สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

พีชคณิตไม่เปลี่ยนหมู่
(Non-Associative Algebras)

ดร.ไพโรจน์ เยียระยง

สารบัญ

คำนำ

เป็นที่ทราบกันว่าทฤษฎีบททางพีชคณิตที่ไม่มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ (non-associative) ได้พัฒนาขึ้นเป็นอย่างมากพร้อมกับการประยุกต์สู่หลายสาขาวิชา เช่น สาขาวิชาคอมพิวเตอร์เชิงทฤษฎี (theoretical computer science) และกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย (left almost semigroup) เป็นต้น ยิ่งไปกว่านั้นมีงานวิจัยทางพีชคณิตที่ไม่มีสมบัติเปลี่ยนหมู่เกิดขึ้นอย่างมากมาย แต่จะเน้นเนื้อหาที่ต่างๆ กันไป

จุดประสงค์ของผู้เขียนในการเขียนหนังสือเล่มนี้คือ การเขียนหนังสือพีชคณิตไม่เปลี่ยนหมู่ (non-associative algebras) ที่เป็นเล่มแรกในเชิงทฤษฎี (theory) ในแนวที่ผู้เขียนสนใจ โดยใช้ความรู้จากบทความวิจัยต่างๆ ตามที่ระบุไว้ในบรรณานุกรม นอกจากนี้ผู้เขียนได้นำเสนอองค์ความรู้ใหม่จากงานวิจัยในวารสารต่างๆ ที่ระบุไว้ในบรรณานุกรม ในส่วนขององค์ความรู้ใหม่ที่อ้างจากวารสารดังกล่าวนั้น ผู้เขียนพบว่ายังไม่พบว่ามีอยู่ในหนังสือเล่มใด ยิ่งไปกว่านั้นผู้เขียนได้นำเสนอผลงานวิจัยบางส่วนของตนเองที่เนื้อหาเข้ากันได้ดีในหนังสือเล่มนี้ด้วย

หนังสือ***พีชคณิตไม่เปลี่ยนหมู่*** (non-associative algebras) เล่มนี้ได้เรียบเรียงขึ้นจากการศึกษาค้นคว้าเอกสาร งานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อใช้ในการประกอบการเรียนการสอนสำหรับนิสิต นักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ หรือผู้สนใจในหัวข้อและสาระที่เกี่ยวข้อง โดยศัพท์ที่ใช้ในการเรียบเรียงครั้งนี้จะยึดคำศัพท์คณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2559 เป็นหลัก

โดยเนื้อหาประกอบด้วย ความรู้พื้นฐาน กึ่งกรุปเกือบซ้าย กึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ $\mathcal{LA}^{**}$-กึ่งกรุปลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปเกือบซ้าย กึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติควอซีซ้าย กรุปเกือบซ้าย ริงเกือบซ้าย มอดูลเกือบซ้าย เซตย่อยวิภัชนัยค่าช่วง $\left(\in_{\tilde{a}}, \in_{\tilde{a}} \vee q_{\tilde{b}}\right)$-เซตย่อยวิภัชนัยค่าช่วงและ $\left(\in_{\tilde{a}}, \in_{\tilde{a}} \vee q_{\tilde{b}}\right)$ -เซตย่อยวิภัชนัยค่าช่วง รวมทั้งหมด 12 บท ดังที่ปรากฏในสารบัญ

ดังนั้นในการศึกษาจากหนังสือเล่มนี้สำหรับผู้เริ่มต้นควรศึกษาเป็นลำดับในแต่ละบท แต่สำหรับผู้ที่มีพื้นฐานมาแล้ว อาจจะไม่จำเป็นต้องเรียงลำดับก็ได้ โดยในแต่ละบทจะเน้นการพิสูจน์เป็นสำคัญ และทุกครั้งที่จบการพิสูจน์หรือจบการแสดงจะปิดท้ายด้วยเครื่องหมาย “□” และเมื่อจบในแต่ละบทจะสรุปเนื้อหาและแบบฝึกหัดเพื่อเป็นการฝึกทักษะสำหรับนิสิต นักศึกษา

จึงหวังว่าหนังสือนี้คงเป็นประโยชน์สำหรับนิสิต นักศึกษา วิชาเอกคณิตศาสตร์และผู้สนใจทั่วไป หากท่านพบข้อบกพร่องประการใด กรุณาแจ้งให้ทราบด้วย จะเป็นพระคุณอย่างสูง

