่อง	6.25%
7.	อนุกรมและลำดับ	6.25%
8.	อนุกรมกำลัง	5%
9.	เรขาคณิตวิเคราะห์ และภาคตัดกรวย	5%
10.	จำนวนเชิงซ้อน	3.75%
11.	อนุกรมฟูริเยร์	2.5%
12.	ทฤษฎีบททวินาม	2.5%
13.	ฟังก์ชันและความสัมพันธ์	2.5%
14.	ระบบพิกัดเชิงขั้ว	2.5%
15.	เส้นตรงและระนาบ	1.25%
16.	เวกเตอร์	1.25%
17.	สมการเชิงอนุพันธ์	1.25%

ตัวอย่าง

การวิเคราะห์ข้อสอบคัดเลือก
วิชาคณิตศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า พระนครเหนือ

ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์วิศวกรรม มีส่วนที่เป็นคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น 20 ข้อ จากทั้งหมด 40 ข้อ เป็นแบบตอบปรนัย (มี 4 ตัวเลือก) เวลาทำทั้งหมด 2 ชั่วโมง (เฉลี่ยเป็นส่วนคณิตศาสตร์ 1 ชั่วโมง) ไม่อนุญาตให้นำเครื่องคำนวณ และเอกสารเข้าห้องสอบ

สัดส่วนเนื้อหาในการออกสอบ (จากสถิติ ปี 2534 - 2538)

ลำดับที่	เรื่อง	%ในการออกสอบโดยประมาณ
1.	อนุพันธ์และการประยุกต์	30%
2.	เทคนิคการอินทิเกรต	26.6%
3.	การอินทิเกรตฟังก์ชันหลายตัวแปร	10%
4.	เมตริกซ์และกระบบสมการเชิงเส้น	8.3%
5.	ภาคตัดกรวย และเรขาคณิตวิเคราะห์	6.6%
6.	อนุพันธ์ฟังก์ชันหลายตัวแปร	5%
7.	อนุกรมกำลัง	5%
8.	อนุกรม	5%
9.	ทฤษฎีความน่าจะเป็น	5%

การวิเคราะห์ข้อสอบคัดเลือก
วิชาคณิตศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล

ข้อสอบมีทั้งหมด 50 ข้อ เป็นแบบตอบปรนัย (มี 4 ตัวเลือก) ใช้เวลาสอบทั้งสิ้น 2 ชั่วโมง ไม่อนุญาตให้นำเครื่องคำนวณ และเอกสารเข้าห้องสอบ

สัดส่วนเนื้อหาในการออกข้อสอบ (จากสถิติ ปี 2534 – 2538)

ลำดับที่	เรื่อง	%ในการออกสอบโดยประมาณ
1.	เทคนิคการอินทิเกรต	32%
2.	อนุพันธ์และการประยุกต์	28%
3.	เรขาคณิตและเส้นตรง	12%
4.	ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และลอการิทึม	4%
5.	ตรีโกณมิติ	4%
6.	เมตริกซ์	4%
7.	ฟังก์ชันและความสัมพันธ์	4%
8.	ลิมิตและความต่อเนื่อง	4%
9.	ทฤษฎีบททวินาม	2%
10.	จำนวนเชิงซ้อน	2%
11.	ระบบพิกัดเชิงขั้ว	2%
12.	การอินทิเกรตฟังก์ชันหลายตัวแปร	2%

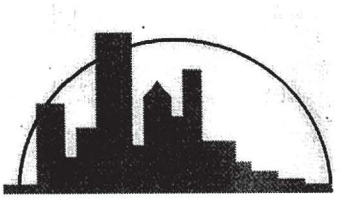
ตัวอย่าง

ปฏิทินกำหนดการสอบคัดเลือก

	จำหน่ายใบสมัคร	รับสมัคร	สอบข้อเขียน	ประกาศผลสอบ	ขึ้นทะเบียนนักศึกษาใหม่
สถาบันเทคโนโลยีฯ ลาดกระบัง	กุมภาพันธ์	ช่วงเดือน กุมภาพันธ์	ประมาณ ต้นเดือนเมษายน	ปลายเดือน เมษายน -ต้นเดือนพฤษภาคม	ประมาณ สัปดาห์สุดท้าย ของเดือนเมษายน ถึงสัปดาห์แรก เดือนพฤษภาคม
สถาบันเทคโนโลยีฯ ธนบุรี	มกราคม	ช่วงเดือน มีนาคม	สัปดาห์สุดท้าย เดือนมีนาคม	ต้นเดือน เมษายน	
สถาบันเทคโนโลยีฯ พระนครเหนือ	สัปดาห์ที่ 2 ช่วงเดือนธันวาคม	ช่วงเดือน กุมภาพันธ์	สัปดาห์แรก เดือนเมษายน	กลางเดือน เมษายน	
สถาบันเทคโนโลยีฯ ราชมงคล	มกราคม	กุมภาพันธ์ ต้นเดือนมีนาคม	สัปดาห์แรก เดือนเมษายน	สัปดาห์สุดท้าย เดือนเมษายน	

