



Calculus 3

FOR ENGINEERS



ตัวอย่างเฉลย

แคลคูลัส 3

สำหรับ

วิศวกร

สำหรับนักศึกษาในระดับ ปวส. และระดับปริญญาตรี

- สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น
- อินทิกรัลไม่ตรงแบบ
- อินทิกรัลเชิงตัวเลข
- อินทิกรัลตามเส้น
- อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
- อนุกรมอนันต์

คำนำ

ตำราแคลคูลัส 3 สำหรับวิศวกร (Calculus 3 for Engineers) เล่มนี้ ผู้เขียนได้เขียนและเรียบเรียงขึ้น เพื่อให้ให้นักศึกษาได้มีตำราที่ใช้ในการประกอบการเรียนการสอนนักศึกษาในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศ.บ.) หลักสูตรอุตสาหกรรมศาสตรบัณฑิต (อศ.บ.) และหลักสูตรครุศาสตรอุตสาหกรรมบัณฑิต (ค.อ.บ.) ระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี อีกทั้งตำราเล่มนี้นักศึกษามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอื่น ๆ และสถาบันการอาชีวศึกษาทั่วประเทศ สามารถศึกษาเนื้อหาที่มีความสนใจเพื่อใช้ในการประกอบการเรียนการสอนเพิ่มเติมได้ โดยมีเนื้อหาดังนี้

1. สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น
2. อินทิกรัลไม่ตรงแบบ
3. อินทิกรัลเชิงตัวเลข
4. อินทิกรัลตามเส้น
5. อนุพันธ์เชิงคณิตศาสตร์
6. อนุกรมอนันต์

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราแคลคูลัส 3 สำหรับวิศวกร เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ในการประกอบการเรียนการสอนของนักศึกษาและผู้ที่ต้องการใช้ประกอบการศึกษาเพิ่มเติม

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดาและมารดา ที่มีพระคุณอันยิ่งใหญ่หาศาลหาสิ่งอื่นใดเสมอมิได้ และผู้เขียนขอโอกาสนี้แสดงคารวะและกตัญญูต่อคุณครู และอาจารย์ทุก ๆ ท่านของผู้เขียน รวมทั้งผู้ช่วยศาสตราจารย์เมธี ลิ้มอักษร ผู้ช่วยศาสตราจารย์เสกสรรค์ คำกระบี่ รองศาสตราจารย์ ดร. สมใจ จิตต์พิทักษ์ รองศาสตราจารย์ ดร. วิชัย ชำนิ รองศาสตราจารย์สมศักดิ์ โพธิ์วิจิตร รองศาสตราจารย์ สุพจน์ ชะนะมา รองศาสตราจารย์ ดร. สุเทพ ทองอยู่ ศาสตราจารย์ ดร. สมหวัง พิธิยานุวัฒน์ ศาสตราจารย์ ดร. อุทุมพร จามรมาน อาจารย์ ดร.อัญชลี ตนานนท์ รองศาสตราจารย์ ดร. กิตติพร ปัญญาภิบาลโยผล ที่เป็นบุรพคณาจารย์ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้และประสบการณ์ต่าง ๆ ให้แก่ผู้เขียน รวมถึงเพื่อนร่วมงานทุกคน และท้ายสุดครอบครัวอันเป็นที่รักยิ่งที่สุดของผู้เขียนตลอดมา

รองศาสตราจารย์ ดร. ชีระศักดิ์ อุรจนาพันธ์

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1	
สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น	1
บทนำ	1
สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้	5
แบบฝึกหัด 1.1	11
คำตอบแบบฝึกหัด 1.1	12
สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์	13
แบบฝึกหัด 1.2	25
คำตอบแบบฝึกหัด 1.2	26
สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง	27
แบบฝึกหัด 1.3	41
คำตอบแบบฝึกหัด 1.3	42
ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต	43
แบบฝึกหัด 1.4	57
คำตอบแบบฝึกหัด 1.4	58
สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง	59
แบบฝึกหัด 1.5	67
คำตอบแบบฝึกหัด 1.5	68
สมการแบร์นูลลี	69
แบบฝึกหัด 1.6	81
คำตอบแบบฝึกหัด 1.6	82
บทที่ 2	
อินทิกรัลไม่ตรงแบบ	83
บทนำ	83
อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง	84
แบบฝึกหัด 2.1	102
คำตอบแบบฝึกหัด 2.1	103