ไพโรจน์ เยียระยง

บทที่ 2
กึ่งกรุปเกือบซ้าย
(Left Almost Semigroups)

ในบทนี้เป็นการอธิบายความหมายของกึ่งกรุปเกือบซ้ายหรือที่เรียกกันย่อ ๆ ว่า LA -กึ่งกรุป คือกรุปพอยด์ที่ได้พัฒนามาจากทฤษฎีบทของกึ่งกรุป และกึ่งกรุปสลับที่ โครงสร้างของกึ่งกรุปเกือบซ้ายเป็นการศึกษาเกี่ยวกับเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและการดำเนินการทวิภาคบนเซตดังกล่าว ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญของโครงสร้างพีชคณิตที่ถูกค้นพบครั้งแรกโดย คาซิมและเนซีรูดดิน (Kazim and Naseeruddin) ในปี 1977 ได้กล่าวว่า "กึ่งกรุปเกือบซ้ายเป็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่พัฒนามาจากกรุปพอยด์และกึ่งกรุปสลับที่" ยิ่งไปกว่านั้นได้ค้นพบสมบัติที่น่าสนใจบางประการ เช่น สำหรับทุกกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้ายจะเป็นโมนอยด์สลับที่เสมอ ยิ่งไปกว่านั้นได้อธิบายถึงไอดีลในกึ่งกรุปเกือบซ้ายอีกด้วย นอกจากนี้ยังมีนักคณิตศาสตร์อีกมากมายที่ศึกษาและพัฒนาสมบัติต่าง ๆ ของกึ่งกรุปเกือบซ้าย เช่น

ในปี ค.ศ. 1992 ฮอลเกต (Holgate) ได้ค้นพบสมบัติของกึ่งกรุปเกือบซ้าย S ว่าสอดคล้องกับกฎมัธยฐาน กล่าวคือ $(ab)(cd)=(ac)(bd)$ สำหรับทุก $a,b,c,d \in S$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2009 มูชแท็คและคาน (Mushtaq and Khan) ได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับสมบัติบางประการของกึ่งกรุปเกือบซ้าย เช่น จะเรียกเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่าง A ของกึ่งกรุปเกือบซ้าย S ว่ากึ่งกรุปย่อยเกือบซ้าย ถ้า $A^2 \subseteq A$ และจะเรียกกึ่งกรุปย่อยเกือบซ้าย A ของกึ่งกรุปเกือบซ้าย S ว่า ไอดีลซ้าย (ขวา) ของ S ถ้า $SA \subseteq A$ ($AS \subseteq A$) ยิ่งไปกว่านั้นเรียก A ว่าไอดีลสองด้านหรือไอดีล ถ้า A เป็นทั้งไอดีลซ้ายและขวาของ S ในบทนี้จะอธิบายถึงทฤษฎีบท สมบัติ และตัวอย่างต่าง ๆ ของกึ่งกรุปเกือบซ้ายและไอดีลบางไอดีลในกึ่งกรุปเกือบซ้าย ดังนี้

2.1 การดำเนินการทวิภาค (Binary Operations)

การดำเนินการ (operation) ในทางคณิตศาสตร์จะหมายถึงการกระทำหรือลำดับขั้นตอนที่สร้างค่าใหม่ขึ้นมาเป็นผลลัพธ์ โดยการป้อนค่าเข้าไปหนึ่งตัวหรือมากกว่า ในหัวข้อนี้จะอธิบายถึงโครงสร้างพื้นฐานทางพีชคณิตของกรุปพอยด์ กึ่งกรุป สมบัติ และตัวอย่างต่าง ๆ ของกึ่งกรุปเกือบซ้าย เป็นต้น โดยเริ่มต้นจากการอธิบายบทนิยามของการดำเนินการ n ภาค ดังนี้

บทนิยาม 2.1.1 ให้ S เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและ "$\cdot$" เป็นฟังก์ชันจาก $\prod_{i=1}^{n} S$ ไป S $(\cdot : \prod_{i=1}^{n} S \to S)$ จะเรียก "$\cdot$" ว่า การดำเนินการ n ภาค (n -ary operation) บน S