ตัวอย่าง

cbaj.ru



ตัวอย่างข้อสอบ และเทคนิค การตัดตัวเลือก

1. (ลาดกระบัง' 36) กำหนดเลขเชิงซ้อน $Z = (1 + \sqrt{3}\,i)(\sqrt{3} - i)(1 + i)$ จงหาค่าของ $|Z^{-1}|$

ก. $2\sqrt{2}$ ข. $4\sqrt{2}$

ค. $3\sqrt{2}$ ง. $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

จ. $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

วิธีทำตรง

$$\begin{aligned} Z &= (1 + \sqrt{3}\,i)(\sqrt{3} - i)(1 + i) \\ &= [\sqrt{3} + 3i - i - \sqrt{3}\,i^2](1 + i) \\ &= [2\sqrt{3} + 2i](1 + i) \\ \therefore \quad &= (2\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 2)i \end{aligned}$$

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{(2\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 2)i}$$

$$Z^{-1} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{16}\right) - \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{16}\right)i$$

$$|Z^{-1}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{16}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{16}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{16} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

ตัวอย่าง

วิธีลัด จากความรู้ว่า ถ้า $Z = Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \ldots Z_n$

แล้ว $|z| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \ldots |z_n|$

และ $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$

$\therefore$ จากโจทย์ $z = (1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} - i)(1 + i)$

$|z| = |1 + \sqrt{3}i|\,|\sqrt{3} - i|\,|i + i| = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$

$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

$\therefore$ คำตอบคือข้อ จ.

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 1

1.1 $Z = \frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1+i)^2}$ มีค่าเท่าใด

ก. $\frac{-15}{2} + 5i$ ข. $\frac{15}{2} + \frac{5}{2}i$

ค. $\frac{15}{4} + \frac{5}{2}i$ ง. $\frac{-15}{4} - \frac{5}{4}i$

เฉลย ข้อ ก.

1.2 $\frac{(3+2i)^2(1-3i)}{(3+i)^2(1+2i)}$ มีค่าเท่าใด

ก. $\frac{230 + 500i}{890}$ ข. $\frac{-230 - 890i}{500}$

ค. $\frac{890 - 230i}{550}$ ง. $\frac{550 - 890i}{230}$

เฉลย ข้อ ข.

1.3 จงหา $|a + bi|$ มีค่าเท่าใด เมื่อ $(3 + 4i)(a + bi)(-12 - 5i) = 2-4i$ ค่าของ $|a + bi|$ มีค่าเท่าใด

ก. $\frac{2\sqrt{5}}{65}$ ข. $\frac{50}{13}$

ค. $\frac{4\sqrt{2}}{65}$ ง. $\frac{16}{65}$

เฉลย ข้อ ก.

2. (ลาดกระบัง' 36) กำหนดให้ $|u| = 3$, $|v| = 5$ และ $|\vec{u} + \vec{v}| = 4$ ฉะนั้น $|\vec{u} - \vec{v}|$ เท่ากับ

ก. $2\sqrt{13}$ ข. 22

ค. 12 ง. $2\sqrt{3}$

จ. $3\sqrt{4}$

วิธีทำตรง

$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2u \cdot v$

แทนค่า $16 = 9 + 25 + 2u \cdot v$

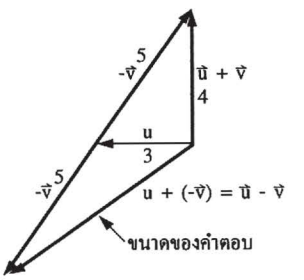
$\therefore 2u \cdot v = -18$

$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2u \cdot v$

แทนค่า $|u - v|^2 = 3^2 + 5^2 + 18 = 52$

$\therefore u - v = \sqrt{52}$

วิธีลัด วาดรูปตามสเกลแล้ววัดค่า



ขั้นตอน

1. วาด Δ มุมฉาก 3-4-5 เสียก่อน
2. เขียนเวกเตอร์ทิศตรงข้ามกับด้านที่ยาว 5 มา 5 หน่วย (จะได้เป็นเวกเตอร์ $-\vec{v}$)
3. วัดค่า $\vec{u} - \vec{v}$

ตัวอย่าง

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 2

2.1 กำหนดให้ $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{34}$ และ $|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{13}$ จงหาขนาดของ $\vec{v}$ และมุม θ ระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