	หน้า
	อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่สอง
	104
	แบบฝึกหัด 2.2
	119
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.2
	120
	อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดผสม
	121
	แบบฝึกหัด 2.3
	127
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.3
	128
บทที่ 3	อินทิกรัลเชิงตัวเลข
	129
	กฎจุดปลายทางซ้าย
	130
	กฎจุดปลายทางขวา
	131
	กฎสี่เหลี่ยมคางหมู
	134
	แบบฝึกหัด 3.1
	156
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.1
	158
	กฎซิมป์สัน
	159
	แบบฝึกหัด 3.2
	188
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.2
	190
บทที่ 4	อินทิกรัลตามเส้น
	191
	อินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริง
	191
	แบบฝึกหัด 4.1
	215
	คำตอบแบบฝึกหัด 4.1
	216
	อินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
	217
	แบบฝึกหัด 4.2
	235
	คำตอบแบบฝึกหัด 4.2
	236
บทที่ 5	อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
	237
	หลักการจัดอันดับดี
	237
	การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
	239
	แบบฝึกหัด 5
	252

	หน้า
บทที่ 6	
อนุกรมอนันต์	253
ลำดับ	253
แบบฝึกหัด 6.1	272
คำตอบแบบฝึกหัด 6.1	274
ลำดับทางเดียว	276
แบบฝึกหัด 6.2	287
คำตอบแบบฝึกหัด 6.2	288
อนุกรมอนันต์	289
แบบฝึกหัด 6.3	313
คำตอบแบบฝึกหัด 6.3	316
การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม	317
แบบฝึกหัด 6.4	332
คำตอบแบบฝึกหัด 6.4	334
การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ	335
แบบฝึกหัด 6.5	340
การทดสอบโดยอัตราส่วน	341
แบบฝึกหัด 6.6	353
คำตอบแบบฝึกหัด 6.6	354
การทดสอบโดยการถอดราก	355
แบบฝึกหัด 6.7	361
คำตอบแบบฝึกหัด 6.7	362
การทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต	363
แบบฝึกหัด 6.8	369
คำตอบแบบฝึกหัด 6.8	370
สรุปการทดสอบการลู่เข้า	371
แบบฝึกหัด 6.9	385
คำตอบแบบฝึกหัด 6.9	386

	หน้า
อนุกรมสลับ	387
แบบฝึกหัด 6.10	402
คำตอบแบบฝึกหัด 6.10	404
อนุกรมกำลังใน x	405
แบบฝึกหัด 6.11	423
คำตอบแบบฝึกหัด 6.11	424
อนุกรมกำลังใน $x - a$	425
แบบฝึกหัด 6.12	441
คำตอบแบบฝึกหัด 6.12	442
อนุกรมของแมคลอรินและเทย์เลอร์	443
แบบฝึกหัด 6.13	463
คำตอบแบบฝึกหัด 6.13	464
อนุกรมฟูรีเยร์	465
แบบฝึกหัด 6.14	512
คำตอบแบบฝึกหัด 6.14	516
ภาคผนวก	520
พีชคณิตพื้นฐาน	520
สมบัติของเลขชี้กำลังและลอการิทึม	520
ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	521
เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ	522
สรุปพื้นฐานลำดับและอนุกรม	524
สูตรการหาอนุพันธ์	529
สูตรการอินทิเกรต	530
บรรณานุกรม	531

บทที่ 1

สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

บทนำ

สมการคณิตศาสตร์ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์เป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และในสาขาอื่น ๆ เนื่องจากกฎเกณฑ์และปัญหาต่าง ๆ ในสาขาเหล่านี้ล้วนพิจารณาเป็นสมการคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสิ้นหรือสามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ ตัวอย่างเช่น

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ กำหนดความชันที่จุดใด ๆ เป็น $\frac{dy}{dx}$ และจุดผ่าน (x_0, y_0)
จงหาสมการเส้นโค้ง

ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ผูกติดกับปลายลวดสปริงจะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$

ปัญหาการเคลื่อนที่ กำหนดความเร็วในการเคลื่อนที่ $v(t)$ และจุดเริ่มต้นของการเคลื่อนที่ จะมีรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์เป็น $\frac{ds}{dt} = v(t)$ เมื่อ s เป็นฟังก์ชันของการเคลื่อนที่ ณ เวลา t

สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations)

สมการเชิงอนุพันธ์หมายถึง สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวหรือมากกว่า ตัวอย่างเช่น

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} - 10y = 0, \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial t} = v, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equation) หมายถึง สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ตัวอย่างเช่น $\frac{dy}{dx} = 2x + 5, \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0, \frac{d^3y}{dx^3} + 2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + \frac{dy}{dx} = \cos x$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equations) หมายถึง สมการที่ประกอบด้วย อนุพันธ์ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัวขึ้นไปตัวอย่างเช่น

$$\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial t} = v, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ (Order of differential equations) คือ อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ ที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

ตัวอย่างเช่น $\frac{dy}{dx} + 3x = 2y$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1

$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2

$(y''')^2 + (y'')^4 + 3y = x^2$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3

