



Calculus 2

FOR ENGINEERS



สแกน QR Code

ตัวอย่างเฉลย

แคลคูลัส 2

สำหรับ

วิศวกร

สำหรับนักศึกษาในระดับ ปวส. และระดับปริญญาตรี

- ระบบพิกัดเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม
- เส้น ราบ และพื้นผิวในสามมิติ
- อินทิกรัลหลายชั้น
- แคลคูลัสของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
- ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย

คำนำ

ตำราแคลคูลัส 2 สำหรับวิศวกร (Calculus 2 for Engineers) เล่มนี้ ผู้เขียนได้เขียนและเรียบเรียงขึ้น เพื่อให้ให้นักศึกษาได้มีตำราที่ใช้ในการประกอบการเรียนการสอนนักศึกษาในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศ.บ.) หลักสูตรอุตสาหกรรมศาสตรบัณฑิต (อศ.บ.) และหลักสูตรครุศาสตรอุตสาหกรรมบัณฑิต (ค.อ.บ.) ระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี นอกจากนี้ตำราเล่มนี้นักศึกษามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอื่น ๆ และสถาบันอาชีวศึกษาทั่วประเทศ สามารถศึกษาเนื้อหาที่มีความสนใจเพื่อใช้ในการประกอบการเรียนการสอนเพิ่มเติมได้ โดยมีเนื้อหาดังนี้

1. ระบบพิกัดเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม
2. เส้น ระนาบ และพื้นผิวในสามมิติ
3. แคลคูลัสของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
4. ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย
5. อินทิกรัลหลายชั้น

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราแคลคูลัส 2 สำหรับวิศวกร เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ในการประกอบการเรียนการสอนของนักศึกษาและผู้ที่ต้องการใช้ประกอบการศึกษาเพิ่มเติม

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดาและมารดา ที่มีพระคุณอันยิ่งใหญ่มหาศาลหาสิ่งอื่นใดเสมอมิได้ และผู้เขียนขอโอกาสนี้แสดงคารวะและกตัญญูต่อก่อนคุณครู อาจารย์ทุก ๆ ท่านของผู้เขียน รวมทั้งผู้ช่วยศาสตราจารย์เมธี ลิ้มอักษร ผู้ช่วยศาสตราจารย์เสกสรรค์ คำกระบี่ รองศาสตราจารย์ ดร. สมใจ จิตต์พิทักษ์ รองศาสตราจารย์ ดร. วิชัย ชำนิ รองศาสตราจารย์สมศักดิ์ โพธิ์วิจิตร รองศาสตราจารย์ สุพจน์ ชะนะมา รองศาสตราจารย์ ดร. สุเทพ ทองอยู่ ศาสตราจารย์ ดร. สมหวัง พิธิยานุวัฒน์ ศาสตราจารย์ ดร. อุทุมพร จามรมาน อาจารย์ ดร. อนุรักษ์ ตนานนท์ และรองศาสตราจารย์ ดร. กิตติพร ปัญญาบุญไธผล ที่เป็นบุรพคณาจารย์ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้และประสบการณ์ต่าง ๆ ให้แก่ผู้เขียน รวมถึงเพื่อนร่วมงานทุกคน และท้ายสุดครอบครัวอันเป็นที่รักยิ่งที่สุดของผู้เขียนตลอดมา

รองศาสตราจารย์ ดร. ชีระศักดิ์ อุรจันานนท์

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1	
ระบบพิกัดเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม	1
ระบบพิกัดเชิงขั้ว	1
แบบฝึกหัด 1.1	15
คำตอบแบบฝึกหัด 1.1	17
กราฟในพิกัดเชิงขั้ว	18
แบบฝึกหัด 1.2	36
คำตอบแบบฝึกหัด 1.2	37
สมการอิงตัวแปรเสริม	40
แบบฝึกหัด 1.3	56
คำตอบแบบฝึกหัด 1.3	58
แคลคูลัสของเส้นโค้งเชิงขั้ว	59
แบบฝึกหัด 1.4	77
คำตอบแบบฝึกหัด 1.4	78
บทที่ 2	
เส้น ระนาบและพื้นผิวในสามมิติ	79
สมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง	79
แบบฝึกหัด 2.1	89
คำตอบแบบฝึกหัด 2.1	91
ระนาบในปริภูมิสามมิติ	92
แบบฝึกหัด 2.2	94
คำตอบแบบฝึกหัด 2.2	95
พื้นผิวในสามมิติ	96
แบบฝึกหัด 2.3	109
คำตอบแบบฝึกหัด 2.3	110

	หน้า
บทที่ 3	
แคลคูลัสของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์	111
ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของหนึ่งตัวแปร	111
แบบฝึกหัด 3.1	117
คำตอบแบบฝึกหัด 3.1	118
แคลคูลัสของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของหนึ่งตัวแปร	119
แบบฝึกหัด 3.2	139
คำตอบแบบฝึกหัด 3.2	141
การเปลี่ยนตัวแปรเสริมและความยาวส่วนโค้ง	143
แบบฝึกหัด 3.3	152
คำตอบแบบฝึกหัด 3.3	153
เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยและเวกเตอร์ปกติ	154
แบบฝึกหัด 3.4	164
คำตอบแบบฝึกหัด 3.4	165
ความโค้ง	166
แบบฝึกหัด 3.5	184
คำตอบแบบฝึกหัด 3.5	186
บทที่ 4	
ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย	187
ฟังก์ชันหลายตัวแปร	187
แบบฝึกหัด 4.1	216
คำตอบแบบฝึกหัด 4.1	218
อนุพันธ์ย่อยฟังก์ชันหลายตัวแปร	219
แบบฝึกหัด 4.2	281
คำตอบแบบฝึกหัด 4.2	287
ความหมายของอนุพันธ์ย่อยทางเรขาคณิต	291
แบบฝึกหัด 4.3	345
คำตอบแบบฝึกหัด 4.3	349

	หน้า
บทที่ 5 อินทิกรลหลายชั้น	351
อินทิกรลสองชั้นบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	351
แบบฝึกหัด 5.1	361
คำตอบแบบฝึกหัด 5.1	363
อินทิกรลสองชั้นบนบริเวณทั่วไป	364
แบบฝึกหัด 5.2	393
คำตอบแบบฝึกหัด 5.2	396
อินทิกรลสองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว	397
แบบฝึกหัด 5.3	417
คำตอบแบบฝึกหัด 5.3	420
การประยุกต์ของอินทิกรลสองชั้น	421
แบบฝึกหัด 5.4	460
คำตอบแบบฝึกหัด 5.4	463
อินทิกรลสามชั้นบนบริเวณรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก	465
แบบฝึกหัด 5.5	500
คำตอบแบบฝึกหัด 5.5	502
การเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรลสามชั้น	503
แบบฝึกหัด 5.6	543
คำตอบแบบฝึกหัด 5.6	545
การประยุกต์ของอินทิกรลสามชั้น	546
แบบฝึกหัด 5.7	558
คำตอบแบบฝึกหัด 5.7	561

	หน้า
ภาคผนวก	563
สูตรการหาอนุพันธ์	564
สูตรการอินทิเกรต	565
สรุปภาคตัดกรวย	566
ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	571
เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ	572
พีชคณิตพื้นฐาน	574
สมบัติของเลขชี้กำลังและลอการิทึม	574
บรรณานุกรม	575

บทที่ 1

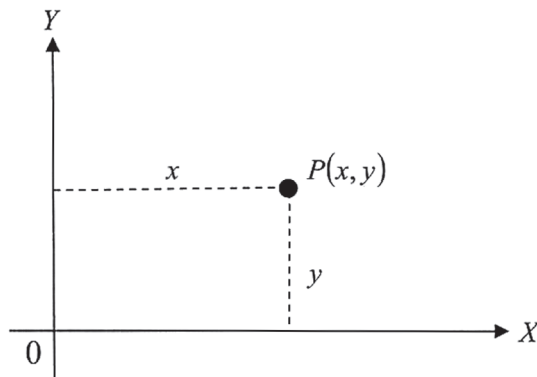
ระบบพิกัดเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม

เมื่อกำหนดตำแหน่งของจุดจุดหนึ่ง P ในระนาบ 2 มิติ และในปริภูมิ 3 มิติของระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate system) ที่ประกอบด้วยแกนพิกัดที่ตั้งฉากกัน 2 แกนใน 2 มิติ และ 3 แกนใน 3 มิติ ยังมีระบบพิกัดชนิดอื่น ๆ ที่จะบอกตำแหน่งของจุดที่ใช้ได้เหมาะสมกับปัญหาหลายปัญหา ระบบพิกัดดังกล่าวใน 2 มิติ ได้แก่ ระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate system)

1.1 ระบบพิกัดเชิงขั้ว

1.1.1 พิกัดเชิงขั้ว

ถ้า P เป็นจุดที่มีพิกัดฉากเป็น (x, y) ใน 2 มิติ เราจะทราบตำแหน่งของ P ได้ โดยที่ P จะอยู่ห่างจากแกน Y เป็นระยะทาง x หน่วย และจะอยู่ห่างจากแกน X เป็นระยะทาง y หน่วย เป็นการบอกตำแหน่งของจุดโดยการอาศัยการอ้างอิงจากแกนพิกัดฉากดังรูป 1.1.1

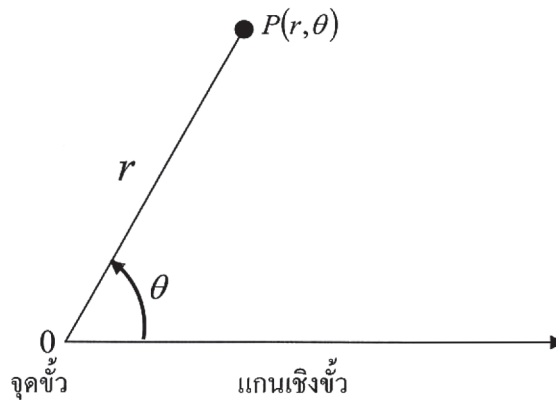


รูป 1.1.1

สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้วใน 2 มิติ เราสามารถสร้างระบบพิกัดเชิงขั้วได้ดังนี้

กำหนดจุดคงที่ O จุดหนึ่ง เรียกว่า จุดกำเนิด (origin) หรือ ขั้ว (pole) และใช้จุดขั้วนี้เป็นจุดปลายสร้างเส้นตามแนวอนันต์ขึ้นมาเส้นหนึ่ง เรียกว่า แกนเชิงขั้ว (polar axis)

ให้ P เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ เราอาจจะแทนจุด P ด้วยพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) เมื่อ r คือระยะจากจุด P ไปยังจุดขั้ว เรียกว่า ระยะชี้ออก (radial distance) และ θ เป็นมุมที่วัดจากแกนเชิงขั้วไปยังเส้น OP เรียกว่า มุมเชิงขั้ว (polar angle) ดังรูป 1.1.2

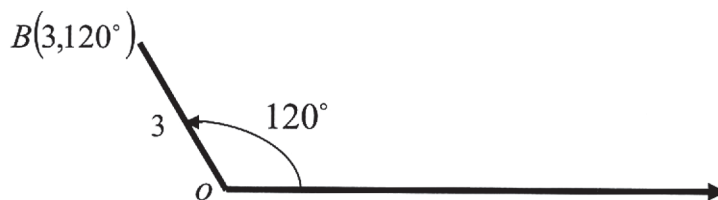
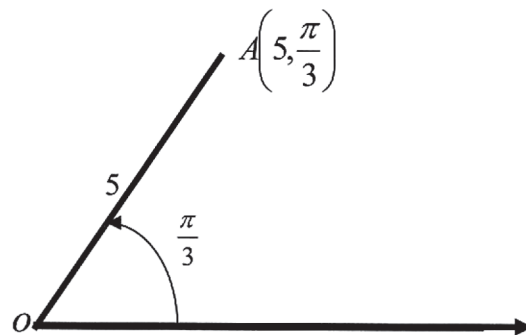


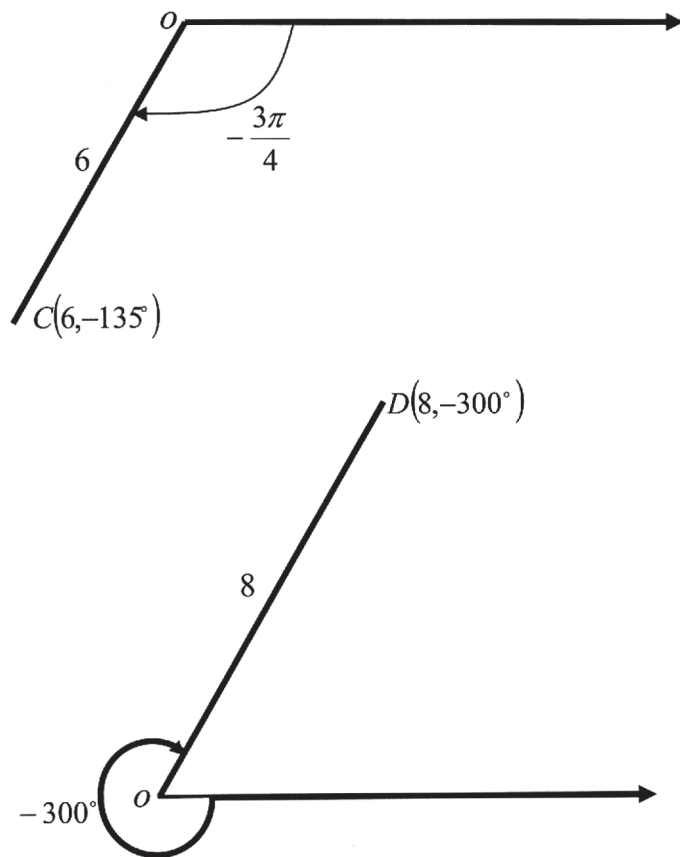
รูป 1.1.2

เราเรียกคู่อันดับ (r, θ) โดยวิธีดังกล่าวว่า พิกัดเชิงขั้วของ P การสร้างจุด (r, θ) ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เริ่มต้นด้วยการวัดมุม θ ก่อน โดยการวัดมุมจะวัดจากแกนเชิงขั้วใน 2 ทิศทาง คือ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและตามเข็มนาฬิกา โดยใช้เครื่องหมาย บวก และลบ กำกับหน้าของค่า θ เพื่อระบุทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและตามเข็มนาฬิกาตามลำดับ ซึ่งมุมเชิงขั้ว θ อาจจะวัดเป็นเรเดียนหรือองศาก็ได้ แล้วจึงกำหนดความยาวของ r

ตัวอย่าง 1.1.1 จงสร้างจุด $A\left(5, \frac{\pi}{3}\right), B(3, 120^\circ), C\left(6, -\frac{3\pi}{4}\right), D(8, -300^\circ)$

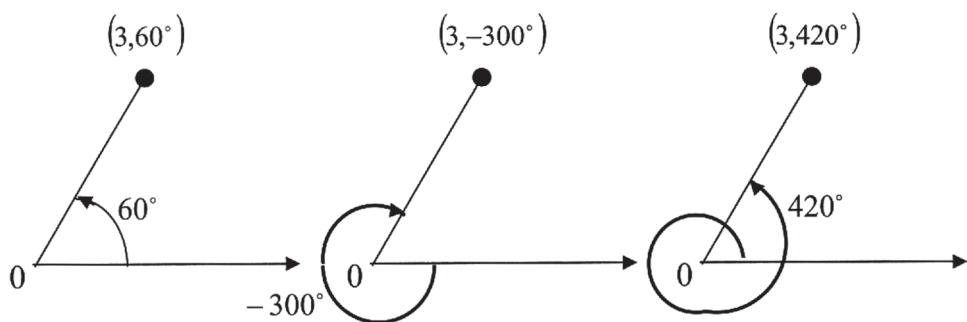
วิธีทำ





รูป 1.1.3

พิกัดเชิงขั้วของจุดใดจุดหนึ่งอาจมีได้หลายแบบ เช่น พิกัดเชิงขั้ว $(3, 60^\circ)$, $(3, -300^\circ)$ และ $(3, 420^\circ)$ แทนจุดเดียวกัน ดังรูป 1.1.4