จากบทนิยาม 2.1.1 จะได้ว่า ถ้า $n=1$ แล้วจะเรียก “$\cdot$” ว่า **การดำเนินการเอกภาค (unary operation)** บน S ถ้า $n=2$ แล้วจะเรียก “$\cdot$” ว่า **การดำเนินการทวิภาค (binary operation)** บน S การดำเนินการเอกภาคจะใช้ค่าที่ป้อนเข้าไปเพียงหนึ่งค่า เช่น นิเสธหรือฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นต้น ส่วนการดำเนินการทวิภาคจะใช้สองค่า เช่น การบวก การลบ การคูณ การหาร การยกกำลัง เป็นต้น

หมายเหตุ จากบทนิยาม 2.1.1 จะได้ว่าการดำเนินการ n ภาค “$\cdot$” บน S เป็นกฎเกณฑ์บางอย่างซึ่ง ถ้า $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\prod_{i=1}^{n}S$ แล้ว**ภาพ (image)** ของ $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ภายใต้กฎเกณฑ์นี้จะต้องเป็นสมาชิกตัวหนึ่งและตัวเดียวเท่านั้นใน S

ข้อตกลง กำหนดให้ “$\cdot$” เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S ถ้า $(x,y)\in S\times S$ ต่อไปนี้จะเขียนภาพของ (x,y) ด้วย $x\cdot y$ นั่นคือ $\cdot(x,y)=x\cdot y$

ตัวอย่าง 2.1.2 ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของการดำเนินการทวิภาค

1. กำหนดให้ “$*$” เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$ นิยามโดย $x*y=x$ จะได้ว่า $1*(-1)=1, -2*3=-2$ เป็นต้น

2. กำหนดให้ $\Diamond$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตจำนวนเต็มบวก $\mathbb{Z}^+$ นิยามโดย $x\Diamond y=x*y+2$ ซึ่ง “$*$” นิยามตามข้อ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2\Diamond 3 &= 2*3+2 \\ &= 2+2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

เป็นต้น

ตัวอย่าง 2.1.3 ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของการดำเนินการทวิภาคบน S

1. กำหนดให้ $S=\{1,2,3\}$ และมีการดำเนินการตามตาราง 2.1

ตาราง 2.1 แสดงการดำเนินการ “.” บนเซต S

$\cdot$	1	2	3
1	2	2	3
2	2	2	2
3	2	2	2

จากตารางเห็นได้ชัดเจนว่า “$\cdot$” เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S เพราะว่า

- $1\cdot 1 = 2 \in S, 1\cdot 2 = 2 \in S, 1\cdot 3 = 3 \in S$
- $2\cdot 1 = 2 \in S, 2\cdot 2 = 2 \in S, 2\cdot 3 = 3 \in S$
- $3\cdot 1 = 2 \in S, 3\cdot 2 = 2 \in S, 3\cdot 3 = 3 \in S$

2. กำหนดให้ $S = \{1,2,3\}$ และมีการดำเนินการตามตาราง 2.2

ตาราง 2.2 แสดงการดำเนินการ “.” บนเซต S

$\cdot$	1	2	3
1	2	2	0
2	2	2	2
3	2	2	2

จากตารางเห็นได้ชัดเจนว่า “$\cdot$” ไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S เพราะว่า $1\cdot 3 = 0 \notin S$

หมายเหตุ ตารางแสดงการดำเนินการในตาราง 2.1 และ 2.2 เรียกว่า **ตารางเคเลย์ (Cayley table)** ตั้งขึ้นเพื่อเป็นเกียรติแก่ อาร์เทอร์ เคเลย์ (Arthur Cayley ค.ศ. 1821-1895) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ

บทนิยาม 2.1.4 ระบบพีชคณิต (algebraic system) คือ ระบบที่ประกอบด้วยเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและการดำเนินการทวิภาคอย่างน้อยหนึ่งการดำเนินการบนเซตดังกล่าว

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 2.1.4 จะได้ว่า $(S,*)$ เป็นระบบพีชคณิต ถ้า $S \neq \varnothing$ และ “$*$” เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S ยิ่งไปกว่านั้นจะเรียก S ว่ามีสมบัติปิด **(closed)** ภายใต้การดำเนินการ “$*$”