ระดับชั้นของสมการเชิงอนุพันธ์ (Degree of differential equations) คือ เลขชี้กำลังของพจน์ อนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุดที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น หลังจากทำให้อนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ในสมการเชิงอนุพันธ์นั้นมีกำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่างเช่น $x \frac{dy}{dx} + y = 3$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ระดับชั้น 1

$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ระดับชั้น 1

$x \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3 + 4y = xy$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3 ระดับชั้น 2

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^4}$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^4$

จึงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ระดับชั้น 2

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear differential equations) เป็นสมการที่มีเงื่อนไขดังนี้

1. ทุก ๆ ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระมีเลขชี้กำลังเท่ากับ 1 เท่านั้น
2. ไม่มีพจน์ที่อยู่ในรูปผลคูณของตัวแปรตามและ/หรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระปรากฏในสมการ
3. ไม่มีพจน์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันอดิศัยของตัวแปรตามหรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (Nonlinear differential equations) หมายถึงสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น ตัวอย่างเช่น

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = xy \quad \text{เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + xy \frac{dy}{dx} = x^2 \quad \text{เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น}$$

รูปทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเขียนได้เป็น

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

โดยที่ $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (Solution of differential equations) คือ ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระกับตัวแปรตามที่ไม่ปรากฏพจน์ของอนุพันธ์ ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าแล้วทำให้สมการเชิงอนุพันธ์นั้นเป็นจริงหรือสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่างเช่น $y = \sin x + 3 \cos x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$

$y = e^{2x} + e^{-x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

$y^3 + 2xy - x^2 = 0$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2y}{3y^2 + 2x}$

$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

ผลเฉลยทั่วไป (General solutions) หมายถึง ผลเฉลยที่ประกอบด้วยค่าคงที่ไม่เจาะจง (Arbitrary constant) จำนวน n ค่า นิยมเขียนในรูปของตัวอักษร c

ตัวอย่างเช่น $y = x^3 + c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ไม่เจาะจง

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่ไม่เจาะจง

ผลเฉลยเฉพาะราย (Particular solutions) หมายถึง ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ค่าคงที่ไม่เจาะจงจำนวน n ค่า นั้น ได้ถูกแทนค่าเป็นค่าคงที่แน่นอนทั้ง n ค่า ภายใต้เงื่อนไขของโจทย์ที่กำหนดให้

ตัวอย่างเช่น $y = x^3 + 1$ เป็นผลเฉลยเฉพาะรายของสมการ $\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$ ภายใต้เงื่อนไข $x = 1$ และ $y = 2$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งและระดับชั้นหนึ่ง

วิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งและระดับชั้นหนึ่งนั้น จะขึ้นอยู่กับรูปแบบต่าง ๆ ของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น เช่น สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้ สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งและระดับชั้นหนึ่ง หมายถึง สมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถเขียนอยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ โดยที่ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y หรืออาจเขียนอยู่ในรูป $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ โดยที่ $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y

ตัวอย่างเช่น สมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$ สามารถเขียนได้ในรูป $(y+x)dx - (y-x)dy = 0$ จะได้ว่า $M(x, y) = y+x$ และ $N(x, y) = -(y-x)$

สมการ $\frac{dy}{dx} = 1+x^2y$ สามารถเขียนได้ในรูป $(1+x^2y)dx - dy = 0$ จะได้ว่า $M(x, y) = 1+x^2y$ และ $N(x, y) = -1$

1.1 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้ (Variable separable differential equations)

นิยาม 1.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ จะเรียกว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้ ก็ต่อเมื่อจัดให้อยู่ในรูปของ

$$A(x)dx + B(y)dy = 0$$

โดยที่ $A(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียว และ $B(y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงตัวเดียว

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรทำได้ดังนี้

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

ถ้าสามารถแยกตัวแปรที่เหมือนกันให้อยู่ด้วยกัน โดยการแยก $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นผลคูณของฟังก์ชันตัวแปรเดียว 2 ฟังก์ชันคูณกันได้ดังนี้

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

แล้วหารตลอดด้วย $M_2(y)N_1(x)$

ได้
$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

กำหนดให้ $\frac{M_1(x)}{N_1(x)} = A(x)$ และ $\frac{N_2(y)}{M_2(y)} = B(y)$

ได้
$$A(x)dx + B(y)dy = 0$$

แล้วทำการอินทิเกรตตลอดสมการก็จะได้ผลเฉลยทั่วไปที่ต้องการ

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = c \quad \text{โดย } c \text{ เป็นค่าคงที่ไม่ใช่จะง}$$

ตัวอย่าง 1.1.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^2y \frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

โดยการคูณตลอดด้วย dx ได้ $x^2ydy + 2xy^2dx = 0$

โดยการหารตลอดด้วย x^2y^2 ได้ $\frac{ydy}{y^2} + \frac{2xdx}{x^2} = 0$

$$\frac{1}{y}dy + \frac{2}{x}dx = 0$$

$$\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{2}{x}dx = c$$

$$\ln|y| + 2\ln|x| = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\ln|y| + 2\ln|x| = c$ ■