พิกัดเชิงขั้ว 3 คู่อันดับ แทนจุดเดียวกัน

รูป 1.1.4

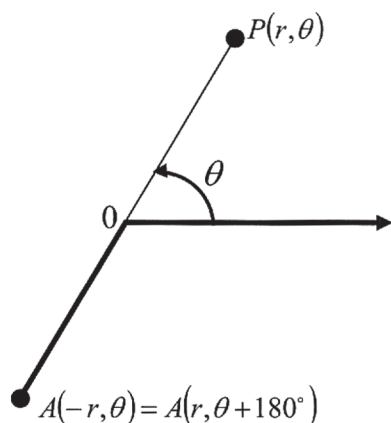
โดยทั่วไป ถ้าจุด P มีพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) แล้ว $(r, \theta + n \cdot 360^\circ)$ และ $(r, \theta - n \cdot 360^\circ)$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \dots$ เป็นพิกัดเชิงขั้วของจุด P เช่นเดียวกัน

กรณีที่ P เป็นจุดกำเนิด เส้น OP ในรูป 1.1.2 จะกลายเป็นจุด เพราะ $r = 0$ กรณีนี้จะกำหนดมุม θ ได้ไม่ชัดเจน จึงมีข้อตกลงว่าอาจจะใช้มุม θ เป็นเท่าไรก็ได้ ดังนั้นจะแทนจุดกำเนิดด้วย $(0, \theta)$ สำหรับ θ ทุกค่า

กรณีค่า r เป็นลบ

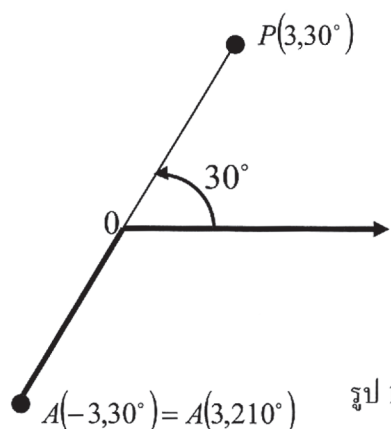
ในการเขียนกราฟเส้นโค้งที่กำหนดโดยสมการ $r = f(\theta)$ ในพิกัดเชิงขั้ว อาจจำเป็นต้องให้ r มีค่าเป็นลบได้ ดังนั้นจึงต้องนิยามเป็นกรณีพิเศษดังนี้

พิจารณาจุด P ถ้าย้ายระยะชี้จาก OP ในทิศตรงกันข้าม และวัดระยะจากจุดกำเนิดย้อนหลังไปตามส่วนขยายระยะชี้ออกเป็นระยะ r จะได้จุดที่มีพิกัด $A(r, \theta + 180^\circ)$ ซึ่งจุดนี้อาจแทนโดย $A(-r, \theta)$ โดยที่เครื่องหมายลบบอกให้ทราบว่า จุดนี้อยู่บนระยะชี้ที่ขยายออกไปทิศตรงกันข้าม ดังนั้นจึงนิยาม $A(-r, \theta)$ และ $A(r, \theta + 180^\circ)$ เป็นพิกัดของจุดเดียวกัน ดังรูป 1.1.5



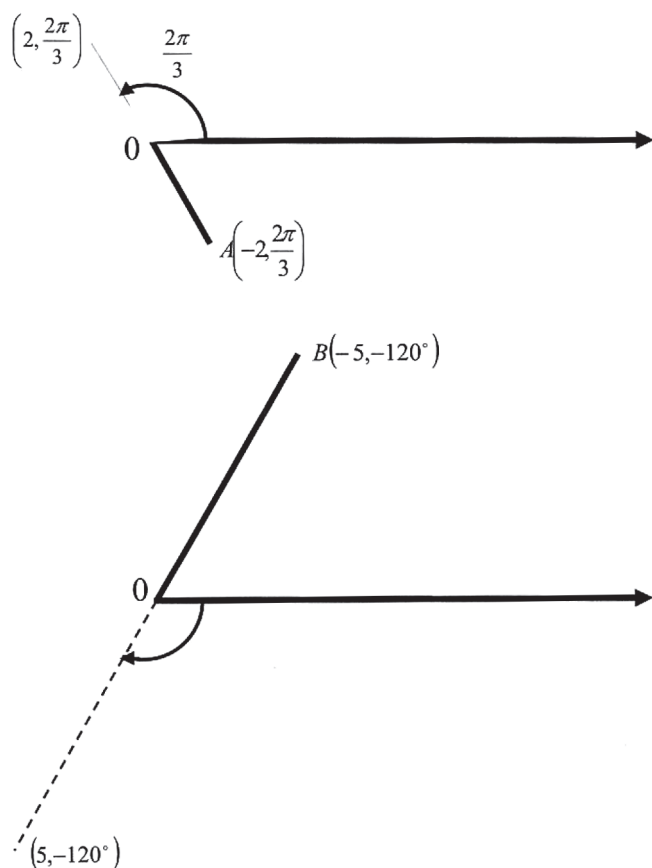
รูป 1.1.5

เช่น $r = 3$ และ $\theta = 30^\circ$ จะได้ว่า $(-3, 30^\circ)$ และ $(3, 30^\circ + 180^\circ) = (3, 210^\circ)$ เป็นพิกัดเชิงขั้วของจุดเดียวกัน ดังรูป 1.1.6



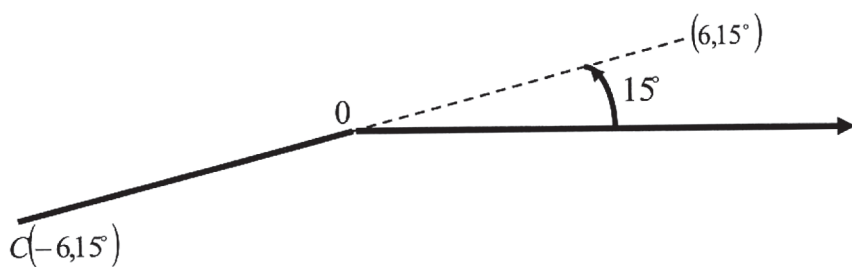
รูป 1.1.6

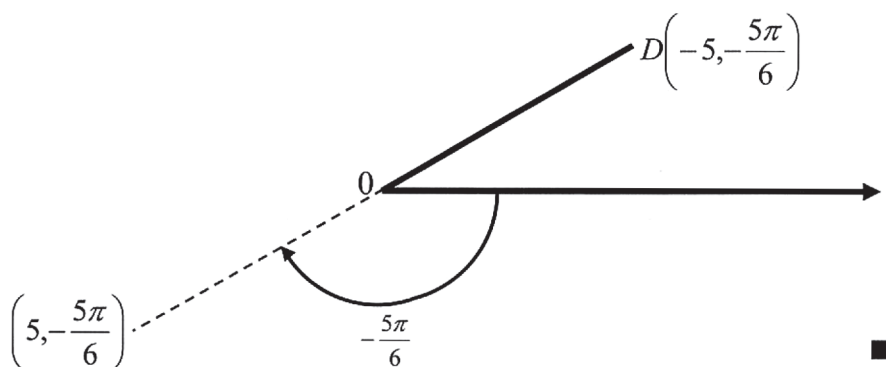
ตัวอย่าง 1.1.2 จงสร้างจุด $A\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right), B(-5, -120^\circ)$



รูป 1.1.7

ตัวอย่าง 1.1.3 จงสร้างจุด $C(-6, 15^\circ), D\left(-5, -\frac{5\pi}{6}\right)$





รูป 1.1.8

ตัวอย่าง 1.1.4 กำหนดจุด P มีพิกัดเชิงขั้วเป็น $\left(4, \frac{11\pi}{6}\right)$ จงหาพิกัดเชิงขั้วตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ของจุด P ต่อไปนี้

ก. $r > 0$ และ $-2\pi \leq \theta \leq 0$

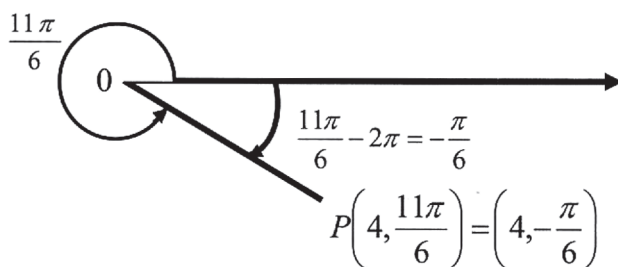
ข. $r < 0$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

ค. $r < 0$ และ $-2\pi \leq \theta \leq 0$

วิธีทำ เนื่องจากพิกัดเชิงขั้วจุด $P\left(4, \frac{11\pi}{6}\right)$ เป็นจุดอยู่ในควอดรันท์ (Quadrant) ที่ 4 โดยมี $r > 0$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

ก. เนื่องจาก $\frac{11\pi}{6} - 2\pi = -\frac{\pi}{6}$ แสดงว่า จุด P มีมุมเชิงขั้ว θ โดยที่ $-2\pi \leq \theta \leq 0$

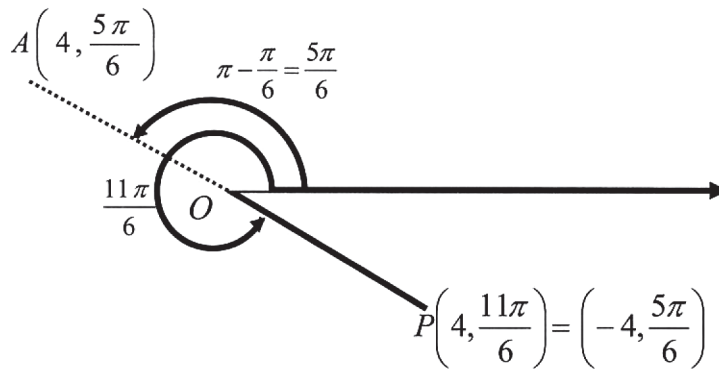
คือ $\theta = -\frac{\pi}{6}$ ดังรูป 1.1.9



รูป 1.1.9

ดังนั้นจุด $P\left(4, \frac{11\pi}{6}\right)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r > 0$ และ $-2\pi \leq \theta \leq 0$ คือ $\left(4, -\frac{\pi}{6}\right)$ ■

ข. ต้องการพิกัดเชิงขั้วที่มี $r < 0$ แสดงว่าต้องวัดมุมจากแกนเชิงขั้วไปยังด้านที่ต่อออกไปในทิศตรงกันข้ามกับด้าน OP ให้เป็นด้าน OA ดังรูป 1.1.10



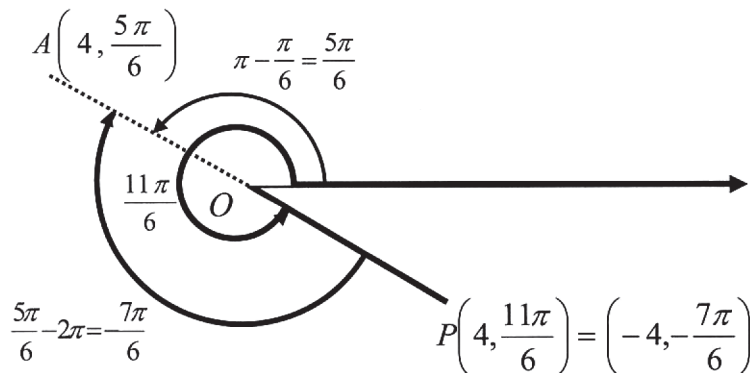
รูป 1.1.10

ดังนั้นมุมเชิงขั้ว θ ถึงด้าน OA มีค่าเท่ากับ $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ จะได้ $\theta = \frac{5\pi}{6}$ และ

จุด $P\left(4, \frac{11\pi}{6}\right)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r < 0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$ คือ $\left(-4, \frac{5\pi}{6}\right)$ ■

ค. จากการวัดมุมจากแกนเชิงขั้วไปยังด้านที่ต่อออกไปในทิศตรงกันข้ามกับด้าน OP ให้เป็นด้าน OA ในข้อ ข. ซึ่ง $0 \leq \theta < 2\pi$ มีค่า $\theta = \frac{5\pi}{6}$ นั้น ต้องการ $-2\pi \leq \theta \leq 0$ จะได้

$$\theta = \frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6} \text{ ดังรูป 1.1.11}$$

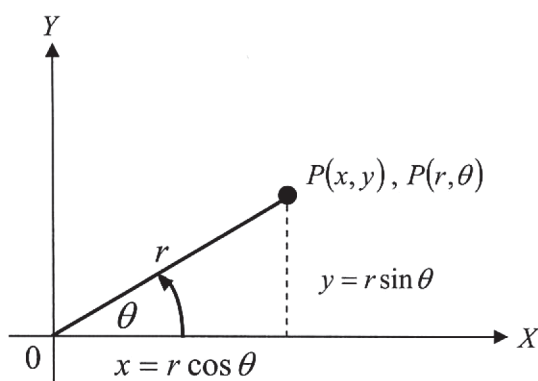


รูป 1.1.11

ดังนั้น จุด $P\left(4, \frac{11\pi}{6}\right)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r < 0$ และ $-2\pi \leq \theta \leq 0$ คือ $\left(-4, -\frac{7\pi}{6}\right)$ ■

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก

ในการแก้ปัญหาบางปัญหา อาจจะต้องใช้ทั้งพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉากในปัญหาเดียวกัน ดังนั้นจึงต้องใช้ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทั้งสอง โดยให้แกน X ด้านทางบวก แทนแกนเชิงขั้วของระบบพิกัดเชิงขั้ว ดังนั้นจุด P แต่ละจุดจะมีทั้งพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) และพิกัดฉาก (x, y) ดังรูป 1.1.12



รูป 1.1.12

จากรูป 1.1.10 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทั้งสองโดยสมการดังนี้

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad (1.1.1)$$

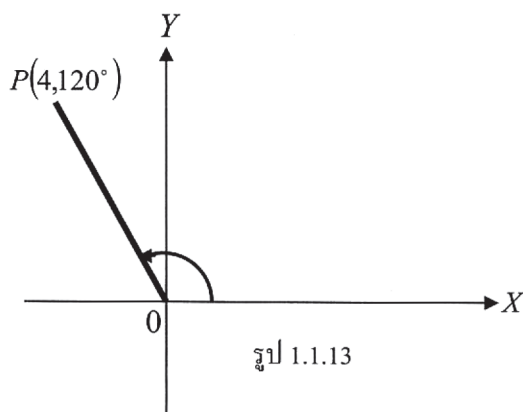
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (1.1.2)$$

ตัวอย่าง 1.1.5 จงหาพิกัดฉากของจุด P และ Q ที่มีพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

ก. $P(4, 120^\circ)$

ข. $Q\left(-4, \frac{4\pi}{3}\right)$

วิธีทำ ก. จากจุด $P(4, 120^\circ)$ จะได้ $r = 4$ และ $\theta = 120^\circ$ ซึ่งจะเห็นว่า จุด P เป็นจุดอยู่ในควอดรันท์ที่ 2 ดังรูป 1.1.13 โดยมีค่า x เป็นลบ และค่า y เป็นบวก



รูป 1.1.13

จากสมการ (1.1.1) จะได้

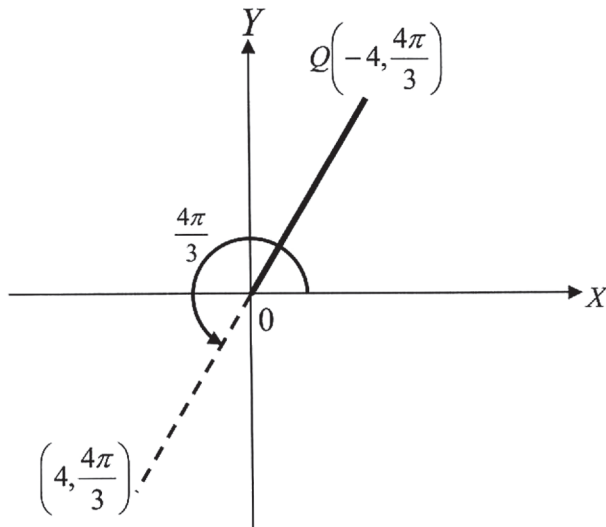
$$x = r \cos \theta = 4 \cos 120^\circ = 4 \left(-\frac{1}{2} \right) = -2$$

$$y = r \sin \theta = 4 \sin 120^\circ = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3}$$