ตัวอย่าง 2.1.5 จากตัวอย่าง 2.1.2 และตัวอย่าง 2.1.3 (1) จะได้ว่า $(\mathbb{Z},*), (\mathbb{Z}^+,\Diamond), (\mathbb{Z},*,\Diamond)$ และ $(S,\cdot)$ เป็นระบบพีชคณิต แต่ในตัวอย่าง 2.1.3 (2) $(S,\cdot)$ ไม่เป็นระบบพีชคณิต

บทนิยาม 2.1.6 ระบบพีชคณิต $(S,*)$ จะเรียกว่า **กรุปพอยด์ (groupoid)** ถ้า “$*$” เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 2.1.6 จะได้ว่า $(S,*)$ จะเป็นกรุปพอยด์ ก็ต่อเมื่อ S มีสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ $*$

ตัวอย่าง 2.1.7 จากตัวอย่าง 2.1.2 และตัวอย่าง 2.1.3 (1) จะได้ว่า $(\mathbb{Z},*),(\mathbb{Z}^+,\Diamond)$ และ $(S,\cdot)$ เป็นระบบพีชคณิตที่เป็นกรุปพอยด์ แต่ $(\mathbb{Z}^+,*,\Diamond)$ เป็นระบบพีชคณิตแต่ไม่เป็นกรุปพอยด์

บทนิยาม 2.1.8 กำหนดให้ "$*$" เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S จะกล่าวว่า S มีสมบัติ**เปลี่ยนหมู่** **(associative)** ภายใต้การดำเนินการ "$*$" ถ้า $(x*y)*z = x*(y*z)$ สำหรับทุก $x,y,z\in S$

หมายเหตุ โดยบทนิยาม 2.1.8 ถ้า S มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ภายใต้การดำเนินการ "$*$" แล้วสามารถเขียน $x*y*z$ แทน $(x*y)*z$ หรือ $x*(y*z)$ ได้เสมอ

ตัวอย่าง 2.1.9 กำหนดให้ $S=\{1,x\}$ และมีการดำเนินการตามตาราง 2.3

ตาราง 2.3 แสดงการดำเนินการ "." บนเซต S

$*$	1	x
1	1	x
x	1	x

จากตารางเห็นได้ชัดเจนว่า "$*$" เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S เพราะว่า $1*1=1\in S, 1*x=x\in S$, $x*1=1\in S$ และ $x*x=x\in S$ ดังนั้น S เป็นกรุปพอยด์ เนื่องจาก

- $(1*1)*1=1*1=1=1*1=1*(1*1), (1*1)*x=1*x=x=1*x=1*(1*x)$
- $(1*x)*1=x*1=1=1*1=1*(x*1), (1*x)*x=x*x=x=1*x=1*(x*x)$
- $(x*1)*1=1*1=1=x*1=x*(1*1), (x*1)*x=1*x=x=x*x=x*(1*x)$
- $(x*x)*1=x*1=1=x*1=x*(x*1), (x*x)*x=x*x=x=x*x=x*(x*x)$

จึงได้ว่าถ้านำสมาชิกแต่ละสมาชิกของ S มาดำเนินการโดยไม่สำคัญว่าลำดับของตัวถูกดำเนินการจะเป็นอย่างไรผลที่ได้จะเท่ากันเสมอ จึงสรุปได้ว่า S เป็นกรุปพอยด์ที่มีสมบัติเปลี่ยนหมู่

บทนิยาม 2.1.10 กรุปพอยด์ $(S,*)$ จะเรียกว่า **กึ่งกรุป (semigroup)** ถ้า S ภายใต้การดำเนินการ "$*$" มีสมบัติเปลี่ยนหมู่

ข้อสังเกต ระบบพีชคณิต $(S,*)$ จะเป็นกึ่งกรุป ถ้า S มีสมบัติปิดและเปลี่ยนหมู่ภายใต้การดำเนินการ "$*$"

ตัวอย่าง 2.1.11 เห็นได้ชัดเจนว่าระบบพีชคณิต $(\mathbb{Z},+)$ และ $(\mathbb{Z},\times)$ เป็นกึ่งกรุป แต่จากตัวอย่าง 2.1.3 ข้อ 1 จะได้ว่า $(S,\cdot)$ ไม่เป็นกึ่งกรุปเพราะว่ามีสมาชิก $1,3\in S$ ซึ่ง $(1\cdot 1)\cdot 3 = 2\cdot 3 = 2 \neq 3 = 1\cdot 3 = 1\cdot(1\cdot 3)$ จึงไม่มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ภายใต้การดำเนินการ “$\cdot$”