หมายเหตุ จากผลเฉลยทั่วไปคือ $\ln|y| + 2\ln|x| = c$ อาจจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\ln|y| + \ln|x^2| = \ln|c_1| \quad \text{เมื่อ } \ln|c_1| = c \text{ โดย } c \text{ เป็นค่าคงที่ไม่ใช่จะ}$$

$$\ln|x^2y| = \ln|c_1|$$

$$x^2y = c_1$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $x^2y = c_1$ ■

ตัวอย่าง 1.1.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2}{x-2}$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

โดยการคูณตลอดด้วย $(x-2)dx$ ได้ $(x-2)dy = xy^2dx$

$$(x-2)dy - xy^2dx = 0$$

โดยการหารตลอดด้วย $(x-2)y^2$ ได้ $\frac{1}{y^2}dy - \frac{x}{x-2}dx = 0$

$$\int \frac{1}{y^2}dy - \int \frac{x}{x-2}dx = c$$

พิจารณา $\int \frac{x}{x-2}dx$ เนื่องจากกำลังสูงสุดของเศษเท่ากับกำลังสูงสุดของส่วน

จึงนำ $x-2$ ไปหาร x ได้ดังนี้

$$(x-2) \overline{) x} \quad (1$$

$$\underline{x-2}$$

$$=$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{x}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2} \text{ และจะได้}$$

$$\int y^{-2}dy - \int \left(1 + \frac{2}{x-2}\right)dx = c$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} - \int dx - \int \frac{2}{x-2}dx = c$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} - \int dx - 2 \int \frac{d(x-2)}{x-2} = c$$

$$-\frac{1}{y} - x - 2\ln|x-2| = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $-\frac{1}{y} - x - 2\ln|x-2| = c$ ■

ตัวอย่าง 1.1.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(x-4)y^4 dx - x^3(y^2-3)dy = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \text{โดยการคูณตลอดด้วย } x^3 y^4 \text{ ได้ } & \frac{x-4}{x^3} dx - \frac{y^2-3}{y^4} dy = 0 \\ & \int \frac{x-4}{x^3} dx - \int \frac{y^2-3}{y^4} dy = c \\ & \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx - \int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4} \right) dy = c \\ & \int (x^{-2} - 4x^{-3}) dx - \int (y^{-2} - 3y^{-4}) dy = c \\ & \left(\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{4x^{-2}}{-2} \right) - \left(\frac{y^{-1}}{-1} - \frac{3y^{-3}}{-3} \right) = c \\ & \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) - \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3} \right) = c \\ & \frac{2}{x^2} - \frac{1}{y^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{y^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c$ ■

ตัวอย่าง 1.1.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+xy^2}{y+x^2y}$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \text{โดยการคูณตลอดด้วย } (y+x^2y) dx \text{ ได้ } & (y+x^2y) dy = (3x+xy^2) dx \\ & (y+x^2y) dy - (3x+xy^2) dx = 0 \\ & y(1+x^2) dy - x(3+y^2) dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โดยการหารตลอดด้วย } (1+x^2)(3+y^2) \text{ ได้ } & \frac{y}{3+y^2} dy - \frac{x}{1+x^2} dx = 0 \\ & \int \frac{y}{3+y^2} dy - \int \frac{x}{1+x^2} dx = c \\ & \int \frac{yd(3+y^2)}{(3+y^2)(2y)} - \int \frac{xd(1+x^2)}{(1+x^2)(2x)} = c \\ & \frac{1}{2} \int \frac{d(3+y^2)}{3+y^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = c \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \ln|3+y^2| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{1}{2} \ln|3+y^2| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| = c$ ■

หมายเหตุ จากผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{1}{2} \ln|3+y^2| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| = c$ อาจจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\ln|3+y^2| - \ln|1+x^2| = 2c$$

$$\ln|3+y^2| - \ln|1+x^2| = \ln|c_1| \quad \text{เมื่อ } 2c = \ln|c_1|$$

$$\ln \left| \frac{3+y^2}{1+x^2} \right| = \ln|c_1|$$

$$\frac{3+y^2}{1+x^2} = c_1$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{3+y^2}{1+x^2} = c_1$ ■

ตัวอย่าง 1.1.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(1+y^2)dx - (1+x^2)xydy = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

โดยการหารตลอดด้วย $x(1+x^2)(1+y^2)$ ได้ $\frac{1}{x(1+x^2)}dx - \frac{y}{1+y^2}dy = 0$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx - \int \frac{y}{1+y^2}dy = c$$