ดังนั้นพิกัดเชิงขั้ว $(4, 120^\circ)$ มีพิกัดฉากคือ $(-2, 2\sqrt{3})$ ■

ข. จากจุด $Q\left(-4, \frac{4\pi}{3}\right)$ จะได้ $r = -4$ และ $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ซึ่งจะเห็นว่า จุด Q เป็นจุดอยู่ใน

ในควอดรันท์ที่ 1 ดังรูป 1.1.14 โดยมีค่า x เป็นบวก และค่า y เป็นบวก



รูป 1.1.14

จากสมการ (1.1.1) จะได้

$$x = r \cos \theta = -4 \cos \frac{4\pi}{3} = -4 \left(-\frac{1}{2} \right) = 2$$

$$y = r \sin \theta = -4 \sin \frac{4\pi}{3} = -4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3}$$

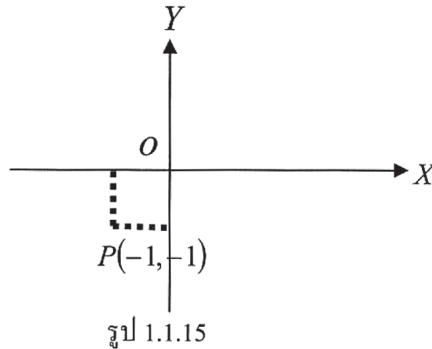
ดังนั้นพิกัดเชิงขั้ว $Q\left(-4, \frac{4\pi}{3}\right)$ มีพิกัดฉากคือ $(2, 2\sqrt{3})$ ■

ตัวอย่าง 1.1.6 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุด P ที่มีพิกัดฉากโดยมีเงื่อนไขต่อไปนี้

ก. $P(-1, -1)$ ที่มี $r > 0$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

ข. $P(-1, -1)$ ที่มี $r < 0$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

วิธีทำ ก. จากจุด $P(-1, -1)$ จะได้ $x = -1$ และ $y = -1$ ซึ่งจะเห็นว่า จุด P เป็นจุดอยู่ใน
ในควอดรันท์ที่ 3 ดังรูป 1.1.15



จากสมการ (1.1.2) จะได้

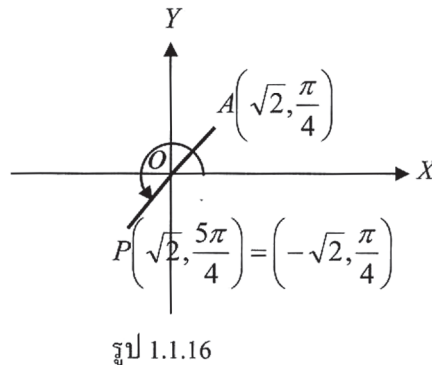
$$r^2 = x^2 + y^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 2, \quad r = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1, \quad \theta = \frac{5\pi}{4}$$

ดังนั้นจุด $P(-1, -1)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r > 0$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ คือ $\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$ ■

ข. จากข้อ ก. ที่ได้พิกัดเชิงขั้ว $P\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$ นั้น ต้องการพิกัดเชิงขั้วที่มี $r < 0$ แสดง

ว่าต้องวัดมุมจากแกนเชิงขั้วไปยังด้านที่ต่อออกไปในทิศตรงกันข้ามกับด้าน OP ให้เป็นด้าน OA
ดังรูป 1.1.16



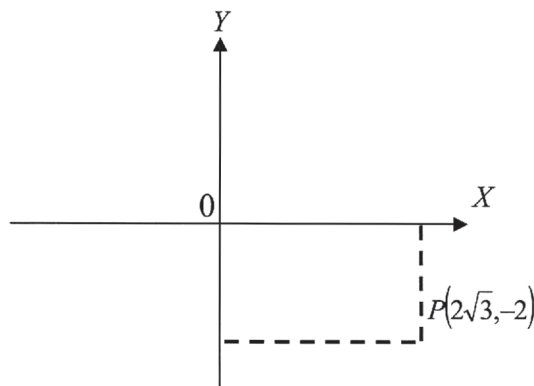
ดังนั้นมุมเชิงขั้ว θ ถึงด้าน OA มีค่าเท่ากับ $\frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$ จะได้ $\theta = \frac{\pi}{4}$ และ จุด $A\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

นั่นคือ จุด $P\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r < 0$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ คือ $\left(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ■

ตัวอย่าง 1.1.7 จงหาพิกัดเชิงขั้วตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ของจุดพิกัดฉากต่อไปนี้

- ก. $P(2\sqrt{3}, -2)$ จงหาพิกัดเชิงขั้วที่มี $r > 0$ และ $0 \leq \theta \leq 360^\circ$
- ข. $P(2\sqrt{3}, -2)$ จงหาพิกัดเชิงขั้วที่มี $r > 0$ และ $-360^\circ \leq \theta \leq 0$
- ค. $P(2\sqrt{3}, -2)$ จงหาพิกัดเชิงขั้วที่มี $r < 0$ และ $0 \leq \theta \leq 360^\circ$

วิธีทำ ก. จากจุด $P(2\sqrt{3}, -2)$ จะได้ $x = 2\sqrt{3}$ และ $y = -2$ ซึ่งจะเห็นว่า จุด P เป็นจุดอยู่ในควอดรนต์ที่ 4 ดังรูป 1.1.17



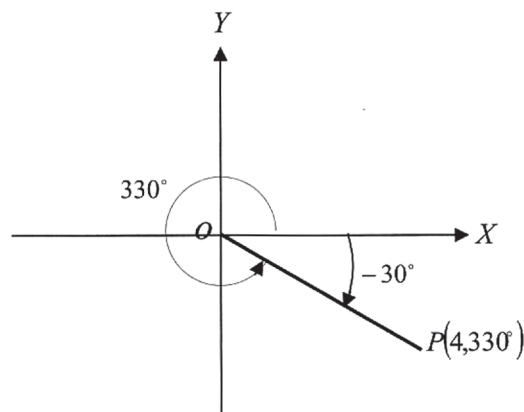
รูป 1.1.17

จากสมการ (1.1.2) จะได้ $r^2 = x^2 + y^2 = (2\sqrt{3})^2 + (-2)^2 = 16$, $r = 4$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \theta = 330^\circ$$

ดังนั้นจุด $P(4\sqrt{3}, -4)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r > 0$ และ $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ คือ $(4, 330^\circ)$ ■

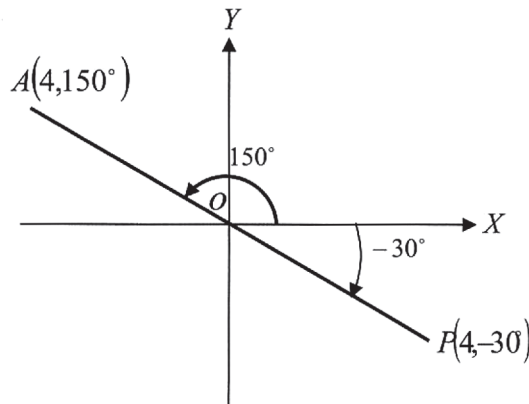
ข. จากข้อ ก. พิกัดเชิงขั้วจุด $P(4, 330^\circ)$ เป็นจุดอยู่ในควอดรนต์ที่ 4 โดยมี $r > 0$ และ $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ เนื่องจาก $330^\circ - 360^\circ = -30^\circ$ แสดงว่า จุด P มีมุมเชิงขั้ว θ โดยที่ $-360^\circ \leq \theta \leq 0$ คือ $\theta = -30^\circ$ ดังรูป 1.1.18



รูป 1.1.18

ดังนั้นจุด $P(2\sqrt{3}, -2)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r > 0$ และ $-360^\circ \leq \theta \leq 0$ คือ $(4, -30^\circ)$ ■

ค. ต้องการพิกัดเชิงขั้วที่มี $r < 0$ จากรูป 1.1.18 ต้องวัดมุมจากแกนเชิงขั้วไปยังด้านที่ต่อออกไปในทิศตรงกันข้ามกับด้าน OP ให้เป็นด้าน OA จะได้มุมเชิงขั้ว θ ถึงด้าน OA มีค่าเท่ากับ $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ จะได้ $\theta = 150^\circ$ ดังนั้นได้จุด $A(4, 150^\circ)$ ดังรูป 1.1.19



รูป 1.1.19

ดังนั้นจุด $P(2\sqrt{3}, -2)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r < 0$ และ $0 \leq \theta < 360^\circ$ คือ $(-4, 150^\circ)$ ■

เราสามารถแปลงสมการในพิกัดเชิงขั้วให้เป็นสมการในพิกัดฉาก หรือแปลงจากสมการในพิกัดฉากให้เป็นสมการในพิกัดเชิงขั้ว โดยใช้ความสัมพันธ์จากสมการ (1.1.1) และ (1.1.2)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1.1.1)$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (1.1.2)$$

ตัวอย่าง 1.1.8 จงหาสมการพิกัดฉากพร้อมบอกลักษณะกราฟของเส้นโค้งพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

- ก. $r = 3$
- ข. $r = 2 \operatorname{cosec} \theta$
- ค. $r = 4 \sin \theta$
- ง. $r = \frac{4}{2 - 3 \cos \theta}$

วิธีทำ ก. กำหนด $r = 3$

ยกกำลังทั้งสองข้างได้ $r^2 = 3^2 = 9$

จาก $r^2 = x^2 + y^2$ ได้ $x^2 + y^2 = 9$ เป็นสมการพิกัดฉากของ $r = 3$

ซึ่ง $x^2 + y^2 = 9$ มีลักษณะเป็นกราฟรูปวงกลม

ดังนั้น $r = 3$ มีกราฟเป็นรูปวงกลม ■

ข. กำหนด $r = 2 \operatorname{cosec} \theta$

ปรับได้เป็น $r = \frac{2}{\sin \theta}$

$$r \sin \theta = 2$$

จาก $y = r \sin \theta$ จะได้ $y = 2$ เป็นสมการพิกัดฉากของ $r = 2 \operatorname{cosec} \theta$

ซึ่ง $y = 2$ มีลักษณะเป็นกราฟเส้นตรง

ดังนั้น $r = 2 \operatorname{cosec} \theta$ มีกราฟเป็นเส้นตรง ■

ค. กำหนด $r = 4 \sin \theta$

นำ r คูณทั้งสองข้าง $r^2 = 4r \sin \theta$

จาก $r^2 = x^2 + y^2$ และ $y = r \sin \theta$ ได้

$$x^2 + y^2 = 4y$$

$$x^2 + y^2 - 4y = 0 \text{ เป็นสมการพิกัดฉากของ } r = 4 \sin \theta$$

ซึ่ง $x^2 + y^2 - 4y = 0$ มีลักษณะเป็นกราฟรูปวงกลม

ดังนั้น $r = 4 \sin \theta$ มีกราฟเป็นรูปวงกลม ■

ง. กำหนด $r = \frac{4}{2 - 3 \cos \theta}$

นำ $2 - 3 \cos \theta$ คูณทั้งสองข้างได้ $r(2 - 3 \cos \theta) = 4$

$$2r - 3r \cos \theta = 4$$

$$2r = 4 + 3r \cos \theta$$

จาก $r^2 = x^2 + y^2$ และ $x = r \cos \theta$ ได้

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = 4 + 3x$$

ยกกำลังทั้งสองข้างได้ $(2\sqrt{x^2 + y^2})^2 = (4 + 3x)^2$

$$4(x^2 + y^2) = 16 + 24x + 9x^2$$

$$4x^2 + 4y^2 = 16 + 24x + 9x^2$$

$$4y^2 - 5x^2 - 24x - 16 = 0$$

เป็นสมการพิกัดฉากของ $r = \frac{4}{2 - 3 \cos \theta}$

ซึ่ง $4y^2 - 5x^2 - 24x - 16 = 0$ มีลักษณะเป็นกราฟรูปไฮเพอร์โบลา

ดังนั้น $r = \frac{4}{2 - 3 \cos \theta}$ มีกราฟเป็นรูปไฮเพอร์โบลา ■

ตัวอย่าง 1.1.9 จงเขียนสมการที่กำหนดให้ในพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

ก. $y = 5$

ข. $x^2 + y^2 - 4x = 0$

ค. $x^2 + (y-1)^2 = 1$

วิธีทำ ก. กำหนด $y = 5$

จาก $y = r \sin \theta$ ได้ $r \sin \theta = 5$

ดังนั้นสมการพิกัดเชิงขั้วของ $y = 5$ คือ $r \sin \theta = 5$ ■

ข. กำหนด $x^2 + y^2 - 4x = 0$

จาก $r^2 = x^2 + y^2$ และ $x = r \cos \theta$ ได้

$$r^2 - 4r \cos \theta = 0$$

$$r(r - 4 \cos \theta) = 0$$

จะได้ $r = 0$ หรือ $r = 4 \cos \theta$

ดังนั้นสมการพิกัดเชิงขั้วของ $x^2 + y^2 - 4x = 0$ คือ $r = 4 \cos \theta$ ■

ค. กำหนด $x^2 + (y-1)^2 = 1$

จะได้ $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

จาก $r^2 = x^2 + y^2$ และ $y = r \sin \theta$ ได้

$$r^2 - 2r \sin \theta = 0$$

$$r(r - 2 \sin \theta) = 0$$

จะได้ $r = 0$ หรือ $r = 2 \sin \theta$

ดังนั้นสมการพิกัดเชิงขั้วของ $x^2 + (y-1)^2 = 1$ คือ $r = 2 \sin \theta$ ■

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงสร้างจุดต่อไปนี้ในพิกัดเชิงขั้ว

ก. $(2, 315^\circ)$

ข. $(4, -60^\circ)$

ค. $(3, 210^\circ)$

ง. $(5, -270^\circ)$

2. จงสร้างจุดต่อไปนี้ในพิกัดเชิงขั้ว

ก. $\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$

ข. $\left(4, -\frac{3\pi}{4}\right)$

ค. $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$

ง. $\left(3, -\frac{3\pi}{2}\right)$

3. จงสร้างจุดต่อไปนี้ในพิกัดเชิงขั้ว

ก. $\left(-2, \frac{\pi}{3}\right)$

ข. $\left(-3, -\frac{3\pi}{2}\right)$

ค. $\left(-4, \frac{5\pi}{4}\right)$

ง. $\left(-4, -\frac{7\pi}{6}\right)$

4. จงหาพิกัดฉากของจุดที่มีพิกัดเชิงขั้วที่กำหนดให้ดังนี้

ก. $(4, 330^\circ)$

ข. $\left(7, \frac{2\pi}{3}\right)$

ค. $\left(6, \frac{9\pi}{4}\right)$

ง. $\left(8, \frac{7\pi}{6}\right)$

จ. $(-4, 480^\circ)$

ฉ. $\left(-6, -\frac{7\pi}{6}\right)$

5. กำหนดจุดในพิกัดฉาก จงเขียนจุดในพิกัดเชิงขั้วที่มีเงื่อนไขต่อไปนี้

5.1 $r \geq 0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$

5.2 $r \leq 0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$

ก. $(-5, 0)$

ข. $(2\sqrt{3}, -2)$

ค. $(0, -2)$

ง. $(-8, -8)$

จ. $(-3, 3\sqrt{3})$

ฉ. $(1, -1)$

6. กำหนดจุด $(-1,1)$ ในพิกัดฉาก จงเขียนพิกัดเชิงขั้วของจุดนี้ที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

ก. $r \geq 0$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

ข. $r \leq 0$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

ค. $r \geq 0$ และ $-2\pi \leq \theta \leq 0$

ง. $r \leq 0$ และ $-\pi \leq \theta \leq 0$

7. จงหาสมการพิกัดฉากพร้อมบอกลักษณะกราฟของเส้นโค้งพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