ตัวอย่าง 2.1.12 กำหนดให้ “$*$” เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต $\mathbb{N}$ โดยที่ $x*y = x+y+xy$ เห็นได้ชัดเจนว่า $(\mathbb{N},*)$ เป็นกรุปพอยด์ ต่อไปจะแสดงสมบัติเปลี่ยนหมู่ภายใต้การดำเนินการ “$*$” กำหนดให้ x, y และ z เป็นสมาชิกใด ๆ ใน $\mathbb{N}$ โดยเงื่อนไขของ “$*$” จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
(x*y)*z &= (x+y+xy)*z \\
&= (x+y+xy)+z+(x+y+xy)z \\
&= x+y+xy+z+xz+yz+xyz \\
&= x+y+z+xy+xz+yz+xyz
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
x*(y*z) &= x*(y+z+yz) \\
&= x+(y+z+yz)+x(y+z+yz) \\
&= x+y+z+yz+xy+xz+xyz \\
&= x+y+z+xy+xz+yz+xyz
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $x*(y*z) = x*(y*z)$ นั่นคือมีสมบัติปิดและเปลี่ยนหมู่ภายใต้การดำเนินการ “$*$” ดังนั้น $(\mathbb{N},*)$ เป็นกึ่งกรุป

บทนิยาม 2.1.13 กำหนดให้ $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุป จะเรียก $(S,*)$ ว่า **กึ่งกรุปสลับที่ (commutative semigroup)** ถ้า $x*y = y*x$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน S และเรียกสมบัตินี้ว่าสมบัติ**สลับที่ (commutative)** ใน S

ตัวอย่าง 2.1.14 เห็นได้ชัดเจนว่าระบบพีชคณิต $(\mathbb{Z},+)$ และ $(\mathbb{Z},\times)$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

2.2 กึ่งกรุปเกือบซ้าย (Left Almost Semigroups)

โดยปรกติทั่ว ๆ ไปแล้วกรุปพอยด์จะมีสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการใดการดำเนินการหนึ่ง “$*$” ที่สนใจ ในหัวข้อนี้จะอธิบายกรุปพอยด์ที่มีลักษณะพิเศษบางประการกล่าวคือเป็นกรุปพอยด์ที่มีสมบัติอินเวอร์ทีฟซ้ายแต่ไม่มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ จะเรียกกรุปพอยด์นั้นว่า “กึ่งกรุปเกือบซ้าย” ซึ่งจะอธิบายความหมายในบทนิยาม 2.2.1 ต่อไป นอกจากนี้ในหัวข้อนี้จะอธิบายถึงสมบัติ และตัวอย่างต่าง ๆ ของกึ่งกรุปเกือบซ้าย โดยเริ่มต้นจากการอธิบายบทนิยามของกึ่งกรุปเกือบซ้าย ดังนี้

บทนิยาม 2.2.1 กำหนดให้ $(S,\cdot)$ เป็นกรุปพอยด์ จะเรียก S ว่า **กึ่งกรุปเกือบซ้าย (left almost semigroup)** หรือที่เรียกย่อ ๆ ว่า **$\mathcal{LA}$-กึ่งกรุป ($\mathcal{LA}$-semigroup)** ถ้า $(x\cdot y)\cdot z=(z\cdot y)\cdot x$ สำหรับทุกสมาชิก x,y และ z ใน S และเรียกสมบัตินี้ว่า **อินเวอร์ทีฟซ้าย (left invertive)**

หมายเหตุ ตำราบางเล่มอาจจะเรียกกึ่งกรุปเกือบซ้ายว่า **กรุปพอยด์ของอเบล-แกรสส์แมนน์ (Abel-Grassmann's groupoid)** หรือที่เรียกย่อ ๆ ว่า **$\mathcal{AG}$-กรุปพอยด์ ($\mathcal{AG}$-groupoid)**

ข้อสังเกต กำหนดให้ S เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จากบทนิยาม 2.2.1 จะได้ว่า S เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายภายใต้การดำเนินการ “$\cdot$” ถ้ามีสมบัติ