โดยการแยกเศษส่วนย่อยของ $\frac{1}{x(1+x^2)}$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(1+x^2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x^2} \\ &= \frac{A(1+x^2) + Bx}{x(1+x^2)} \end{aligned}$$

$$1 = A(1+x^2) + Bx \dots\dots\dots(1)$$

ให้ $x=0$ ใน (1) จะได้

$$1 = A(1+0) + B(0)$$

$$A = 1$$

แทน $A=1$ และ $x=1$ ใน (1) จะได้

$$1 = 1(1+1^2) + B(1)$$

$$1 = 2 + B$$

$$B = -1$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}$$

นั่นคือ

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx - \int \frac{y}{1+y^2} dy = c$$

$$\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx - \int \frac{y}{1+y^2} dy = c$$

$$\int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = c$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| - \frac{1}{2} \ln|1+y^2| = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| - \frac{1}{2} \ln|1+y^2| = c$ ■

ตัวอย่าง 1.1.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปและผลเฉลยเฉพาะรายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x \sin y dx + (x^2 + 1) \cos y dy = 0 \quad \text{และ} \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

โดยการหารตลอดด้วย $(x^2 + 1) \sin y$ ได้ $\frac{x}{x^2 + 1} dx + \frac{\cos y}{\sin y} dy = 0$

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = c$$

$$\int \frac{xd(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(2x)} + \int \frac{\cos y d(\sin y)}{(\sin y)(\cos y)} = c$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \int \frac{d(\sin y)}{\sin y} = c$$

$$\frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \ln|\sin y| = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \ln|\sin y| = c$ ■

เนื่องจาก $y(0) = \frac{\pi}{2}$ หรือ $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$ แทนค่าในผลเฉลยทั่วไป จะได้

$$\frac{1}{2} \ln|(0)^2 + 1| + \ln\left|\sin \frac{\pi}{2}\right| = c$$

$$\frac{1}{2} \ln 1 + \ln 1 = c$$

$$c = 0 \quad (\text{โดยที่ } \ln 1 = 0)$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะรายคือ $\frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \ln|\sin y| = 0$ ■

ตัวอย่าง 1.1.7 จงหาผลเฉลยเฉพาะรายของสมการเชิงอนุพันธ์ $x dx + y e^{-x} dy = 0$ และ $y(0) = 1$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

โดยการหารตลอดด้วย e^{-x} ได้ $\frac{x}{e^{-x}} dx + y dy = 0$

$$x e^x dx + y dy = 0$$

$$\int x e^x dx + \int y dy = c$$

$\int x e^x dx$ ใช้การอินทิเกรตแยกทีละส่วน (by part) ดังนี้

u	dv
+ x	e^x
- 1	e^x
+ 0	e^x

ดังนั้น $\int x e^x dx = x e^x - e^x + c$

นั่นคือ $x e^x - e^x + \frac{y^2}{2} = c$

เนื่องจาก $y(0) = 1$ ดังนั้น $(0)(e^0) - e^0 + \frac{1}{2} = c$

$$0 - 1 + \frac{1}{2} = c$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะรายคือ $x e^x - e^x + \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}$ ■

แบบฝึกหัด 1.1

จากข้อ 1 - 7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1. \quad 4xydx + (x^2 + 1)dy = 0$$

$$2. \quad (xy + x)dx - (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)dy = 0$$

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{x^3y + y}$$

$$4. \quad e^{y^2}dx + x^2ydy = 0$$

$$5. \quad (x - 4)y^4dx - x^3(y^2 - 3)dy = 0$$

$$6. \quad y \ln x \ln y dx + dy = 0$$

$$7. \quad \frac{dy}{dx} = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$$

จากข้อ 8 - 10 จงหาผลเฉลยเฉพาะรายของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$8. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y(1 + x^2)} \quad \text{เมื่อ } y(0) = 2$$

$$9. \quad \frac{dy}{dx} = xy^3(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{เมื่อ } y(0) = 1$$

$$10. \quad \sin^2 y dx + \cos^2 x dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.1

1. $2 \ln|x^2 + 1| + \ln|y| = c$

2. $\ln|x^2 + 1| = y^2 - 2y + 4 \ln|y + 1| + c$

3. $\frac{y^2}{2} = \frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + c$

4. $\frac{1}{x} - \frac{1}{2e^{y^2}} + c = 0$

5. $-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} = c$

6. $x \ln x + \ln|\ln y| = x + c$

7. $\frac{1}{2} \tan 2y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c$

8. $\frac{1}{2} y^2 = \ln|1 + x^2| + 2$

9. $-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1 + x^2} - \frac{3}{2}$

10. $\tan x \tan y = 1$

1.2 สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ (Homogeneous differential equations)

นิยาม 1.2.1 ฟังก์ชัน $f(x, y)$ จะเรียกว่าฟังก์ชันเอกพันธ์ (Homogeneous function) ระดับชั้น k ใน x และ y ที่ทำให้ $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ ทุกจำนวนจริง $t \neq 0$