ก. $|\vec{u}| = 5$ $\theta = 60^\circ$ ข. $|\vec{u}| = 4$ $\theta = 45^\circ$

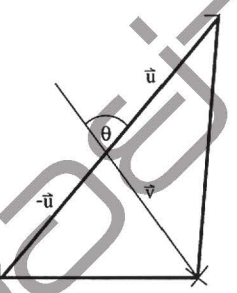
ค. $|\vec{u}| = 3$ $\theta = 30^\circ$ ง. $|\vec{u}| = 4$ $\theta = 60^\circ$

จ. $|\vec{u}| = 5$ $\theta = 90^\circ$

เฉลย ข้อ ง.

ขั้นตอน

1. วาดรูป $\vec{u}$ ขนาด 3 หน่วยและวาด $-\vec{u}$ ซึ่งจะมีขนาดเท่ากัน แต่ทิศตรงข้าม



2. ใช้วงเวียน (ควรนำเข้าห้องสอบด้วย) โดยให้ปลายลูกศรเวกเตอร์ $\vec{u}$ เป็นจุดศูนย์กลาง วาดวงกลมรัศมี $\sqrt{34}$ และใช้วงเวียนวาดวงกลมโดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ปลายลูกศรของเวกเตอร์ $-\vec{u}$ รัศมี $-\sqrt{13}$

3. จากจุดตัดของวงกลมลากไปยังจุดต่อระหว่าง $\vec{u}$ และ $-\vec{u}$ จะได้เป็นเวกเตอร์ $\vec{v}$ วัดขนาดและมุม ตอบคำถามโจทย์

3. ลาดกระบัง' 36 ให้หาค่า $\int_{-5/2}^{5/2} \sqrt{25 - 4x^2}\, dx$

ก. $\frac{25}{2}\pi$ ข. $\frac{15}{4}\pi$

ค. $\frac{27}{4}\pi$ ง. $\frac{25}{4}\pi$

จ. ไม่มีข้อถูก

ตัวอย่าง

วิธีตรง ให้ $x = \frac{5}{2}\sin\theta \quad \therefore dx = \frac{5}{2}\cos\theta\, d\theta$

ช่วง $x = -\frac{5}{2} \quad \therefore \theta = -\frac{\pi}{2}$

ช่วง $x = \frac{5}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

จะได้ว่า $\int_{-5/2}^{5/2}\sqrt{25-4x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{25-25\sin^2\theta}\cdot\frac{5}{2}\cos\theta\,d\theta$

$$= 25\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

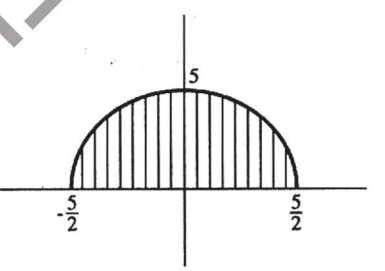
$$= \frac{25}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{25}{2}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{25\pi}{4}$$

วิธีลัด ดูกราฟ $y = \sqrt{25-4x^2} \quad \therefore y^2 = 25-4x^2$

$$y^2 + (2x)^2 = 25$$



$x = 0,\ y = 5$ (-5 ใช้ไม่ได้ $\therefore y = \sqrt{25-4x^2} \quad \therefore y > 0$ เสมอ)

$y = 0,\ x = \frac{5}{2}$ หรือ $-\frac{5}{2}$ ซึ่งจะได้รูปครึ่งวงรี

$\int y\,dx = A$ $\therefore$ หาพื้นที่วงรี ก็สามารถตอบคำถามโจทย์ได้

พ.ท.วงรี $= \pi ab$

ตัวอย่าง

a : ความยาวครึ่งแกนเอก

b : ความยาวครึ่งแกนโท

พ.ท.วงรี $= \pi(5)(\frac{5}{2}) = \frac{25}{2}\pi$

จากรูปเป็นรูปครึ่งวงรี ∴ พ.ท.ครึ่งวงรี $= \frac{25\pi}{4}$

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 3

1. จงหาค่า $\int_{-1}^{1}\sqrt{4-4x^2}\,dx$

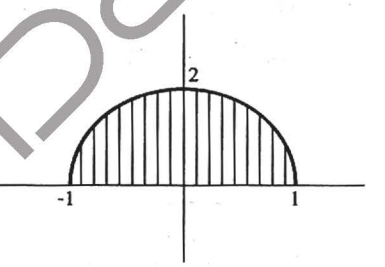
ก. $\frac{\pi}{4}$ ข. $\frac{\pi}{2}$

ค. π ง. 2π

จ. 4π

เฉลย ข้อ ค.