ก. $r = 5$

ข. $r = 5 \sec \theta$

ค. $r \sin \theta = 4$

ง. $r = 3 \cos \theta$

จ. $r^2 \sin 2\theta = 8$

ฉ. $r = \frac{2}{1 + \sin \theta}$

ช. $r = \frac{4}{3 - 2 \cos \theta}$

ซ. $r = \frac{6}{3 \cos \theta + 2 \sin \theta}$

8. จงเขียนสมการที่กำหนดให้ในพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

ก. $x = 7$

ข. $x^2 + y^2 = 7$

ค. $x^2 + y^2 - 6y = 0$

ง. $x^2 = 9y$

จ. $x^2 - y^2 = 4$

ฉ. $4xy = 9$

ช. $x^2 + (y-2)^2 = 4$

ซ. $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$

9. จงเขียนกราฟของ $r^2 - 3r + 2 = 0$ ในพิกัดเชิงขั้ว

คำตอบแบบฝึกหัด 1.1

4. ก. $(2\sqrt{3}, -2)$ ข. $\left(-\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$
 ค. $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ ง. $(-4\sqrt{3}, -4)$
 จ. $(2, -2\sqrt{3})$ ฉ. $(3\sqrt{3}, -3)$
5. ก. 5.1 $(5, \pi)$ 5.2 $(-5, 0)$ ข. 5.1 $\left(4, \frac{11\pi}{6}\right)$ 5.2 $\left(-4, \frac{5\pi}{6}\right)$
 ค. 5.1 $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$ 5.2 $\left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$ ง. 5.1 $\left(8\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$ 5.2 $\left(-8\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$
 จ. 5.1 $\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$ 5.2 $\left(-6, \frac{5\pi}{3}\right)$ ฉ. 5.1 $\left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$ 5.2 $\left(-\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$
6. ก. $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ ข. $\left(-\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$
 ค. $\left(\sqrt{2}, -\frac{5\pi}{4}\right)$ ง. $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$
7. ก. $x^2 + y^2 = 25$: วงกลม ข. $x = 5$: เส้นตรง
 ค. $y = 4$: เส้นตรง ง. $x^2 + y^2 - 3x = 0$: วงกลม
 จ. $xy = 4$: ไฮเพอร์โบลามุมฉาก ฉ. $x^2 + 4y - 4 = 0$: พาราโบลา
 ช. $5x^2 + 9y^2 - 16x - 16 = 0$: วงรี ซ. $3x + 2y = 6$: เส้นตรง
8. ก. $r \cos \theta = 7$ ข. $r = \sqrt{7}$
 ค. $r = 6 \sin \theta$ ง. $r = 9 \tan \theta \sec \theta$
 จ. $r^2 \cos 2\theta = 4$ ฉ. $r^2 \sin 2\theta = \frac{9}{2}$
 ช. $r = 4 \sin \theta$ ซ. $r^2 = \sin 2\theta$
9. กราฟรูปวงกลมร่วมจุดศูนย์กลาง $(0, 0)$ เดียวกัน และมีรัศมีเท่ากับ 1 และ 2

1.2 กราฟในพิกัดเชิงขั้ว

ในหัวข้อนี้จะศึกษากราฟของเส้นโค้งบางชนิดในพิกัดเชิงขั้ว เนื่องจากในการแก้ปัญหาเรามักใช้ทั้งพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้วควบคู่กันไป จึงกำหนดให้ให้แกน X ทับแกนเชิงขั้ว ซึ่งมีวิธีการเขียนกราฟโดยการเปลี่ยนสมการในพิกัดเชิงขั้วให้เป็นสมการในพิกัดฉากก่อนแล้วใช้ความรู้พื้นฐานภาคตัดกรวยมาช่วยในการเขียนกราฟ แต่ยังมีสมการในพิกัดเชิงขั้วที่ถึงแม้จะเปลี่ยนให้เป็นสมการในพิกัดฉากแล้วแต่รูปแบบที่ได้ไม่ตรงกับสมการของภาคตัดกรวยใด ๆ เลย กรณีเช่นนี้จะต้องใช้พิกัดเชิงขั้วในการเขียนกราฟโดยตรง

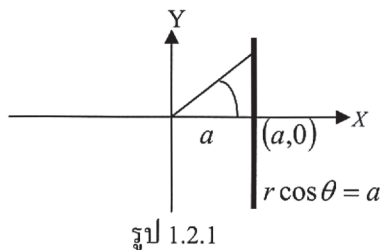
1.2.1 เส้นในพิกัดเชิงขั้ว

1. เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X ขนานกับแกน Y และผ่านจุด $(a,0)$ ที่ตั้งฉากกับแกน X ขนานกับแกน Y และผ่านจุด $(a,0)$ ในพิกัดฉากมีสมการ คือ $x = a$ ดังนั้นจากสมการ (1.1.1)

$x = r \cos \theta$ แทนค่าแล้วจะได้

$$r \cos \theta = a \quad (1.2.1)$$

เป็นสมการในพิกัดเชิงขั้วของเส้นตรง $x = a$ ดังรูป 1.2.1

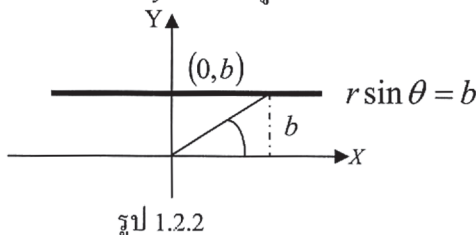


จะเห็นว่าทุกจุด $P(r, \theta)$ แต่ละจุดบนเส้นตรงนี้ จะมี $r \cos \theta = a$ เสมอ

2. เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน Y ขนานกับแกน X และผ่านจุด $(0,b)$ ในพิกัดฉาก มีสมการ คือ $y = b$ ดังนั้นจากสมการ (1.1.1) $y = r \sin \theta$ แทนค่า จะได้

$$r \sin \theta = b \quad (1.2.2)$$

เป็นสมการในพิกัดเชิงขั้วของเส้นตรง $y = b$ ดังรูป 1.2.2

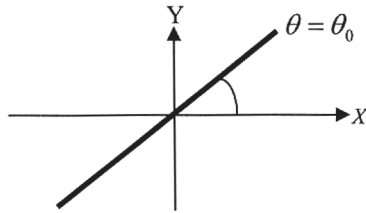


จะเห็นว่าทุกจุด $P(r, \theta)$ แต่ละจุดบนเส้นตรงนี้ จะมี $r \sin \theta = b$ เสมอ

3. เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดมีสมการอยู่ในรูป

$$\theta = \theta_0 \quad (1.2.3)$$

สำหรับค่าคงที่ θ ใดๆ จุด $P(r, \theta)$ ทุกจุดสอดคล้องสมการ (1.2.3) โดยไม่เกี่ยวกับค่า r ดังนั้นสมการที่แทนเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดหรือจุดชี้ทำมุมเรเดียนกับแกนเชิงขั้ว ดังรูป 1.2.3

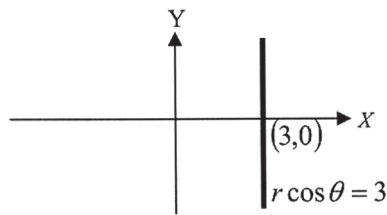


รูป 1.2.3

ตัวอย่าง 1.2.1 จงเขียนกราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

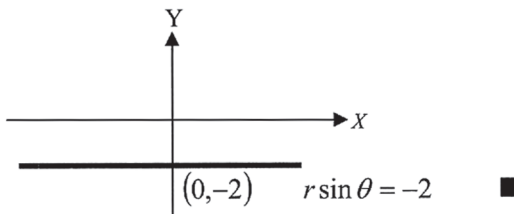
ก. $r \cos \theta = 3$ ข. $r \sin \theta = -2$ ค. $\theta = \frac{5\pi}{6}$

วิธีทำ ก. เนื่องจาก $x = r \cos \theta$ ดังนั้นสมการ $r \cos \theta = 3$ ตรงกับสมการในพิกัดฉาก $x = 3$ คือ สมการที่เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X ขนานกับแกน Y และผ่านจุด $(3, 0)$ ดังรูป 1.2.4



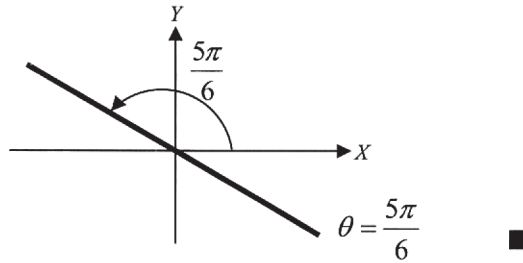
รูป 1.2.4

ข. เนื่องจาก $y = r \sin \theta$ ดังนั้นสมการ $r \sin \theta = -2$ ตรงกับสมการในพิกัดฉาก $y = -2$ คือ สมการที่เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน Y ขนานกับแกน X และผ่านจุด $(0, -2)$ ดังรูป 1.2.5



รูป 1.2.5

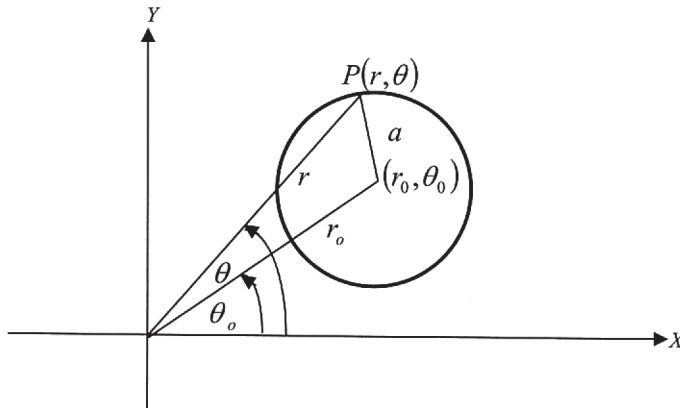
ก. จุดบนกราฟ $\theta = \frac{5\pi}{6}$ จะมีพิกัดที่มี $\theta = \frac{5\pi}{6}$ เสมอโดยมีค่า r เป็นจำนวนจริงใด ๆ
 กราฟของสมการจึงเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดทำมุม $\frac{5\pi}{6}$ กับแกน X เมื่อวัดทวนเข็มนาฬิกา ดัง
 รูป 1.2.6



รูป 1.2.6

1.2.2 วงกลมในพิกัดเชิงขั้ว

วงกลมในพิกัดเชิงขั้วที่มี (r_0, θ_0) เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมียาว a หน่วย ดังรูป 1.2.7



รูป 1.2.7

ถ้า $P(r, \theta)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลม และจากกฎของโคไซน์
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ จะได้สมการรูปทั่วไปในพิกัดเชิงขั้วดังนี้

$$r^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = a^2 \quad (1.2.4)$$

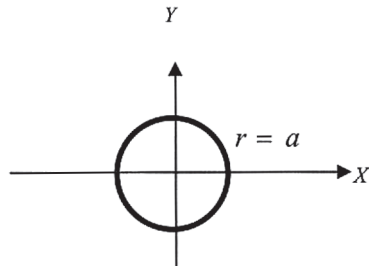
สมการในรูปนี้ไม่นิยมใช้ เนื่องจากใช้สมการวงกลมในพิกัดฉากสะดวกกว่า แต่มีกรณีพิเศษบางกรณีที่มักเกิดขึ้นบ่อย ๆ คือ

1. วงกลมรัศมียาว a จุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด

ถ้าให้ $r_0 = 0$ แทนในสมการ (1.2.4) จะได้ $r^2 = a^2$ และเนื่องจาก $a \geq 0$ จะเขียนสมการวงกลมได้ดังนี้

$$r = a \quad (1.2.5)$$

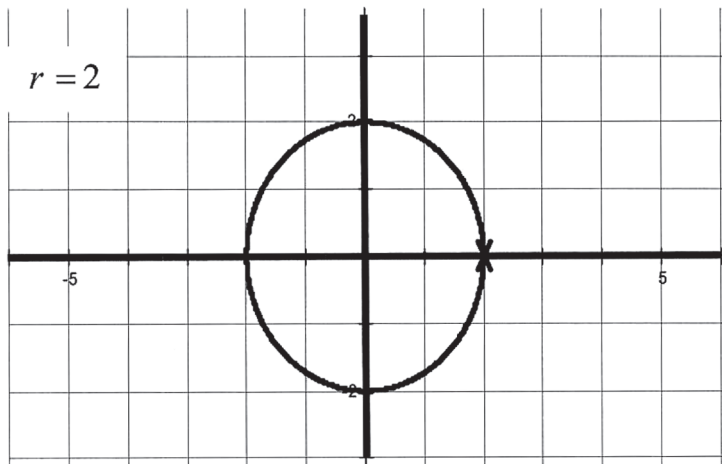
สมการนี้เป็นจริง เนื่องจากว่าวงกลมที่มีรัศมี a และมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด ประกอบด้วยจุด $P(r, \theta)$ ทุกจุดที่มี $r = a$ สำหรับทุกค่าของ θ ดังรูป 1.2.8



รูป 1.2.8

ตัวอย่าง 1.2.2 จงเขียนกราฟของสมการเชิงขั้ว $r = 2$

วิธีทำ กราฟของสมการ $r = 2$ เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$ รัศมียาว 2 หน่วย ตามลำดับดังรูป 1.2.9



รูป 1.2.9



2. วงกลมรัศมียาว a หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่บนแกน X และผ่านจุดกำเนิด

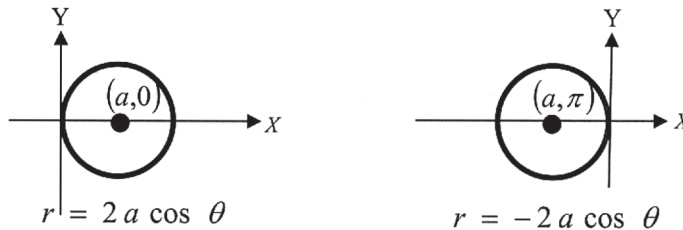
รูป 1.2.10 วงกลมผ่านจุดกำเนิด $(0,0)$ รัศมียาว a หน่วย มีพิกัดเชิงขั้วของจุดศูนย์กลางคือ $(a,0)$ หรือ (a,π) ขึ้นอยู่กับว่าจุดศูนย์กลางอยู่ด้านขวาหรือด้านซ้ายของจุดกำเนิด ดังรูป 1.2.10

สำหรับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางด้านขวาของจุดกำเนิดมี $r_0 = a$ และ $\theta_0 = 0$ แล้วสมการ (1.2.4) จะเป็น $r^2 - 2racos(\theta - 0) + a^2 = a^2$ และ $r^2 - 2racos\theta = 0$ นั่นคือ

$$r = 2a \cos \theta \quad (1.2.6)$$

สำหรับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ด้านซ้ายของจุดกำเนิดมี $r_0 = a$ และ $\theta_0 = \pi$ แล้วสมการ (1.2.4) จะเป็น $r^2 - 2racos(\theta - \pi) + a^2 = a^2$ และ $r^2 + 2racos\theta = 0$ นั่นคือ

$$r = -2a \cos \theta \quad (1.2.7)$$



รูป 1.2.10

3. วงกลมมีรัศมียาว a หน่วย จุดศูนย์กลางบนแกน Y ผ่านจุดกำเนิด

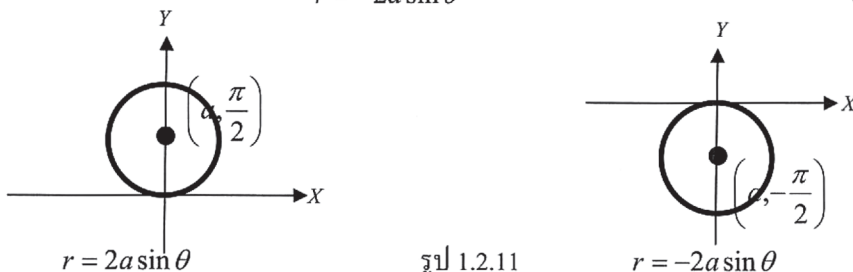
กรณีนี้พิกัดเชิงขั้วของจุดศูนย์กลาง คือ $(a, \frac{\pi}{2})$ หรือ $(a, -\frac{\pi}{2})$ ขึ้นอยู่กับว่าจุดศูนย์กลางอยู่ด้านบนหรือด้านล่าง ดังรูป 1.2.11 แล้วจะได้สมการวงกลมเป็น

สำหรับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางด้านบนของจุดกำเนิดมี $r_0 = a$ และ $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ แล้วสมการ (1.2.4) จะเป็น $r^2 - 2racos(\theta - \frac{\pi}{2}) + a^2 = a^2$ และ $r^2 - 2rasin\theta = 0$ นั่นคือ

$$r = 2a \sin \theta \quad (1.2.8)$$

สำหรับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ด้านล่างของจุดกำเนิดมี $r_0 = a$ และ $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ สมการ (1.2.4) จะเป็น $r^2 - 2racos(\theta + \frac{\pi}{2}) + a^2 = a^2$ และ $r^2 + 2rasin\theta = 0$ นั่นคือ

$$r = -2a \sin \theta \quad (1.2.9)$$



รูป 1.2.11

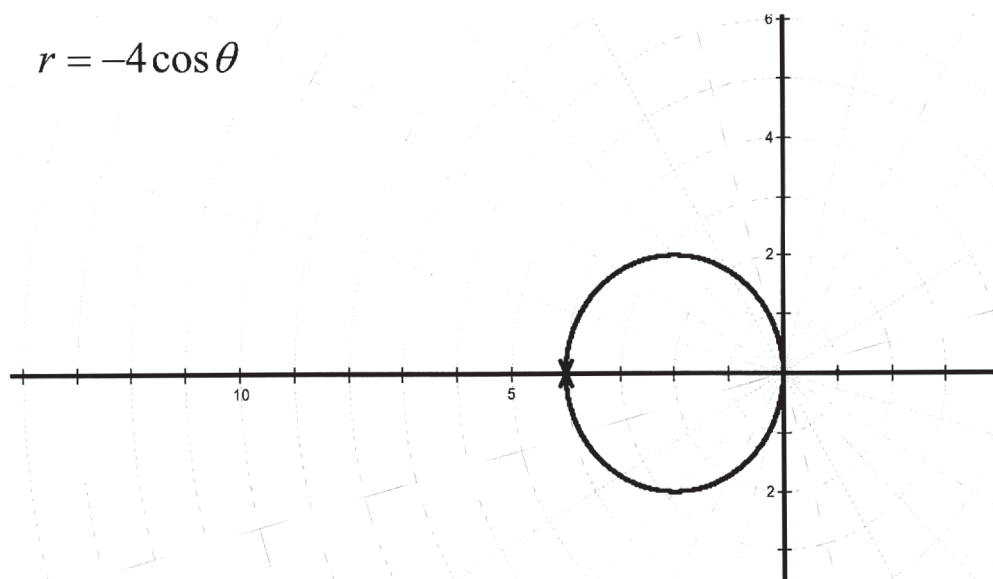
ตัวอย่าง 1.2.3 จงเขียนกราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

ก. $r = -4\cos\theta$

ข. $r = 6\sin\theta$

วิธีทำ ก. $r = -4\cos\theta$

θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$r = -4\cos\theta$	-4	-2	0	2	4	2	0	-2	-4

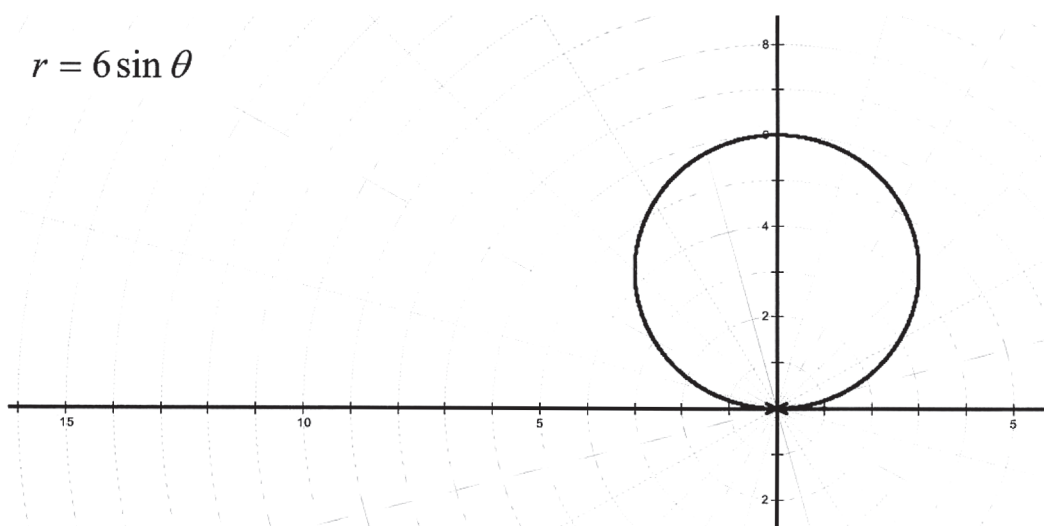


รูป 1.2.12



ข. $r = 6 \sin \theta$

θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$r = 6 \sin \theta$	0	3	6	3	0	-3	-6	-3	0



รูป 1.2.13

หมายเหตุ จุดที่มีพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) และ $(r, -\theta)$ เป็นจุดสมมาตรกันรอบแกน x ดังนั้น ถ้าสมการเชิงขั้วไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อแทน θ ด้วย $-\theta$ แล้วกราฟของสมการ ดังกล่าวจะมีสมมาตรรอบแกน X ถ้าทราบว่ากราฟมีสมมาตร จะช่วยให้เขียนกราฟได้เร็วขึ้น การทดสอบสมมาตรกล่าวไว้ในทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 1.2.1 การทดสอบสมมาตร (Symmetry Tests)

1. เส้นโค้งในพิกัดเชิงขั้วจะสมมาตรรอบแกน X ถ้าจุด (r, θ) อยู่บนกราฟ และจุด $(r, -\theta)$ หรือ จุด $(-r, \pi - \theta)$ อยู่บนกราฟด้วย
2. เส้นโค้งในพิกัดเชิงขั้วจะสมมาตรรอบแกน Y ถ้าจุด (r, θ) อยู่บนกราฟ และจุด $(r, \pi - \theta)$ หรือ จุด $(-r, -\theta)$ อยู่บนกราฟด้วย
3. เส้นโค้งพิกัดเชิงขั้วจะสมมาตรรอบสมมาตรรอบจุดกำเนิด ถ้าจุด (r, θ) อยู่บนกราฟ และจุด $(-r, \theta)$ หรือจุด $(r, \pi + \theta)$ อยู่บนกราฟด้วย

จากทฤษฎี 1.2.1 จะเห็นว่าเราอาจตรวจสอบการสมมาตรโดยวิธีการแทนค่า ดังนี้

1. เส้นโค้งในพิกัดเชิงขั้วจะสมมาตรรอบแกน X ถ้าแทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการของเส้นโค้ง แล้วสมการไม่เปลี่ยนแปลง
2. เส้นโค้งในพิกัดเชิงขั้วจะมีสมมาตรรอบแกน Y ถ้าแทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการของเส้นโค้ง แล้วสมการไม่เปลี่ยนแปลง
3. เส้นโค้งในพิกัดเชิงขั้วจะมีสมมาตรรอบจุดกำเนิด ถ้าแทน r ด้วย $-r$ ในสมการของเส้นโค้งแล้วสมการไม่เปลี่ยนแปลง

1.2.3 คาร์ดิอยด์และลิมาของ (Cardioids and Limacons)

สมการที่อยู่ในรูป

$$r = a + b \sin \theta \quad (1.2.10)$$

$$r = a - b \sin \theta \quad (1.2.11)$$

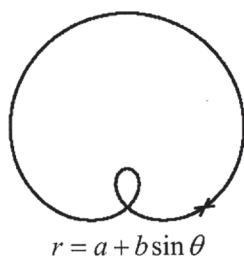
$$r = a + b \cos \theta \quad (1.2.12)$$

$$r = a - b \cos \theta \quad (1.2.13)$$

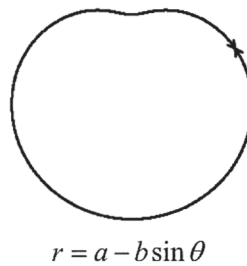
ทำให้เกิดเส้นโค้งที่เรียกว่า ลิมาของ (Limacons มาจากคำว่า “Limax” ในภาษาละติน ซึ่งเป็นสัตว์ที่มีรูปร่างคล้ายหอยทาก) ลักษณะกราฟมี 4 แบบตามอัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ เมื่อ $a > 0$ และ $b > 0$

ตำแหน่งของลิมาของจะอยู่ลักษณะใดขึ้นอยู่กับว่ามี $\sin \theta$ หรือ $\cos \theta$ ปรากฏอยู่ในสมการและเครื่องหมายในสมการเป็นบวกหรือลบ ดังรูป 1.2.14 และรูป 1.2.15

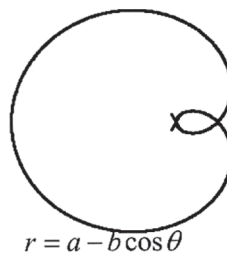
กรณี $a = b$ จะเกิดกราฟคล้ายรูปหัวใจ จึงเรียกลิมาของชนิดนี้ว่า คาร์ดิอยด์ (cardioids มาจากคำว่า “kardia” ในภาษากรีก แปลว่า หัวใจ)



รูป 1.2.14



รูป 1.2.15

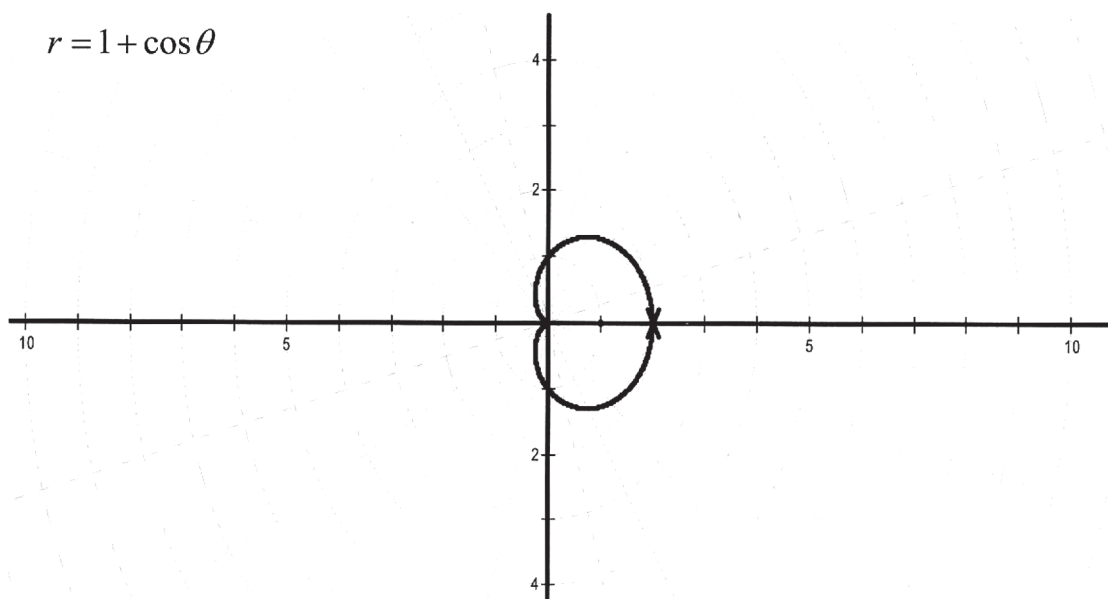


ตัวอย่าง 1.2.4 จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

ก. $r = 1 + \cos \theta$

วิธีทำ

θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos \theta$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$r = 1 + \cos \theta$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

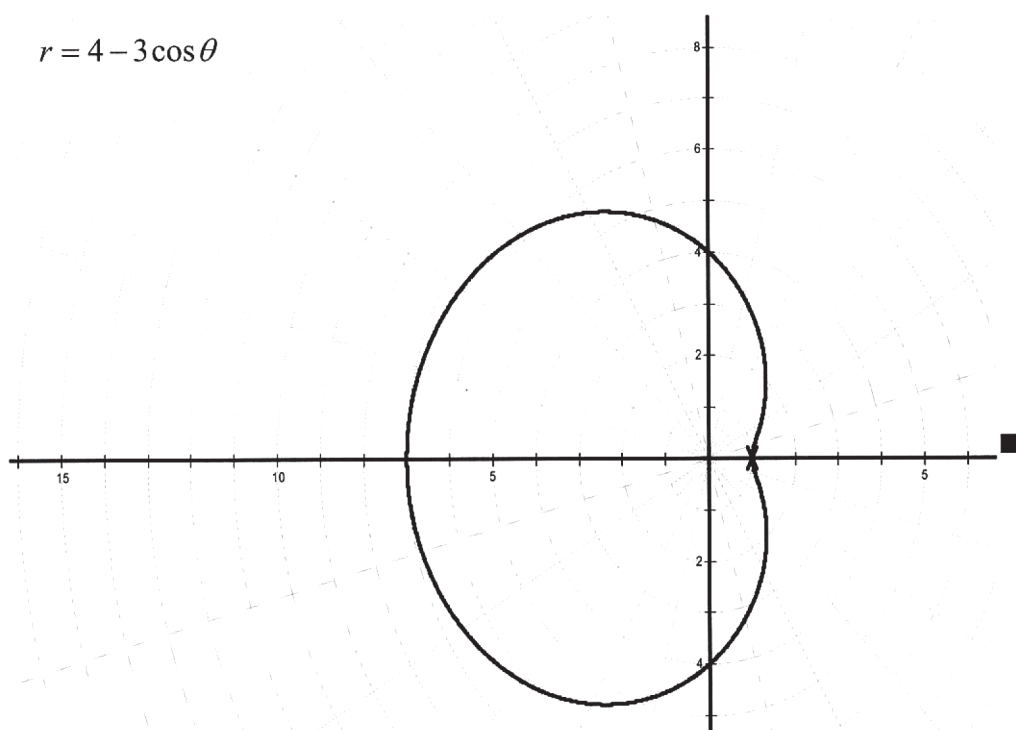


รูป 1.2.16

ข. $r = 4 - 3\cos\theta$

วิธีทำ

θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$3\cos\theta$	3	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	3
$r = 4 - 3\cos\theta$	1	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{11}{2}$	7	$\frac{11}{2}$	4	$\frac{5}{2}$	1



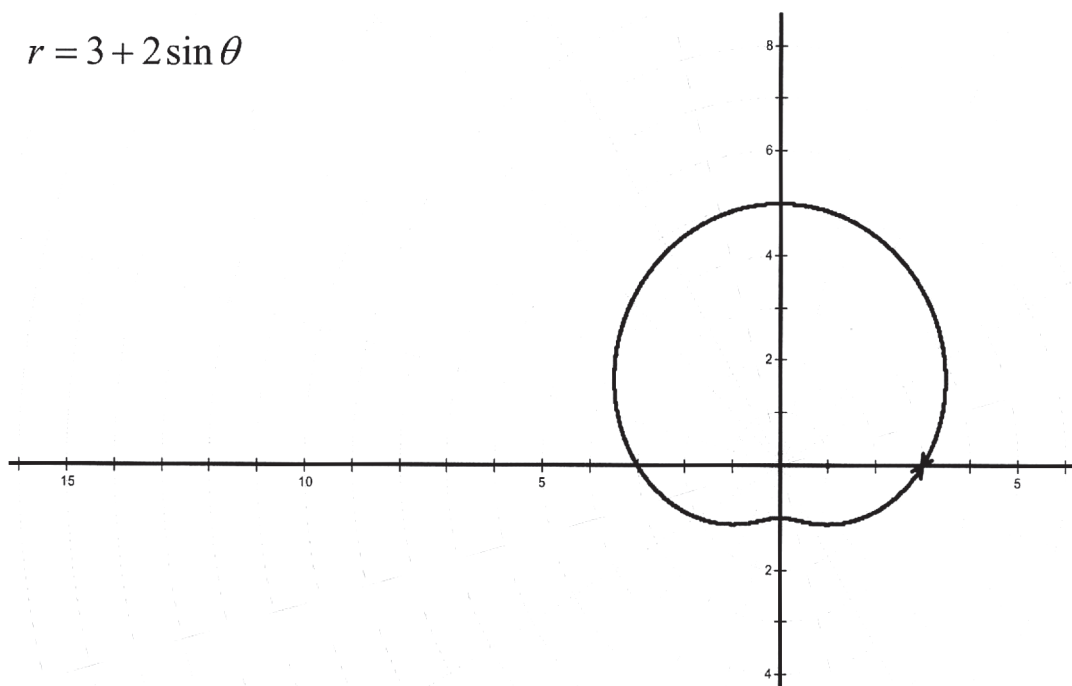
รูป 1.2.17

ก. $r = 3 + 2 \sin \theta$

วิธีทำ

θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$2 \sin \theta$	0	1	2	1	0	-1	-2	-1	0
$r = 3 + 2 \sin \theta$	3	4	5	4	3	2	1	1	3