จากนิยาม 1.2.1 แสดงว่าในการทดสอบฟังก์ชัน $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น k ใน x และ y หรือไม่นั้น ให้แทนค่า x และ y ในฟังก์ชัน $f(x, y)$ ด้วย tx และ ty ตามลำดับ ถ้า $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ แล้วเราจะสรุปว่า $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น k ใน x และ y

ตัวอย่าง 1.2.1 จงแสดงว่า $f(x, y) = x^2y + y^3$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 3

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{เพราะว่า } f(tx, ty) &= (tx)^2(ty) + (ty)^3 \\ &= t^3x^2y + t^3y^3 \\ &= t^3(x^2y + y^3) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x, y) = x^2y + y^3$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 3 ■

ตัวอย่าง 1.2.2 จงแสดงว่า $f(x, y) = xy - y + 2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{เพราะว่า } f(tx, ty) &= (tx)(ty) - ty + 2 \\ &= t^2xy - ty + 2 \\ &\neq t^2(xy - y + 2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x, y) = xy - y + 2$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ■

บทนิยาม 1.2.2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและระดับหนึ่ง $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ จะเรียกว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ ถ้า $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้นเท่ากัน

ตัวอย่างเช่น $(x - 2y)dx + (2x + y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ เนื่องจาก $M(x, y) = x - 2y$ และ $N(x, y) = 2x + y$ ต่างเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 1

$(x^2 - 3y^2)dx + 4xydy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ เนื่องจาก $M(x, y) = x^2 - 3y^2$ และ $N(x, y) = 4xy$ ต่างเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 2

$(y + xy)dx + xdy = 0$ ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์เนื่องจาก $M(x, y) = y + xy$ และ $N(x, y) = x$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้นเท่ากัน

จากนิยาม 1.2.1 เราอาจกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ ก็ต่อเมื่อเราสามารถจัดสมการนี้ให้อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} + \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = 0$

และมีฟังก์ชัน F บางฟังก์ชันที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ หรือ $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{x}{y}\right)$ ได้

ตัวอย่างเช่น $(y^2 + 2xy)dx - x^2 dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ เนื่องจากสมการนี้จัดได้ในรูปดังนี้

$$\text{โดยการหารตลอดด้วย } dx \text{ ได้ } (y^2 + 2xy) - x^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y^2 + 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

$$= \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= F\left(\frac{y}{x}\right)$$

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ เราใช้วิธีแปลง (transformation) สมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ โดยการเปลี่ยนตัวแปรให้ $y = vx$ หรือให้ $x = vy$ และจะได้ $dy = vdx + xdv$ หรือ $dx = vdy + ydv$ ตามลำดับ แล้วนำไปแทนค่าในสมการ จะได้สมการเป็นแบบแยกตัวแปรได้

ทฤษฎี 1.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ จะสามารถแปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้ด้วยการเปลี่ยนตัวแปร $y = vx$ หรือ $x = vy$

พิสูจน์ 1. กรณีการเปลี่ยนตัวแปร $y = vx$

$$\text{จาก } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$\text{หรือจัดในรูป } \frac{dy}{dx} + \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = 0$$

โดย $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ระดับชั้นเท่ากัน ดังนั้นทำให้

$$\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{ดังนั้นจึงได้ว่า } \frac{dy}{dx} + F\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

เปลี่ยนตัวแปร $y = vx$ จะได้

$$\frac{d}{dx}(vx) + F\left(\frac{vx}{x}\right) = 0$$

$$\left(v + x \frac{dv}{dx}\right) + F(v) = 0$$

และสามารถแยกตัวแปรได้ดังนี้

โดยคูณตลอดด้วย dx ได้ $vdx + xdv + F(v)dx = 0$

$$(v + F(v))dx + xdv = 0$$

โดยหารตลอดด้วย $x(v + F(v))$ ได้ $\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v + F(v)} = 0$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้ และสามารถอินทิเกรตตลอดสมการ แล้วแทนค่า

$v = \frac{y}{x}$ จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์

2. กรณีการเปลี่ยนตัวแปร $x = vy$

จาก $\frac{dy}{dx} + F\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

โดยคูณตลอดด้วย $\frac{dx}{dy}$ ได้ $1 + F\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dx}{dy} = 0$

เปลี่ยนตัวแปร $x = vy$ จะได้

$$1 + F\left(\frac{y}{vy}\right)\frac{d(vy)}{dy} = 0$$

$$1 + F\left(\frac{1}{v}\right)\left(v + y \frac{dv}{dy}\right) = 0$$

โดยคูณตลอดด้วย dy ได้ $dy + F\left(\frac{1}{v}\right)(vdy + ydv) = 0$

$$dy + vF\left(\frac{1}{v}\right)dy + yF\left(\frac{1}{v}\right)dv = 0$$

$$\left(1 + vF\left(\frac{1}{v}\right)\right)dy + yF\left(\frac{1}{v}\right)dv = 0$$