แนะ เขียนแล้วจะได้รูปวงรี



พ.ท.วงรี $= \pi ab$

$= \pi(2)(1) = 2\pi$

∴ พ.ท. ครึ่งวงรี $= \pi$

4. ลาดกระบัง' 36 กำหนดค่า $y = \frac{9x^7}{x^2+1}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $\frac{45x^8+63x^6}{x^4+2x^2+1}$ ข. $\frac{63x^6+2x}{x^2+1}$

ค. $\frac{63x^6 - 18x^8}{(x^2+1)^2}$ ง. $\frac{18x^8 - 63x^6}{x^2+1}$

จ. ไม่มีข้อใดถูก

เฉลย ข้อ ค.

วิธีตรง $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{9x^7}{x^2+1}\right) = \frac{9(x^2+1)7x^6 - 9x^7(2x)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{63x^8 + 63x^6 - 18x^8}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{45x^8 + 63x^6}{x^4 + 2x^2 + 1}$

วิธีลัด เนื่องจากกำลังสูงสุดเศษ คือ พจน์ $9x^7$, กำลังสูงสุดของส่วนคือ x^2, ∴ กำลังสูงสุดพหุนามตรรกยะคือ $9x^5$

Differentiation ของ $9x^5$ ได้ $45x^4$ ดูกำลังสูงสุดของพหุหนามตรรกยะ ของแต่ละตัวเลือก

ก. $45x^4$ ข. $63x^4$ (คิดโดย $\frac{63x^6}{x^2}$)

ค. $63x^2$ (คิดโดย $\frac{63x^6}{(x^2)^2}$) ง. $18x^6$ (คิดโดย $\frac{18x^8}{x^2}$)

คำตอบที่ถูกต้อง คือ ข้อ ก.

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 4

4.1 จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = \frac{x^2 - 3}{x+4}$

ก. $\frac{3x^2 + 8x + 1}{(x+4)^2}$ ข. $\frac{8x^2 + 3x + 1}{(x+4)^2}$

ค. $\frac{x^2 + 3x + 8}{(x+4)^2}$ ง. $\frac{x^2 + 8x + 3}{(x+4)^2}$

จ. $\frac{3x^2 + x + 8}{(x+4)^2}$

เฉลย ง.

ตัวอย่าง

4.2 จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของ $\frac{x^5 - x + 2}{x^3 + 7}$

ก. $\frac{2x^7 + 35x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 7}{(x^3 + 7)^2}$ ข. $\frac{4x^7 + 2x^4 + 35x^3 + 7x^2 - 6}{(x^3 + 7)^2}$

ค. $\frac{6x^7 - 35x^4 + 7x^2 - 6x + 2}{(x^3 + 7)^2}$ ง. $\frac{8x^7 - 2x^4 + 6x^2 + 35x + 4}{(x^3 + 7)^2}$

จ. $\frac{10x^7 - 4x^4 - 35x^3 + 2x + 1}{(x^3 + 7)^2}$

เฉลย ข้อ ก.

5. (ลาดกระบัง'37) $Z = e^{x/y}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + e^{y/x}\cos(y/x)$ จงหาค่า $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$

ก. $\frac{x}{y}$ ข. $-\frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$

ค. 0 ง. $\frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)$

จ. 1

วิธีตรง

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = x\left[\frac{1}{y}\cdot e^{x/y}\left(\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \cos\left(\frac{x}{y}\right)\right) - \frac{y}{x^2}\, e^{y/x}\left(1 + \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right]$$

$$y\frac{\partial z}{\partial y} = y\left[-\frac{x}{y^2}\left(e^{x/y}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + e^{x/y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right) + \frac{1}{x}\, e^{y/x}\left(1 + \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right.$$

$$\left. -e^{y/x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$\therefore \quad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

วิธีลัด มอง $Z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ (เพราะสามารถจัดให้เข้ารูปได้)

$$\therefore \quad x\frac{\partial z}{\partial x} = x f'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y} = \frac{x}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

และ $$y\frac{\partial z}{\partial y} = y f'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y^2} = -\frac{x}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\therefore \quad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 5

5.1 Z ในข้อใดที่ทำให้ $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

ก. $Z = \frac{y}{x+y}$

ข. $Z = xe^{x/y} + ye^{x/y}$

ค. $Z = \sin x \cos y$

ง. $Z = x^2+y^2 + xy + 1$

จ. ไม่มีข้อใดถูก

เฉลย ข้อ ก.