1. $x\cdot y\in S$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน S (สมบัติปิด)
2. $(x\cdot y)\cdot z=(z\cdot y)\cdot x$ สำหรับทุกสมาชิก x,y และ z ใน S (สมบัติอินเวอร์ทีฟซ้าย)

ตัวอย่าง 2.2.2 กำหนดให้ $S=\{1,2,3\}$ และมีการดำเนินการดังตาราง 2.4

ตาราง 2.4 แสดงการดำเนินการ “.” บนเซต S

$\cdot$	1	2	3
1	1	1	1
2	3	3	3
3	1	1	1

จากตารางเห็นได้ชัดเจนว่า S เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายภายใต้การดำเนินการ “$\cdot$” (สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่าง 2.1.3 ข้อ 1) แต่ไม่เป็นกึ่งกรุป เนื่องจากมีสมาชิก 2 และ 3 ใน S โดยที่ $(2\cdot 2)\cdot 3=3\cdot 3=1$ แต่ $2\cdot(2\cdot 3)=2\cdot 3=3$ จึงได้ว่า $(2\cdot 2)\cdot 3\neq 2\cdot(2\cdot 3)$ จึงไม่มีสมบัติเปลี่ยนหมู่

ตัวอย่าง 2.2.3 กำหนดให้ $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ และมีการดำเนินการดังตาราง 2.5

ตาราง 2.5 ตารางแสดงการดำเนินการ “$*$” บนเซต S

$*$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	6	1	2	3	4	5
3	5	6	1	2	3	4
4	4	5	6	1	2	3
5	3	4	5	6	1	2
6	2	3	4	5	6	1

จากตารางเห็นได้ชัดเจนว่า S เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายภายใต้การดำเนินการ “$*$” (สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่าง 2.1.3 ข้อ 1) แต่ไม่เป็นกึ่งกรุป เนื่องจากมีสมาชิก 2,3 และ 4 ใน S โดยที่ $(3\cdot4)\cdot2=2\cdot2=1$ แต่ $3\cdot(4\cdot2)=3\cdot5=3$ จึงได้ว่า $(3\cdot4)\cdot2\neq3\cdot(4\cdot2)$ จึงไม่มีสมบัติเปลี่ยนหมู่

ตัวอย่าง 2.2.4 กำหนดให้ $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ และ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงตามลำดับ ระบบพีชคณิต $(\mathbb{Z},*),(\mathbb{Q},\circ)$ และ $(\mathbb{R},\Diamond)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย แต่ไม่เป็นกึ่งกรุป (ทำเป็นแบบฝึกหัด) เมื่อ

1. $x*y=y-x$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน $\mathbb{Z}$
2. $x\circ y=y\div x$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน $\mathbb{Q}-\{0\}$
3. $x\Diamond y=y\div x$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน $\mathbb{R}-\{0\}$

ข้อตกลง ถ้าไม่เกิดความคลุมเครือและสับสน จะเขียนกึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S,*)$ และ $x*y$ ด้วย S และ xy ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 2.2.5 ถ้า S เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายแล้ว $(ab)(cd)=(ac)(bd)$ สำหรับทุกสมาชิก a,b,c และ d ใน S

การพิสูจน์ กำหนดให้ a,b,c และ d เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$\begin{aligned}(ab)(cd) &= ((cd)b)a\\ &= ((bd)c)a\\ &= (ac)(bd)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(ab)(cd)=(ac)(bd)$ □

บทนิยาม 2.2.6 จะเรียกสมบัติในทฤษฎีบท 2.2.5 ว่า **มัธยะ (medial)**

บทแทรก 2.2.7 ถ้า S เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายแล้วเงื่อนไขดังต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $(xy)z = y(zx)$ สำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใน S
2. $(xy)z = y(xz)$ สำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใน S

การพิสูจน์ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 2.2.5 $\square$

ทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงบางความสัมพันธ์ระหว่างกึ่งกรุปเกือบซ้ายและกึ่งกรุป

ทฤษฎีบท 2.2.8 ทุกกึ่งกรุปเกือบซ้าย S จะเป็นกึ่งกรุปก็ต่อเมื่อ $x(yz) = (zy)x$ สำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใน S