$r = 3 + 2 \sin \theta$



■

รูป 1.2.18

1.2.5 เลมนิสเคต (Lemniscates)

ถ้า $a > 0$ แล้ว สมการในรูป

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad (1.2.14)$$

$$r^2 = -a^2 \cos 2\theta \quad (1.2.15)$$

$$r^2 = a^2 \sin 2\theta \quad (1.2.16)$$

$$r^2 = -a^2 \sin 2\theta \quad (1.2.17)$$

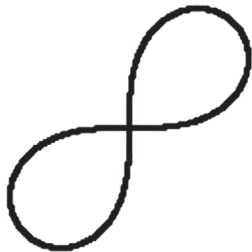
มีกราฟเป็นเส้นโค้งคล้ายใบพัด เรียกว่า เลมนิสเคต (Lemniscates) มาจากคำว่า “Lemniscos” ในภาษากรีก แปลว่าริบบิ้นรูปบ่วง คล้ายเลข 8 ดังรูป 1.2.19



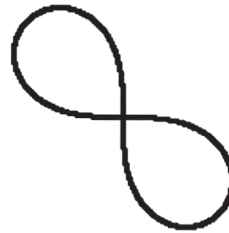
$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$



$$r^2 = -a^2 \cos 2\theta$$



$$r^2 = a^2 \sin 2\theta$$



$$r^2 = -a^2 \sin 2\theta$$

รูป 1.2.19

เลมนิสเคต ดังกล่าวมีศูนย์กลางที่จุดกำเนิด จะมีตำแหน่งนอนไปตามแกนเชิงขั้ว หรือ ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว ขึ้นอยู่กับเครื่องหมายที่หน้าหน้า a^2 และขึ้นอยู่กับเทอม $\cos 2\theta$ หรือ $\sin 2\theta$ ที่ปรากฏอยู่ในสมการ

วิธีทำ สมการที่กำหนดให้อยู่ในรูป $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ จะได้ $r^2 = 2^2 \cos 2\theta$ แล้วจัดสมการในรูป r ในเทอมของ θ ได้ดังนี้

$$r = 2\sqrt{\cos 2\theta} \quad \text{และ} \quad r = -2\sqrt{\cos 2\theta}$$

ทดสอบการสมมาตรรอบแกน X โดยการแทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการจะได้

$$r^2 = 4\cos 2(-\theta) = 4\cos 2\theta$$

จะเห็นได้ว่าสมการไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นสมการสมมาตรรอบแกน X

ทดสอบการสมมาตรรอบแกน Y โดยการแทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการจะได้

$$r^2 = 4\cos 2(\pi - \theta) = 4\cos 2(-\theta) = 4\cos 2\theta$$

จะเห็นได้ว่าสมการไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นสมการสมมาตรรอบแกน Y

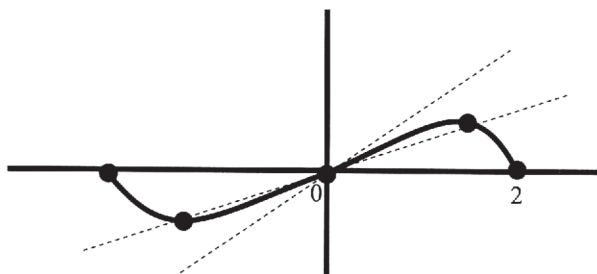
ทดสอบการสมมาตรรอบจุดกำเนิด โดยการแทน r ด้วย $-r$ ในสมการจะได้

$$(-r)^2 = r^2 = 4\cos 2\theta$$

จะเห็นได้ว่าสมการไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นสมการสมมาตรรอบจุดกำเนิด

ดังนั้นจะเขียนกราฟ $r^2 = 4\cos 2\theta$ ในช่วง $0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$ หรือ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ แล้วอาศัยการสมมาตรดังกล่าวข้างต้นดังนี้

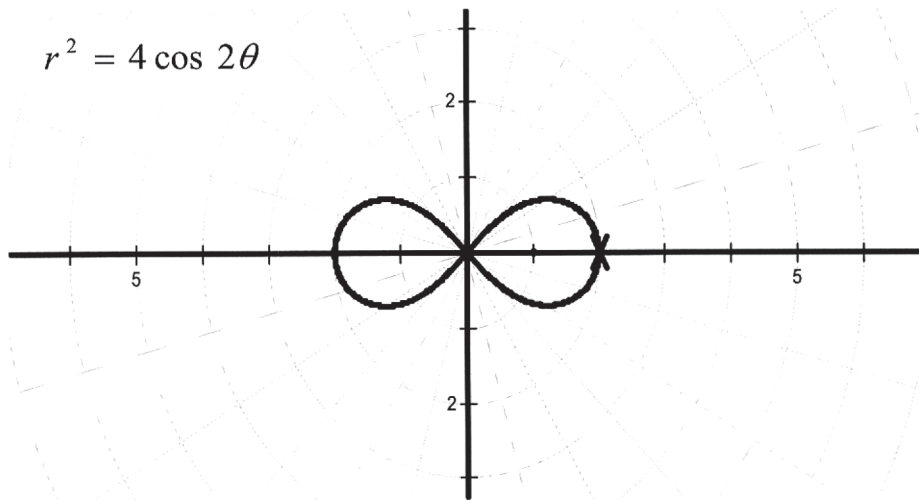
θ	0°	30°	45°
2θ	0°	60°	90°
$\cos 2\theta$	1	$\frac{1}{2}$	0
$r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$	2	$\sqrt{2}$	0
$r = -2\sqrt{\cos 2\theta}$	-2	$-\sqrt{2}$	0



รูป 1.2.20

สำหรับ θ ในช่วง $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ค่าของ $\cos 2\theta$ เป็นค่าลบ ทำให้ไม่มีค่าจริงของ r ที่สอดคล้องกับสมการ $r^2 = 4\cos 2\theta$ ดังนั้นจึงไม่มีจุดบนกราฟสำหรับ θ ในช่วงนี้

รูปเต็มของกราฟจะได้จากการสะท้อนเส้นโค้งในรูป 1.2.120 รอบแกน X แล้วสะท้อนผลที่ได้รอบแกน Y อีกครั้ง จะได้กราฟดังรูป 1.2.21



รูป 1.2.21

2.6 เส้นเวียนก้นหอย (Spirals)

เส้นเวียนก้นหอยคือเส้นโค้งที่เวียนรอบจุดกำเนิด เป็นจำนวนครั้งนับไม่ถ้วน โดยที่ r มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างสม่ำเสมอ ขณะที่ θ มีค่าเพิ่มขึ้น ตัวอย่างที่คุ้นเคยกันมาก คือ เส้นเวียนก้นหอยของอาร์คิมิดีส (spiral of Archimedes) ซึ่งมีสมการอยู่ในรูป

$$r = a\theta \quad \text{เมื่อ } \theta \geq 0 \quad (1.2.19)$$

$$r = a\theta \quad \text{เมื่อ } \theta < 0 \quad (1.2.20)$$

ในสมการนี้ θ เป็นเรเดียน และ a เป็นค่าคงที่บวก

ตัวอย่าง 1.2.8 จงเขียนกราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้ว $r = \theta$ เมื่อ $\theta \geq 0$

วิธีทำ สมการที่กำหนด มี $a = 1$ กราฟเป็นเส้นเวียนก้นหอยของอาร์คิมิดีส

เนื่องจาก $r = 0$ เมื่อ $\theta = 0$ ดังนั้นจุดกำเนิดจะอยู่บนกราฟของสมการและมีแกนเชิงขั้วสัมผัสกับเส้นโค้ง

จากสมการ $r = \theta$ เมื่อ $\theta \geq 0$ ค่า r จะเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ เมื่อ θ มากขึ้น

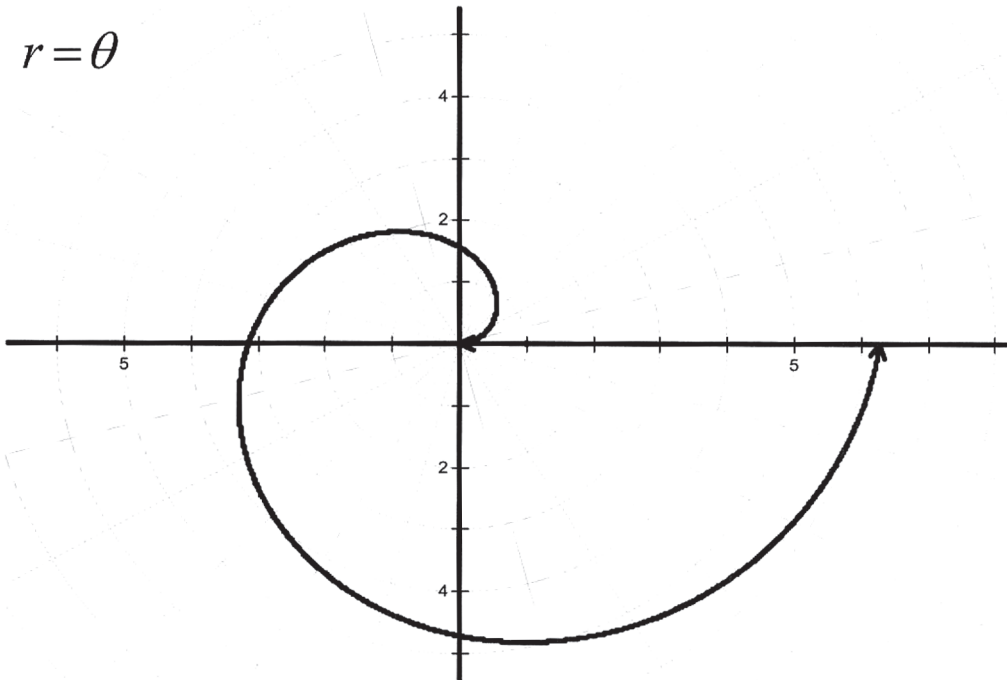
จุดที่กราฟตัดแกน X เกิดขึ้นเมื่อ $\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ ซึ่งค่า $r = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

จุดที่กราฟตัดแกน Y เกิดขึ้นเมื่อ $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ ซึ่งค่า $r = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$

กราฟของสมการ $r = \theta$ เมื่อ $\theta \geq 0$ เมื่อ จะหมุนวนทวนเข็มนาฬิกาโดยเริ่มจากจุดภาคที่ 1 ดังรูป

1.2.22

$$r = \theta$$



รูป 1.2.22

1.2.7 เส้นโค้งกลีบกุหลาบ (Rose curves)

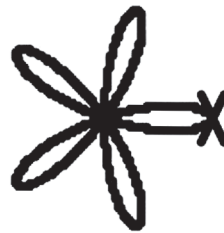
สมการที่อยู่ในรูป

$$r = a \sin n\theta \quad (1.2.21)$$

$$r = a \cos n\theta \quad (1.2.22)$$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก มีกราฟเป็นรูปคล้ายดอกกุหลาบถ้า n เป็นจำนวนคี่ ดอกกุหลาบจะมีจำนวน n กลีบ แต่ละกลีบอยู่ห่างเป็นระยะเท่ากันถ้า n เป็นจำนวนคู่ ดอกกุหลาบจะมีจำนวน $2n$ กลีบ ดังรูป 1.2.23 $(n=2)$  $(n=3)$

$$r = a \sin n\theta$$

 $(n=4)$  $(n=5)$

$$r = a \cos n\theta$$

รูป 1.2.23

ทิศทางของดอกกุหลาบเทียบกับแกนเชิงขั้ว จะขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของค่าคงที่ a และขึ้นอยู่กับ
กับเทอม $\sin \theta$ หรือ $\cos \theta$ ที่ปรากฏอยู่ในสมการ

ตัวอย่าง 1.2.9 จงเขียนกราฟของสมการ $r = 2\sin 3\theta$ ในพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ ทดสอบการสมมาตรรอบแกน X โดยการแทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการจะได้

$$r = 2\sin 3(-\theta) \neq 2\sin 3\theta$$

จะเห็นว่าสมการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นสมการไม่สมมาตรรอบแกน X

ทดสอบการสมมาตรรอบแกน Y โดยการแทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการจะได้

$$r = 2\sin 3(\pi - \theta) = 2\sin 3\theta$$

จะเห็นว่าสมการไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นสมการสมมาตรรอบแกน Y

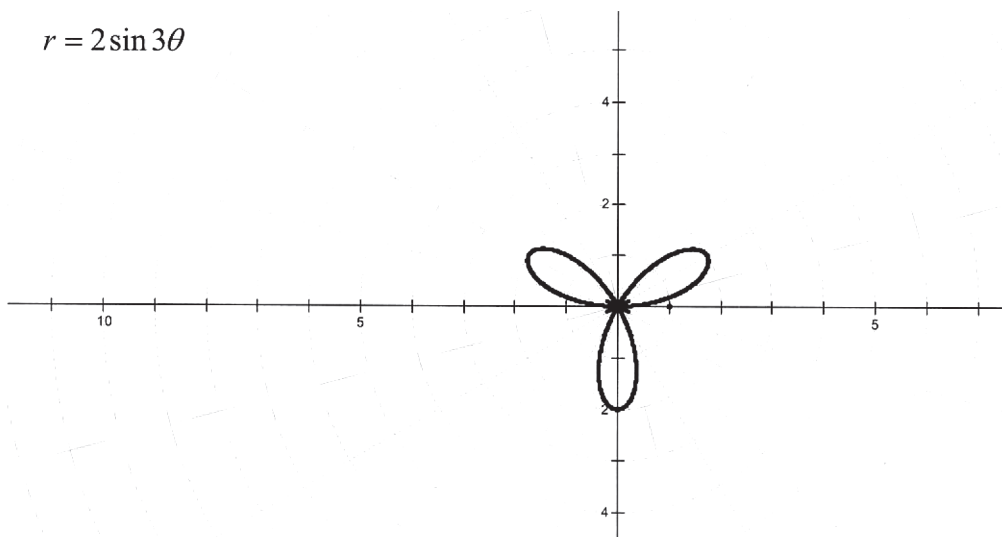
ทดสอบการสมมาตรรอบจุดกำเนิด โดยการแทน r ด้วย $-r$ ในสมการจะได้

$$-r = -2\sin 3\theta \neq 2\sin 3\theta$$

จะเห็นว่าสมการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นสมการไม่สมมาตรรอบจุดกำเนิด

ดังนั้นจะเขียนกราฟ $r = 2\sin 3\theta$ ในช่วง $0^\circ \leq 3\theta \leq 270^\circ$ หรือ $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้วอาศัยการสมมาตรรอบแกน Y ดังกล่าวข้างต้นดังนี้

θ	0°	10°	30°	50°	60°	70°	90°
3θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°
$\sin 3\theta$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
$r = 2\sin 3\theta$	0	1	2	1	0	-1	-2



รูป 1.2.24

ตัวอย่าง 1.2.10 จงเขียนกราฟของสมการ $r = 4\cos 2\theta$ ในพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ ทดสอบการสมมาตรรอบแกน X โดยการแทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการจะได้

$$r = 4\cos 2(-\theta) = 4\cos 2\theta$$

จะเห็นว่าสมการไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นสมการสมมาตรรอบแกน X