แนะ $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ จะสามารถจัดให้ $Z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ ได้ในข้อ ก.

$$Z = \frac{y}{x+y} = \frac{y\left(\frac{1}{y}\right)}{(x+y)\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{1}{\frac{x}{y}+1}$$

5.2 ถ้า $Z = xe^{y/x}$ จงหา $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$

ก. 0

ข. Z

ค. $e^{y/x}$

ง. x

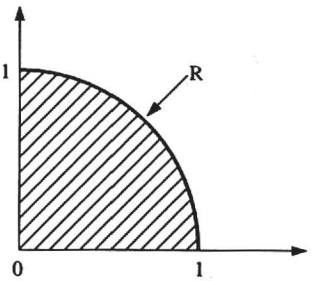
จ. y

เฉลย ข้อ ข.

แนะ พิจารณา $Z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$

ตัวอย่าง

6. (ลาดกระบัง'38) หาค่า $\iint y^2\,dx\,dy$ เมื่อ R เป็นอาณาเขตเส้นประตามรูป



ก. $\frac{\pi}{8}$ ข. $\frac{\pi}{4}$

ค. $\frac{\pi}{16}$ ง. $\frac{\pi}{2}$

จ. $\frac{2\pi}{3}$

วิธีทำตรง $\iint y^2\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2 \sin^2\theta\,dr\,d\theta$

(เปลี่ยนพิกัดคาร์ทีเซียลเป็นพิกัดเชิงขั้ว $x \Rightarrow r\cos\theta$, $y \Rightarrow r\sin\theta$, $dx\,dy \Rightarrow r\,dr\,d\theta$)

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\sin^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,d\theta - \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\theta\Big]_0^{\pi/2} - \frac{1}{16}\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$$

วิธีลัด $\iint y^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\left[\iint y^2\,dx\,dy + \iint x^2\,dx\,dy\right]$

เนื่องจาก x และ y สมมาตรกัน $= \frac{1}{2}\iint(y^2 + x^2\,dx\,dy)$

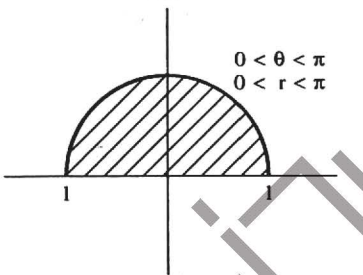
$$= \frac{1}{2}\iint r^2 \, r \, dr \, d\theta \quad (\because x^2 + y^2 = r^2)$$

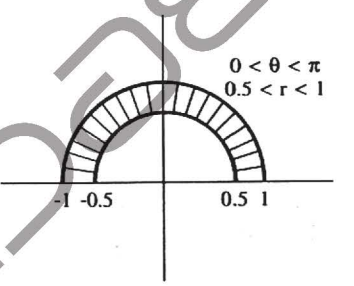
(กำหนดขอบเขตตามรูป)

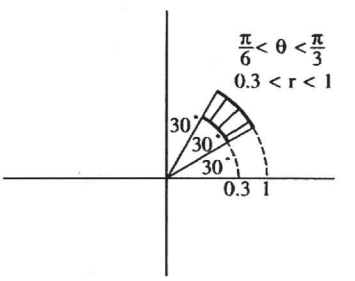
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_{r=1}$$

$$= \frac{\pi}{16}$$

หมายเหตุ กรณีที่ขอบเขตเป็นอย่างอื่นให้สังเกตดังนี้





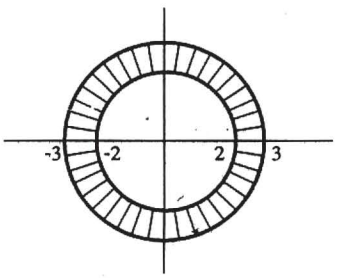


ตัวอย่าง

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 6

6.1 จงหาค่า $\iint x^2\,dx\,dy$ ในบริเวณ R ซึ่งกำหนดตามรูป



ก. $\frac{64\pi}{5}$

ข. $\frac{65\pi}{4}$

ค. $\frac{56\pi}{4}$

ง. $\frac{54\pi}{6}$

จ. $\frac{46\pi}{5}$

เฉลย ข้อ ข.