การพิสูจน์ สมมติให้ S เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายและมีสมบัติ $x(yz) = (zy)x$ สำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใน S โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$\begin{aligned} x(yz) &= (zy)x \\ &= (xy)z \end{aligned}$$

สำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใน S ดังนั้น S เป็นกึ่งกรุป

สมมติให้ S จะเป็นกึ่งกรุป และกำหนดให้ x, y และ z เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z \\ &= (zy)x \end{aligned}$$

ดังนั้น $x(yz) = (zy)x$ จึงได้ว่า S เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย $\square$

ทฤษฎีบท 2.2.9 ถ้า S เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายแล้ว $(xy)^2 = x^2y^2$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน S

การพิสูจน์ กำหนดให้ x และ y เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$\begin{aligned} (xy)^2 &= (xy)(xy) \\ &= ((xy)y)x \\ &= ((yy)x)x \\ &= (xx)(yy) \\ &= x^2y^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(xy)^2 = x^2y^2$ $\square$

บทนิยาม 2.2.10 กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายภายใต้การดำเนินการ "$\cdot$" จะเรียก S ว่ามี **เอกลักษณ์ซ้าย** [ขวา] **(left** [right] **identity)** ภายใต้การดำเนินการ "$\cdot$" ถ้ามีสมาชิก e ใน S ที่ทำให้ $e\cdot x = x[x\cdot e = x]$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน S และจะเรียกสมาชิก e ใน S ว่า **เอกลักษณ์ซ้าย** [ขวา] ยิ่งไปกว่านั้นจะเรียก S ว่ามี **เอกลักษณ์ (identity)** ภายใต้การดำเนินการ "$\cdot$" ถ้ามีสมาชิก e ใน S ซึ่ง e เป็นทั้งเอกลักษณ์ซ้ายและเอกลักษณ์ขวาใน S และจะเรียกสมาชิก e ใน S ดังกล่าวว่า **เอกลักษณ์**

ข้อสังเกต กำหนดให้ S เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จากบทนิยาม 2.2.10 จะได้ว่า S เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย ถ้าสมบัติ

1. $x\cdot y \in S$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน S (สมบัติปิด)
2. $(x\cdot y)\cdot z = (z\cdot y)\cdot x$ สำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใน S (สมบัติอินเวอร์ทีฟซ้าย)
3. จะมีสมาชิก e ใน S สำหรับทุกสมาชิก x ใด ๆ ใน S ซึ่ง $ex = x$ (สมบัติเอกลักษณ์ซ้าย)

ตัวอย่าง 2.2.11 กำหนดให้ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ และมีการดำเนินการดังตาราง 2.5 ในตัวอย่าง 2.2.3 จะได้ว่า S เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายภายใต้การดำเนินการ "$*$" ยิ่งไปกว่านั้น 1 เป็นเอกลักษณ์ซ้าย แต่ไม่เป็นเอกลักษณ์ขวาเพราะว่า $3*1 = 5$ จึงสรุปได้ว่า 1 ไม่เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ "$*$"

ทฤษฎีบท 2.2.12 ทุกกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้ายจะมีเอกลักษณ์ซ้ายเพียงตัวเดียวเท่านั้น

การพิสูจน์ กำหนดให้ e และ e_0 เป็นเอกลักษณ์ซ้ายของกึ่งกรุปเกือบซ้าย S โดยสมบัติของเอกลักษณ์ซ้ายจะได้ว่า $ee_0 = e_0$ และ $e_0e = e$ ดังนั้นโดยสมมติฐานทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} e_0 &= ee_0 \\ &= (ee)e_0 \\ &= (e_0e)e \\ &= ee \\ &= e \end{aligned}$$

ดังนั้น S มีเอกลักษณ์ซ้ายเพียงตัวเดียวเท่านั้น □

ข้อตกลง ถ้าไม่เกิดความคลุมเครือและสับสนแล้วจะให้สมาชิก e ในกึ่งกรุปเกือบซ้าย S แทนเอกลักษณ์ซ้ายใน S เสมอ

ISBN 978-616-314-814-8
9 786163 148148
ราคา 350 บาท
หมวดคณิตศาสตร์

http://thammasatpress.tu.ac.th