ทดสอบการสมมาตรรอบแกน Y โดยการแทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการจะได้

$$r = 4\cos 2(\pi - \theta) = 4\cos 2(-\theta) = 4\cos(-2\theta) = 4\cos 2\theta$$

จะเห็นว่าสมการไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นสมการสมมาตรรอบแกน Y

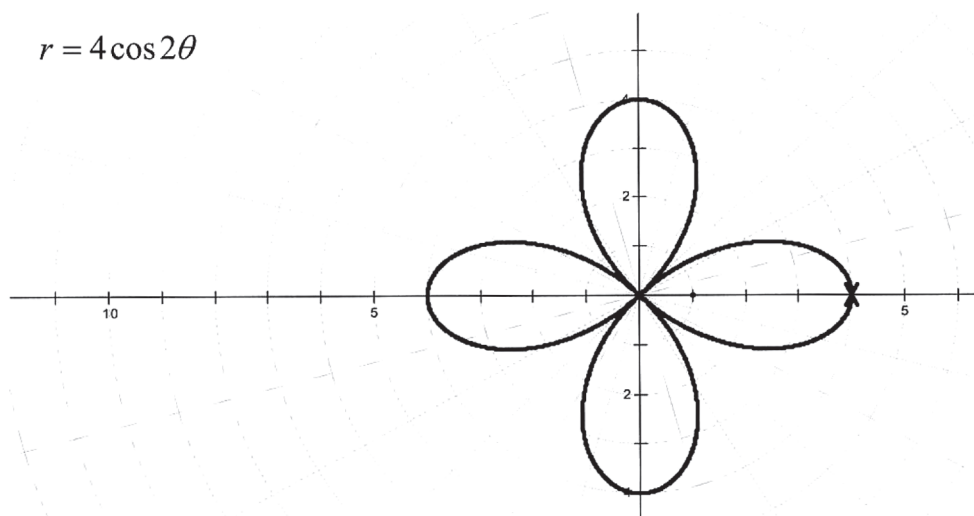
ทดสอบการสมมาตรรอบจุดกำเนิด โดยการแทน r ด้วย $-r$ ในสมการจะได้

$$-r = -4\cos 2\theta \neq 4\cos 2\theta$$

จะเห็นว่าสมการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นสมการไม่สมมาตรรอบจุดกำเนิด

ดังนั้นจะเขียนกราฟ $r = 4\cos 2\theta$ ในช่วง $0^\circ \leq 2\theta \leq 180^\circ$ หรือ $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้วอาศัยการสมมาตรรอบแกน X และแกน Y ดังกล่าวข้างต้นดังนี้

θ	0°	30°	45°	60°	90°
2θ	0°	60°	90°	120°	180°
$\cos 2\theta$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
$r = 4\cos 2\theta$	4	2	0	-2	-4



รูป 1.2.25

แบบฝึกหัด 1.2

จากข้อ 1-10 จงเขียนกราฟเส้นโค้งในพิกัดเชิงขั้วและบอกชื่อของเส้นโค้ง

1. $\theta = \frac{\pi}{6}$

2. $r = 5$

3. $r = \frac{-6}{\sec \theta}$

4. $2r = 9 \sin \theta$

5. $r = 3(1 - \sin \theta)$

6. $r = -(5 + 4 \cos \theta)$

7. $r = 1 - \cos \theta$

8. $r^2 = -9 \cos 2\theta$

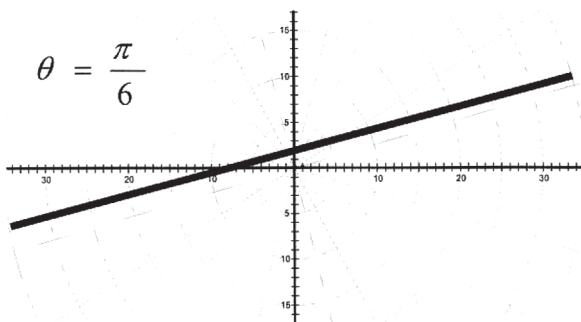
9. $r = 4\theta, \theta \geq 0$

10. $r = 5 \sin 3\theta$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.2

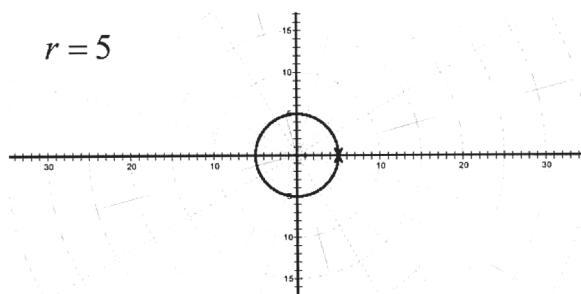
1.

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$



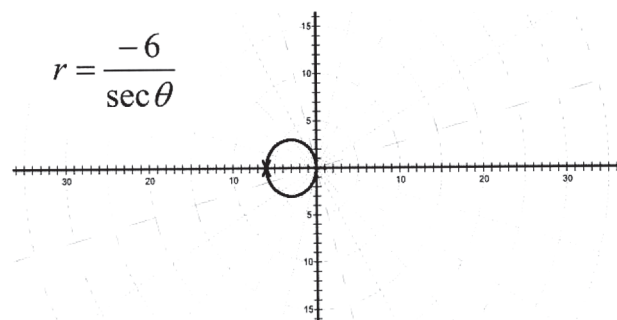
2.

$$r = 5$$



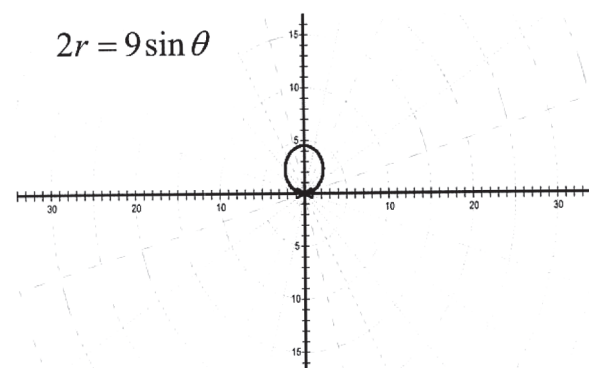
3.

$$r = \frac{-6}{\sec \theta}$$



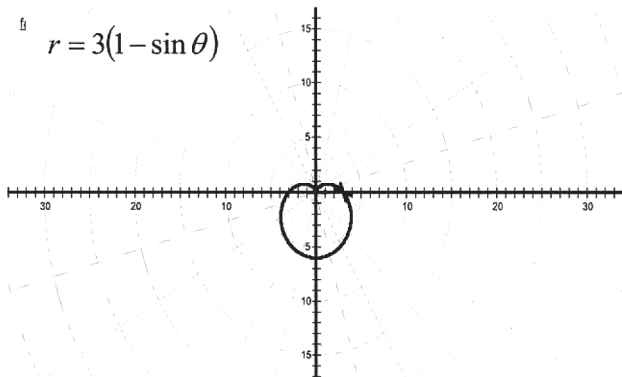
4.

$$2r = 9 \sin \theta$$



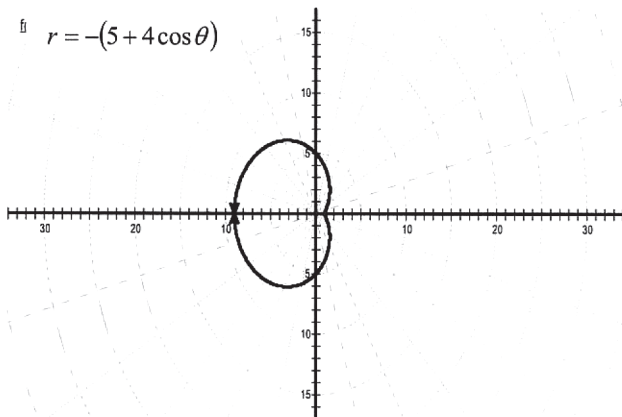
5.

$$r = 3(1 - \sin \theta)$$



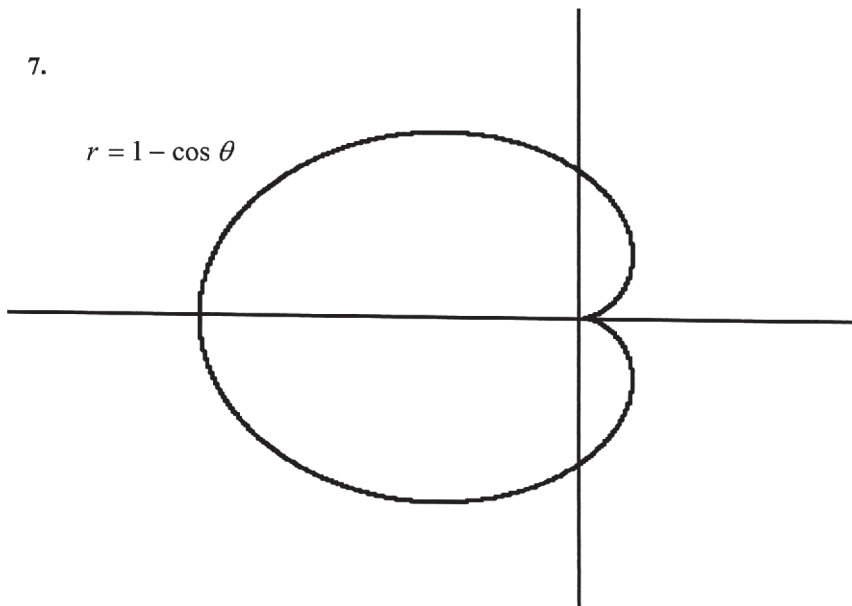
6.

$$r = -(5 + 4 \cos \theta)$$

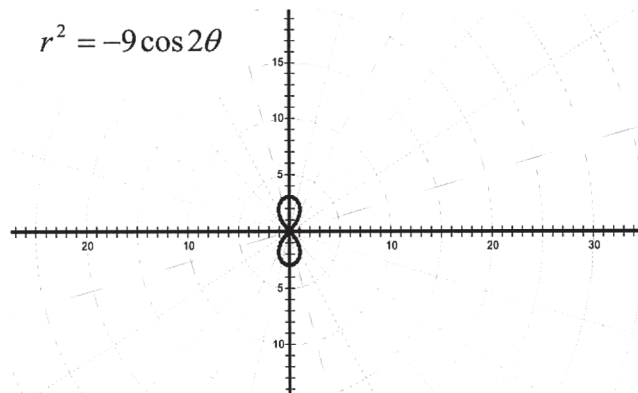


7.

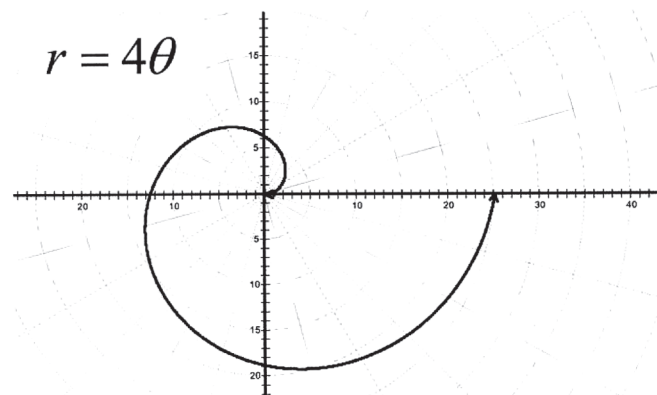
$$r = 1 - \cos \theta$$



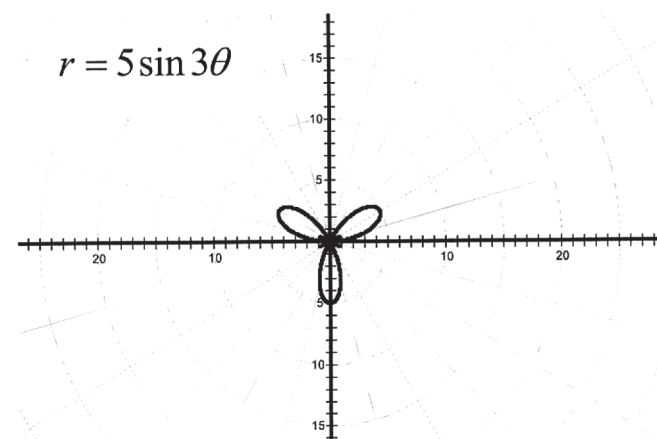
8.



9.



10.



1.3 สมการอิงตัวแปรเสริม

จากการศึกษากราฟที่ผ่านมา โดยทั่วไปจะกล่าวถึงกราฟของฟังก์ชันซึ่งสามารถตรวจสอบได้ด้วยเส้นตรงในแนวตั้ง ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงกราฟ ในลักษณะอื่น ๆ ที่ไม่อาศัยการตรวจสอบดังกล่าว

นิยาม 1.3.1 ถ้าจุด $P(x, y)$ อยู่บนเส้นโค้ง C บนระนาบ xy โดยให้ x และ y เป็นฟังก์ชันของ t คือ

$$x = f(t) \text{ และ } y = g(t)$$

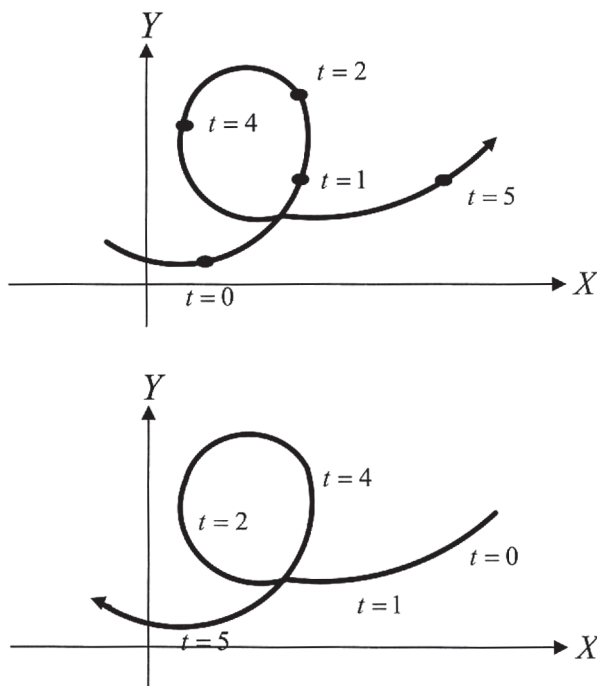
เรียก t ว่าตัวแปรเสริม (Parameter)

เรียกสมการ $x = f(t)$ และ $y = g(t)$ ว่า สมการอิงตัวแปรเสริม (Parametric equations)

เรียกเส้นโค้ง C ว่า เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริม (Parametric curve)

1.3.1 การวางทิศทางโค้งอิงตัวแปรเสริม

ถ้าวัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นโค้งอิงตัวแปรเสริม C โดยที่ x และ y เป็นฟังก์ชันของเวลา t ทิศทางของการเคลื่อนที่ของวัตถุ จะอยู่ในทิศทางที่ค่า t เพิ่มขึ้น ดังรูป 1.3.1



รูป 1.3.1

ดังนั้นการกำหนดฟังก์ชันของสมการอิงตัวแปรเสริมจึงเป็นหัวใจสำคัญในการกำหนดทิศทางของการเคลื่อนที่ของวัตถุ ถึงแม้จะอยู่บนเส้นโค้งเดียวกัน ดังตัวอย่าง 1.3.1

ตัวอย่าง 1.3.1 จงเขียนกราฟของเส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมดังต่อไปนี้

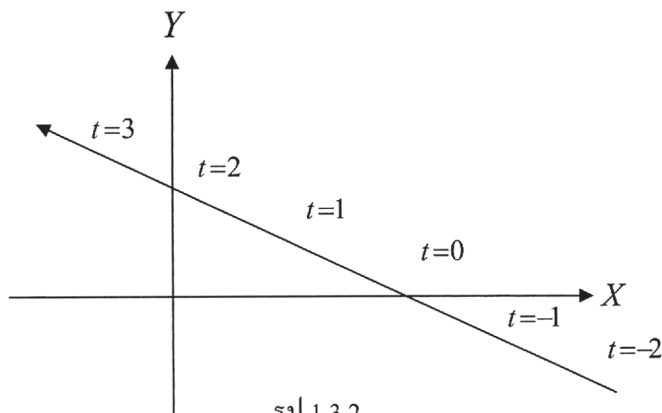
ก. $x = 4 - 2t$, $y = t$

ข. $x = 2 + 2t$, $y = 1 - t$

วิธีทำ หาค่า x และ y ของจุดบนเส้นโค้งโดยการแทนค่า t ลงในสมการอิงตัวแปรเสริม ดังนี้

ก.