แนะ $\iint x^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}x^2y^2\,dx\,dy$

$$= \frac{1}{2}\theta\Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}\frac{r^4}{4}\Big|_{r=r_1}^{r=r_2}$$

แทนค่า $\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = 2\pi$ (รอบวงกลม)

$r_1 = 2 \quad r_2 = 3$ (รัศมีภายในและรัศมีภายนอก)

$$= \frac{1}{2}(2\pi - 0)\left(\frac{81-16}{4}\right)$$

$$= \frac{65\pi}{4}$$

ตัวอย่าง

7. (ลาดกระบัง' 38) ผลรวมของอนุกรมอนันต์ $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots$

ก. 1 ข. $\frac{1}{4}$

ค. $\frac{1}{2}$ ง. $\frac{3}{4}$

จ. $\frac{2}{3}$

วิธีตรง

$$\frac{1}{1\cdot 5} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5\cdot 9} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)$$

$$\frac{1}{9\cdot 13} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\therefore \frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{9}}+\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{13}}+\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{4}$$

วิธีลัด กรณี $\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{b\cdot c}+\frac{1}{c\cdot d}+\ldots\ldots\ldots$

ข้อสังเกต 1. ตัวท้ายของพจน์หน้าต้องเท่ากับตัวหน้าของพจน์ถัดไป

2. ผลต่าง b − a, c − b, d − c,.....คงที่

สูตร ผลรวมอนันต์พจน์ $S_\infty = \left|\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(b-a)}\right|$

แทนค่า จะได้ $\frac{1}{4}$ (a = 1, b = 5)

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 7

7.1 ลาดกระบัง' 37 ผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 11}+\ldots\frac{1}{119\cdot 120}$

มีค่าเท่ากับ

ก. $\frac{7}{60}$ ข. $\frac{7}{120}$

ค. $\frac{9}{60}$ ง. $\frac{9}{120}$

จ. $\frac{6}{70}$

เฉลย ข้อ ก.

แนะ แบ่งเป็น 2 อนุกรม คือ

$$A = \frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 11}+\ldots$$

และ $$B = \frac{1}{121\cdot 122}+\frac{1}{122\cdot 123}+\frac{1}{123\cdot 124}+\ldots$$

แล้วหาค่า A - B จะได้ตามโจทย์

7.2 ลาดกระบัง'36 ผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$ มีค่าเท่ากับ

ก. $\frac{1}{2}$ ข. 1 ค. 2 ง. 3 จ. $3\frac{1}{2}$

เฉลย ข้อ ก.

หมายเหตุ กรณี $\frac{1}{a\cdot b\cdot c}+\frac{1}{b\cdot c\cdot d}+\frac{1}{c\cdot d\cdot e}+\ldots$

ข้อสังเกต เลขตัวกลางของพจน์หน้า ต้องเท่ากับเลขตัวหน้าของพจน์ถัดไป

สูตร ผลบวกอนันต์พจน์ $S_\infty = \frac{1}{a\cdot b}\left(\frac{1}{c-a}\right)$

ตัวอย่าง

8. (บางมด' 36) จงหาค่า $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\, dx$ (ไม่มีตัวเลือก เป็นแบบเติมคำ)

วิธีตรง

$$\sin^6 x = (\sin^2 x)^3 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}(1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x)$$

$$\therefore \int \sin^6 x\, dx = \int [\frac{1}{8}(1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x)]dx$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos 2x\, dx + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\, dx$$

$$- \frac{1}{16}\int \cos^2 2x\, d\sin 2x$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{16}\int d\sin 2x + \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx$$

$$- \frac{1}{16}\int \cos^2 2x\, d\sin 2x$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{16}\int dx - \frac{3}{16}\int d\sin(2x) + \frac{3}{64}$$

$$\int d\sin 4x - \frac{1}{16}\int d\sin 2x + \frac{1}{16}\int \sin^2$$

$$2x\, d\sin 2x$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^6 x\, dx = \frac{5}{16}\int_0^{\pi/2} dx - \frac{4}{16}\int_0^{\pi/2} d\sin 2x + 3/6\int_0^{\pi/2}$$

$$d\sin 4x + \frac{1}{16}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2x\, d\sin 2x$$

$$= \frac{5}{16}\left[x\right]_0^{\pi/2} - \frac{4}{16}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$+ \frac{3}{4}\left[\sin 4x\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{48}\left[\sin^3 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{5}{16}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin 0) + \frac{3}{4}(\sin 2\pi$$

$$- \sin 0) + \frac{1}{48}(\sin^3\pi - \sin^3 0)$$

$$= \frac{5\pi}{32}$$

วิธีลัด สูตรคือ

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(n)}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ n เป็นเลขคู่}$$

$$= \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n)} \text{ เมื่อ n เป็นเลขคี่}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ (เพราะเป็นเลขคู่)}$$

$$= \frac{5}{32}\pi$$

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 8

8.1 จงหาค่า $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$, $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dx$

เฉลย

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dy = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{\pi}{2} = \frac{35}{256}\pi$$

8.2 จงหาค่า $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,dx$, $\int_0^{\pi/2} \cos^9 x\,dx$

เฉลย

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,dx = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5} = \frac{8}{15}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^9 x\,dy = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} = \frac{384}{945}$$