โดยหารตลอดด้วย $y\left(1 + vF\left(\frac{1}{v}\right)\right)$ ได้ $\frac{dy}{y} + \frac{dv}{1 + vF\left(\frac{1}{v}\right)} = 0$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้ และสามารถอินทิเกรตตลอดสมการ แล้วแทนค่า

$v = \frac{x}{y}$ จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์

ตัวอย่าง 1.2.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$

วิธีทำ $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์

เนื่องจาก $M(x, y) = x^2 - y^2$ และ $N(x, y) = 2xy$ ต่างเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 2

เปลี่ยนตัวแปรให้ $y = vx$ และ $dy = vdx + xdv$ แทนค่าในสมการได้

$$(x^2 - (vx)^2)dx + 2x(vx)(vdx + xdv) = 0$$

$$(x^2 - v^2x^2)dx + 2vx^2(vdx + xdv) = 0$$

$$(x^2 - v^2x^2)dx + 2v^2x^2dx + 2vx^3dv = 0$$

$$(x^2 - v^2x^2 + 2v^2x^2)dx + 2vx^3dv = 0$$

$$(x^2 + v^2x^2)dx + 2vx^3dv = 0$$

$$x^2(1 + v^2)dx + 2vx^3dv = 0$$

โดยการหารตลอดด้วย $x^3(1 + v^2)$ ได้

$$\frac{1}{x}dx + \frac{2v}{1 + v^2}dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2v}{1 + v^2}dv = c$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{d(1 + v^2)}{1 + v^2} = c$$

$$\ln|x| + \ln|1 + v^2| = c$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ ได้

$$\ln|x| + \ln\left|1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right| = c$$

$$\ln|x| + \ln\left|1 + \frac{y^2}{x^2}\right| = c$$

$$\ln|x| + \ln\left|\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right| = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\ln|x| + \ln\left|\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right| = c$ ■

หมายเหตุ จากผลเฉลยทั่วไปคือ $\ln|x| + \ln\left|\frac{x^2+y^2}{x^2}\right| = c$ อาจจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\ln\left|x\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)\right| = \ln|c_1| \quad \text{เมื่อ } \ln|c_1| = c$$

$$\ln\left|\frac{x^2+y^2}{x}\right| = \ln|c_1|$$

$$\frac{x^2+y^2}{x} = c_1$$

$$x^2+y^2 = c_1x$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $x^2+y^2 = c_1x$ ■

ตัวอย่าง 1.2.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(x^2+y^2)dx + (x^2-xy)dy = 0$

วิธีทำ $(x^2+y^2)dx + (x^2-xy)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์

เนื่องจาก $M(x,y) = x^2+y^2$ และ $N(x,y) = x^2-xy$ ต่างเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 2

เปลี่ยนตัวแปรให้ $y = vx$ และ $dy = vdx + xdv$ แทนค่าในสมการได้

$$(x^2+(vx)^2)dx + (x^2-x(vx))(vdx + xdv) = 0$$

$$(x^2+v^2x^2)dx + (x^2-vx^2)(vdx + xdv) = 0$$

$$(x^2+v^2x^2)dx + (x^2-vx^2)vdx + (x^2-vx^2)x dv = 0$$

$$(x^2+v^2x^2)dx + (vx^2-v^2x^2)dx + (x^3-vx^3)dv = 0$$

$$(x^2+v^2x^2+vx^2-v^2x^2)dx + (x^3-vx^3)dv = 0$$

$$(x^2+vx^2)dx + (x^3-vx^3)dv = 0$$

$$(1+v)x^2dx + (1-v)x^3dv = 0$$

โดยการหารตลอดด้วย $(1+v)x^3$ ได้

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1-v}{1+v}dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{1-v}{1+v}dv = c$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \left(-1 + \frac{2}{1+v}\right)dv = c$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int dv + \int \frac{2}{1+v} dv = c$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int dv + 2 \int \frac{d(1+v)}{1+v} = c$$

$$\ln|x| - v + 2 \ln|1+v| = c$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ ได้

$$\ln|x| - \frac{y}{x} + 2 \ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| = c$$

$$\ln|x| - \frac{y}{x} + 2 \ln\left|\frac{x+y}{x}\right| = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\ln|x| - \frac{y}{x} + 2 \ln\left|\frac{x+y}{x}\right| = c$ ■

ตัวอย่าง 1.2.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะรายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(1) = 0$$

วิธีทำ $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์

เนื่องจาก $M(x, y) = x^2 - xy + y^2$ และ $N(x, y) = -xy$ ต่างเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 2