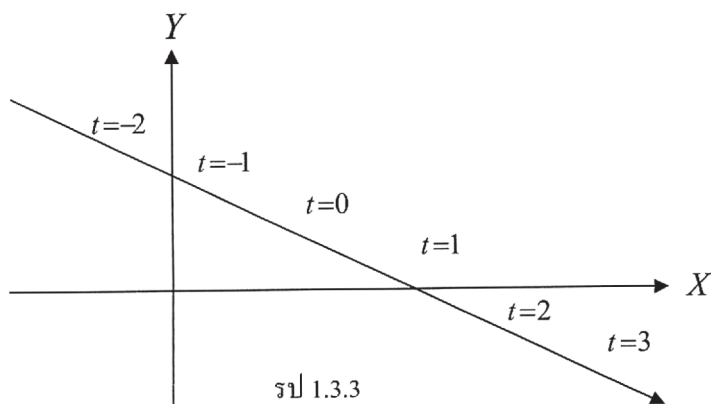
t	-2	-1	0	1	2	3
$x = 4 - 2t$	8	6	4	2	0	-2
$y = t$	-2	-1	0	1	2	3



รูป 1.3.2

ข.

t	-2	-1	0	1	2	3
$x = 2 + 2t$	-2	0	2	4	6	8
$y = 1 - t$	3	2	1	0	-1	-2



รูป 1.3.3

จะเห็นว่าสมการอิงตัวแปรเสริมทั้งข้อ ก. และ ข. มีกราฟเป็นเส้นตรงเดียวกัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม

ตัวอย่าง 1.3.2 จงเขียนกราฟของเส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมต่อไปนี้

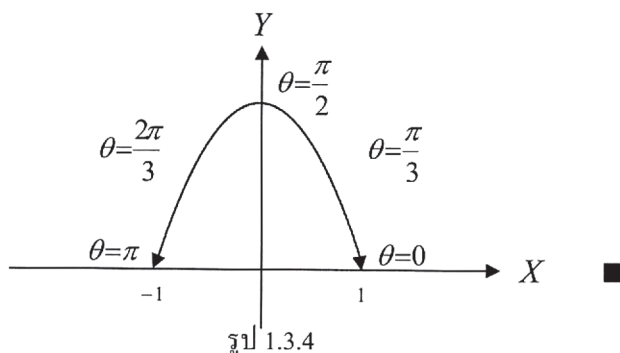
ก. $x = \cos \theta$, $y = 4 \sin^2 \theta$

ข. $x = t$, $y = 4 - 4t^2$

วิธีทำ หาค่า x และ y ของจุดบนเส้นโค้งโดยการแทนค่า t ได้ดังนี้

ก.

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$x = \cos \theta$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = 4 \sin^2 \theta$	0	3	4	3	0	3	4	3	0

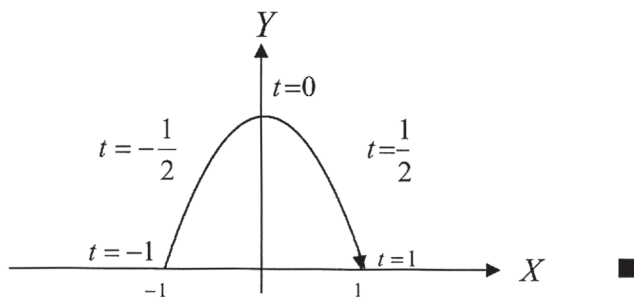


รูป 1.3.4

จะได้เส้นโค้งรูปพาราโบลาเฉพาะในจุดภาคที่ 1 และ 2 มีทิศทางไป กลับเริ่มจากแกน x ด้านขวา และเนื่องจากค่า ของ x อยู่ในช่วง $[-1, 1]$ จึงได้กราฟเป็นเพียงส่วนหนึ่งของพาราโบลาดังรูป 1.3.4

ข.

t	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$x = t$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = 4 - 4t^2$	-12	0	1	4	3	0	-12



รูป 1.3.5

กราฟเป็นเส้นโค้งพาราโบลาที่มีทิศทางจากซ้ายไปขวา ดังรูป 1.3.5 ดังนั้นสมการอิงตัวแปรเสริม $x = \cos \theta$, $y = 4 \sin^2 \theta$ จึงไม่เหมาะสมนัก สำหรับการกำหนดทิศทางการเคลื่อนที่บนเส้นโค้งพาราโบลา

ตัวอย่าง 1.3.3 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และมีรัศมียาว 4 หน่วย โดยมีทิศทางดังนี้

- ก. ทิศทางทวนตามเข็มนาฬิกา
- ข. ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

วิธีทำ ก. ให้ t เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$\text{ให้ } x = 4 \cos t \text{ จะได้ } x^2 = (4 \cos t)^2$$

$$\text{และ } y = 4 \sin t \text{ จะได้ } y^2 = (4 \sin t)^2$$

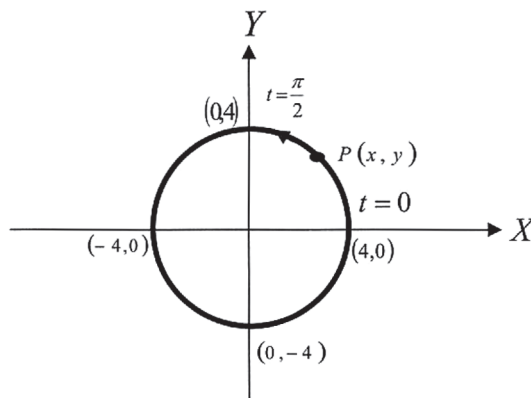
$$\text{ดังนั้นจะได้ } x^2 + y^2 = (4 \cos t)^2 + (4 \sin t)^2$$

$$= 16 \cos^2 t + 16 \sin^2 t$$

$$= 16(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$= 16$$

จะเห็นว่า $x^2 + y^2 = 16$ เป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$ และรัศมียาว 4 หน่วย และจุด $P(x, y)$ จะเคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกาเมื่อ t มีค่ามากขึ้น ดังรูป 1.3.6



รูป 1.3.6

ดังนั้นสมการอิงตัวแปรเสริมคือ $x = 4 \cos t$, $y = 4 \sin t$ ■

ข. พิจารณาค่า x, y จากสมการ $x = 4 \cos t, y = -4 \sin t$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ค่าของ } x^2 + y^2 &= (4 \cos t)^2 + (-4 \sin t)^2 \\ &= 16 \cos^2 t + 16 \sin^2 t \\ &= 16(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 16 \end{aligned}$$

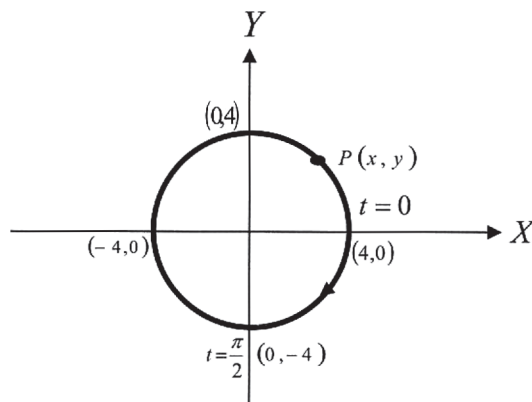
ซึ่ง $x^2 + y^2 = 16$ เป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$ และรัศมียาว 4 หน่วย

พิจารณาค่า x และ y จากค่า t ในสมการอิงตัวแปรเสริม

จะเห็นว่า เมื่อ $t = 0$ จะได้ $x = 4 \cos(0) = 4$ และ $y = -4 \sin(0) = 0$

และเมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $x = 4 \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ และ $y = -4 \sin(\frac{\pi}{2}) = -4$

และจุด $P(x, y)$ จะเคลื่อนที่ตามเข็มนาฬิกาเมื่อ t มากขึ้น ดังรูป 1.3.7



รูป 1.3.7

ดังนั้นสมการอิงตัวแปรเสริมคือ $x = 4 \cos t, y = -4 \sin t$ ■

ตัวอย่าง 1.3.4 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของวงรี $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

ดังนั้น $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = \cos^2 t + \sin^2 t$

ถ้าให้ $\frac{(x+1)^2}{9} = \cos^2 t$ และ $\frac{(y-2)^2}{4} = \sin^2 t$

จะได้ $(x+1)^2 = 9 \cos^2 t$ และ $(y-2)^2 = \sin^2 t$

$$x+1 = 3 \cos t \quad \text{และ} \quad y-2 = \sin t$$

$$x = 3 \cos t - 1 \quad \text{และ} \quad y = \sin t + 2$$

ดังนั้น สมการอิงตัวแปรเสริมของวงรีที่กำหนด คือ $x = 3 \cos t - 1$ และ $y = \sin t + 2$

ถ้าให้ $\frac{(x+1)^2}{9} = \sin^2 t$ และ $\frac{(y-2)^2}{4} = \cos^2 t$

จะได้ $(x+1)^2 = 9 \sin^2 t$ และ $(y-2)^2 = 4 \cos^2 t$

$$x+1 = 3 \sin t \quad \text{และ} \quad y-2 = \cos t$$

$$x = 3 \sin t - 1 \quad \text{และ} \quad y = \cos t + 2$$

ดังนั้น สมการอิงตัวแปรเสริมของวงรีที่กำหนด คือ $x = 3 \sin t - 1$ และ $y = \cos t + 2$ ■

บรรณานุกรม

Anton, H., Bivens I., & Davis, S. (2002). **Calculus** . Seventh Edition. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Ayres, F.J. (1981). **Calculus**. McGraw-Hill Book Company.

Kreyszig, E. (1988). **Advanced Engineering Mathematics**. Sixth Edition. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Spiegel, M.R. (1983). **Advanced Mathematics for Engineers & Scientists**. McGraw-Hill Book Company.

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2528). **แคลคูลัส**
ชั้นปีที่ 2 เล่มที่ 2. กรุงเทพมหานคร : พิกษ์การพิมพ์

จินดา อาริยะกุล. (2538). **Integrals และการประยุกต์**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยมหิดล. พิมพ์ครั้งที่ 7. กรุงเทพมหานคร : พิกษ์การพิมพ์.

แผนกวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีการเกษตร มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล
ล้านนา. (2553). **แคลคูลัส 2 สำหรับวิศวกร**. เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล
ล้านนา.

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. (2542). **แคลคูลัสสำหรับ**
วิศวกรรมศาสตร์ 2. เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. (2543). **แคลคูลัสสำหรับ**
วิศวกรรมศาสตร์ 3. เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี. (2540).
คณิตศาสตร์พื้นฐาน. กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2540). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. พิมพ์ครั้งที่ 7. กรุงเทพมหานคร :
โรงพิมพ์มหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย.

อนัญญา อภิชาติบุตร. (2537). **แคลคูลัส เล่มที่ 2**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพมหานคร : พิกษ์การพิมพ์.

อรุณี เจริญราช. (2538). **แคลคูลัส เล่ม 3**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : พิกษ์การพิมพ์.

ประวัติผู้เขียน

รองศาสตราจารย์ ดร. ชัยศักดิ์ อัจฉนนท์

ประวัติการศึกษา

- ชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 (ป.7) โรงเรียนพลวิทยา
- ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 (ม.ศ.3) โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
- ประกาศนียบัตรวิชาการศึกษา (ปกศ.) วิทยาลัยครูสงขลา
- การศึกษาระดับบัณฑิต (กศ.บ. เกียรตินิยมอันดับหนึ่ง)
- มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตสงขลา
- ปีการศึกษา 2521-2524
- ศึกษาศาสตรบัณฑิต (ศศ.บ.)
- มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช ปีการศึกษา 2531-2533
- ครุศาสตรมหาบัณฑิต (ค.ม.) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- ปีการศึกษา 2529-2530
- ศึกษาศาสตรดุษฎีบัณฑิต (ศษ.ด.) มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
- ปีการศึกษา 2548-2552

ตำแหน่ง

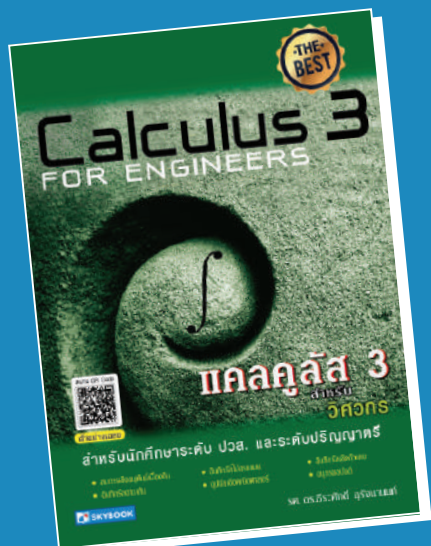
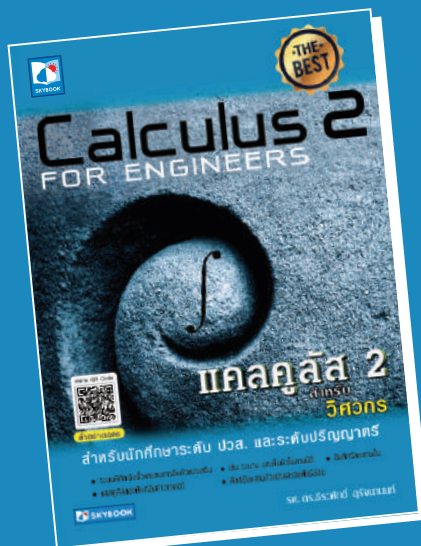
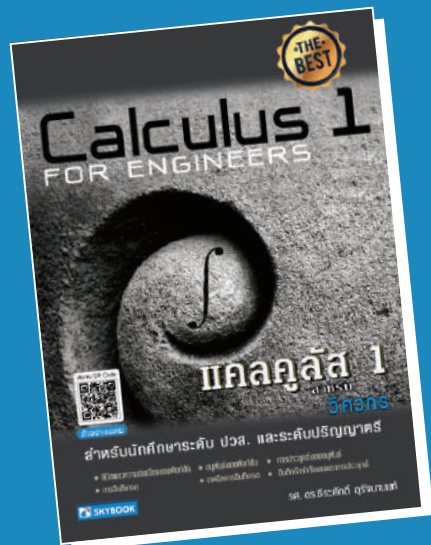
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ระดับ 6 ปีการศึกษา 2537
- รองศาสตราจารย์ ระดับ 7 ปีการศึกษา 2540
- รองศาสตราจารย์ ระดับ 8 ปีการศึกษา 2542
- รองศาสตราจารย์ ระดับ 9 ปีการศึกษา 2545

สถานที่ทำงาน

- มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา เชียงใหม่

ผลงานเขียน

- ความน่าจะเป็นและสถิติประยุกต์ เล่ม 1
- ความน่าจะเป็นและสถิติประยุกต์ เล่ม 2
- อินทิกรัล
- สมการเชิงอนุพันธ์
- แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร
- แคลคูลัส 2 สำหรับวิศวกร
- แคลคูลัส 3 สำหรับวิศวกร
- สมการเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์เชิงวิศวกรรมศาสตร์



จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย



บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
SKYBOOK COMPANY LIMITED
 28, 30, 32 ซอยรังสิต-ปทุมธานี 16 ซอย 7
 ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
 โทรศัพท์ 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร 0-2567-5105
www.skybook.co.th e-mail: sales@skybook.co.th

e-book

หมวด คณิตศาสตร์
 แคลคูลัส 2 สำหรับวิศวกร

ISBN : 978-616-213-925-3



9 786162 139253
ราคา 408 บาท