9. (บางมด' 35) จงหาค่า $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

วิธีตรง ให้ $Z = \tan\frac{x}{2}$ $\therefore \sin x = \frac{2Z}{1+Z^2}$; $dx = \frac{2}{1+Z^2} = dZ$

ตัวอย่าง

$$\therefore \quad \int \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int 1 + \frac{2Z}{1+Z^2} \cdot \frac{2}{1+Z^2}\,dZ$$

$$= \int \frac{1}{Z^2+2Z+1}\,dZ$$

$$= \int \frac{2}{(Z+1)^2}\,dZ$$

$$= \int \frac{2}{(Z+1)^2}\,d(Z+1)$$

$$= -2\,(Z+1)^{-1}$$

แทนค่ากลับจะได้ $= \dfrac{-2}{\tan\frac{x}{2}+1} + c$

วิธีลัด $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{1}{1+\sin x} \cdot \frac{1-\sin x}{1-\sin x}\,dx = \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$

$$= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x - \tan x \sec x\,dx$$

$$= \tan x - \sec x + c$$

(แม้ว่ารูปคำตอบจะไม่เหมือนกันแต่เป็นคำตอบเดียวกัน)

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 9

9.1 จงหา $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

เฉลย $-\cot x + \operatorname{cosec} x + c$

หมายเหตุ การคูณทั้งเศษและส่วนของค่าบางค่า เพื่อให้สะดวกแก่การอินทิเกรตมีอยู่บ่อย ๆ เช่น

$\int \frac{dx}{e^x+1}$ คูณทั้งเศษและส่วนด้วย e^{-x}

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\ln\,(1+e^{-x}) + c$$

$\int \frac{dx}{x+x^{1/3}}$ คูณทั้งเศษและส่วนด้วย $x^{-1/3}$

ตัวอย่าง

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x + x^{1/3}} = \int \frac{x^{-1/3}}{x^{2/3} + 1}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^{2/3} + 1)}{x^{2/3} + 1}$$

$$= \frac{3}{2} \ln (x^{2/3} + 1) + c$$

9.2 จงหาค่า $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 3}\, dx$

เฉลย $\ln (e^{2x} + 3)^{2/3} - \frac{1}{3} x + c$

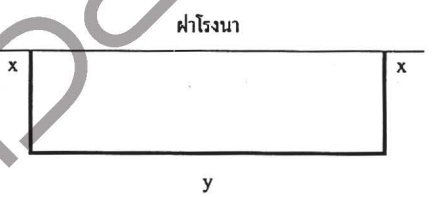
10. (ลาดกระบัง' 36) ชาวนาต้องการกั้นคอกเลี้ยงสัตว์เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยด้านหนึ่งติดกับโรงนา ถ้าเขามีลวดตาข่ายยาว 60 ฟุต คอกเลี้ยงสัตว์ที่ชาวนากั้นจะมีพื้นที่มากที่สุดเท่ากับ

ก. 450 ตารางฟุต ข. 400 ตารางฟุต

ค. 350 ตารางฟุต ง. 300 ตารางฟุต

จ. 250 ตารางฟุต

วิธีทำตรง



พื้นที่ $A = xy$

และ $2x + y = 60$ (ตามโจทย์)

$y = 60 - 2x$

$\therefore \quad A = x(60 - 2x)$

$$\frac{dA}{dx} = 60 - 4x$$

ให้ $\frac{dA}{dx} = 0$

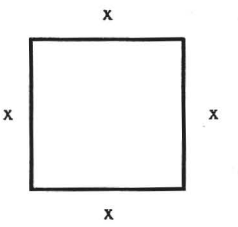
หาค่าสูงสุด $\therefore \quad 60 - 4x = 0$

$$x = 15$$

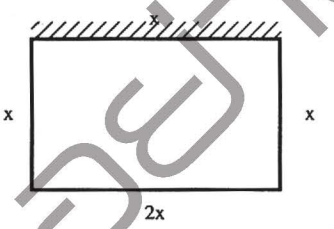
แทนค่า $x = 15,\ A = 450$ ตารางฟุต

วิธีลัด เมื่อต้องการกั้นออก ให้ได้พื้นที่มากที่สุด

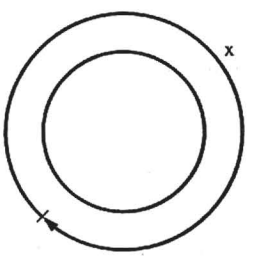
- กรณีที่ไม่มีฝาโรงนา จะเป็นรูป □ จัตุรัส



- กรณีที่มีฝาโรงนา จะเป็นรูป □ ผืนผ้า x, 2x



- กรณีไม่ระบุรูปทรง ต้องเป็นรูปวงกลม เส้นรอบวงเท่ากับ x



ในโจทย์ข้อนี้ เข้ากรณีที่ 2

$$\therefore \quad x + 2x + x = 60$$

$$4x = 60$$

$$x = 15$$

เกิด □ ผืนผ้าขนาด $15 \times 30 = 450$ ตารางฟุต

ตัวอย่าง

11. (ลาดกระบัง' 36) รากสมการ $Z^2 - (j + 2)Z + (3 + j) = 0$ มีค่า

ก. $2 - 3j, 2 + 3j$ ข. $1 + 2j - 1 - j$

ค. $1 - 2j, 1 + j$ ง. $1 - j, 1 + 2j$

จ. $2 + j, 2 - j$

วิธีตรง เนื่องจากเป็นสมการควอดราติก

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

โดย $a = 1,\ b = -(j + 2),\ c = 3 + j$

$$Z = \frac{(2+j) \pm \sqrt{(-(2+j))^2 - 4(1)(3+j)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2+j \pm \sqrt{4 + 4j + j^2 - 12 - 4j}}{2}$$

$$= \frac{(2+j) \pm \sqrt{-9}}{2}$$

$$= \frac{2+j \pm 3j}{2}$$

$$Z = 1 + 2j,\ 1 - j$$

วิธีลัด เนื่องจากรากคำตอบเป็น $Z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

และ $Z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\therefore \quad Z_1 + Z_2 = \frac{-b}{a}$$

ซึ่ง $b = -(j + 2),\ a = 1$

$$\therefore \quad \frac{-b}{a} = j + 2$$

จากตัวเลือกผลบวกคำตอบเท่ากับ $j + 2$ มีเฉพาะข้อ ง. เท่านั้น

12. (บางมด' 37) กำหนดให้ $y^2 + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x^2} - 3 = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีตรง ใช้การหาอนุพันธ์แบบ Implicit

$$\frac{d}{dx}\left(y^2 + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x^2} - 3\right) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2y\frac{dy}{dx} + (-1)(x+y)^{-2}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) - (-2)(x)^{-3} = 0$$

$$2y\,y' + -(x+y)^{-2} + -(x+y)^{-2}\,y' + 2x^{-3} = 0$$

$$2y\,y' - (x+y)^{-2}\,y' = (x+y)^{-2} - 2x^{-3}$$

$$\left[2y - (x+y)^{-2}\right]y' = (x+y)^{-2} - 2x^{-3}$$

$$y' = \frac{(x+y)^{-2} - 2x^{-3}}{2y - (x+y)^{-2}}$$

วิธีลัด ใช้การหาอนุพันธ์แบบ Partial dirivative

ให้ $Z = y^2 + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x^2} + 3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial Z/\partial x}{\partial Z/\partial y}$$

$$= \frac{\left[-(x+y)^{-2} + 2x^{-3}\right]}{2y - (x+y)^{-2}}$$

ตัวอย่าง

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 12

จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ

1. $y^3 + 2xy - 12 = 0$
2. $e^x \sin y + e^y \sin x = 1$
3. $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 1$
4. $xy - e^x \sin y = 0$
5. $\tan(x^2 + y^2) - \arctan y/x = 0$

เฉลย 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{3y^2 + x}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{-e^x \sin y + e^y \cos x}{e^x \cos y + e^y \sin x}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - 2xy + 3y^2}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \sin y - y}{x - e^x \cos y}$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{x - 2y}$

13. (บางมด' 34) จงหาค่าของ $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x}$

วิธีตรง ใช้ L' Hospital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} = \frac{6}{e^x} = 0$$

ใช้สูตร $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่ออยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

วิธีลัด พิจารณา x^3 เป็น polinomial e^x เป็น exponential เพิ่ม

$$\therefore \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$$

ข้อควรจำ เมื่อ $\lim_{x \to \infty} \frac{\text{ฟังก์ชัน polinomial}}{\text{ฟังก์ชัน polinomial}}$

ประวัติผู้เขียน

พิชัย ดีเส็ง

การศึกษา

จบมัธยม ร.ร.สาธิตคณะศึกษาศาสตร์
มหาวิทยาลัยขอนแก่น
จบปริญญาตรี วิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ประสบการณ์

อาจารย์พิเศษ สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล
วิทยาเขตนนทบุรี

วิศวกร บริษัท ไทยเทเลโทรล จำกัด
บริษัท ไทยอิมเมจิก จำกัด

ตัวอย่าง

ติวเข้ม MATH วิศวะฯ
ISBN 974-8323-00-5
9 789748 323008
ราคา 160 บาท