เปลี่ยนตัวแปรให้ $y = vx$ และ $dy = vdx + xdv$ แทนค่าในสมการได้

$$(x^2 - x(vx) + (vx)^2)dx - x(vx)(vdx + xdv) = 0$$

$$(x^2 - vx^2 + v^2x^2)dx - v^2x^2dx - vx^3dv = 0$$

$$(x^2 - vx^2 + v^2x^2 - v^2x^2)dx - vx^3dv = 0$$

$$(x^2 - vx^2)dx - vx^3dv = 0$$

$$(1-v)x^2dx - vx^3dv = 0$$

โดยการหารตลอดด้วย $(1-v)x^3$ ได้

$$\frac{1}{x}dx - \frac{v}{1-v}dv = 0$$

$$\frac{1}{x}dx - \frac{v}{-(v-1)}dv = 0$$

$$\frac{1}{x}dx + \frac{v}{v-1}dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{v-1} dv = c$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \left(1 + \frac{1}{v-1} \right) dv = c$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int dv + \int \frac{1}{v-1} dv = c$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int dv + \int \frac{d(v-1)}{v-1} = c$$

$$\ln|x| + v + \ln|v-1| = c$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ ได้

$$\ln|x| + \frac{y}{x} + \ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| = c$$

$$\ln|x| + \frac{y}{x} + \ln\left|\frac{y-x}{x}\right| = c$$

$$\ln\left|x\left(\frac{y-x}{x}\right)\right| + \frac{y}{x} = c$$

$$\ln|y-x| + \frac{y}{x} = c$$

เนื่องจาก $y(1) = 0$ ดังนั้น $\ln|0-1| + \frac{0}{1} = c$

$$\ln 1 + 0 = c$$

$$c = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะรายคือ $\ln|y-x| + \frac{y}{x} = 0$ ■

ตัวอย่าง 1.2.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(2\sqrt{xy} - y)dx - xdy = 0$

วิธีทำ $(2\sqrt{xy} - y)dx - xdy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์

เนื่องจาก $M(x, y) = 2\sqrt{xy} - y$ และ $N(x, y) = -x$ ต่างเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 1

เปลี่ยนตัวแปรให้ $y = vx$ และ $dy = vdx + xdv$ แทนค่าในสมการได้

$$(2\sqrt{x(vx)} - vx)dx - x(vdx + xdv) = 0$$

$$(2\sqrt{vx^2} - vx)dx - vxdx - x^2dv = 0$$

$$(2x\sqrt{v} - vx - vx)dx - x^2dv = 0$$

$$(2x\sqrt{v} - 2vx)dx - x^2dv = 0$$

$$(2\sqrt{v} - 2v)xdx - x^2dv = 0$$

โดยการหารตลอดด้วย $(2\sqrt{v} - 2v)x^2$ ได้

$$\frac{1}{x}dx - \frac{1}{2\sqrt{v} - 2v}dv = 0$$

$$\frac{1}{x}dx - \frac{1}{2(\sqrt{v} - v)}dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{1}{2(\sqrt{v} - v)}dv = c$$

$$\ln|x| - \int \frac{1}{2(\sqrt{v} - v)}dv = c$$

พิจารณา $\int \frac{1}{2(\sqrt{v} - v)}dv$ ให้ $v = t^2$ ได้ $\sqrt{v} = t$ และ $dv = 2tdt$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \int \frac{1}{2(\sqrt{v} - v)}dv &= \int \frac{2t}{2(t - t^2)}dt \\ &= \int \frac{t}{t - t^2}dt \\ &= \int \frac{t}{t(1 - t)}dt \\ &= \int \frac{1}{1 - t}dt \\ &= -\int \frac{d(1 - t)}{1 - t} \\ &= -\ln|1 - t| + c \end{aligned}$$

แทนค่า $t = \sqrt{v}$ ได้ $\int \frac{1}{2(\sqrt{v}-v)} dv = -\ln|1-\sqrt{v}| + c$

จาก $\ln|x| - \int \frac{1}{2(\sqrt{v}-v)} dv = c$

ได้ $\ln|x| - \ln|1-\sqrt{v}| = c$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ ได้ $\ln|x| - \ln\left|1-\sqrt{\frac{y}{x}}\right| = c$

$$\ln|x| - \ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right| = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\ln|x| - \ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right| = c$ ■

ตัวอย่าง 1.2.5 จงหาผลเฉลยเฉพาะรายของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y}$ เมื่อ $y(1) = 0$

วิธีทำ จัดรูป $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y}$ ได้ดังนี้

โดยการคูณตลอดด้วย $(2x+y)dx$ ได้ $(2x+y)dy = -(4x+3y)dx$

$$(4x+3y)dx + (2x+y)dy = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์

เนื่องจาก $M(x, y) = 4x + 3y$ และ $N(x, y) = 2x + y$ ต่างเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 1

เปลี่ยนตัวแปรให้ $y = vx$ และ $dy = vdx + xdv$ แทนค่าในสมการได้

$$(4x + 3vx)dx + (2x + vx)(vdx + xdv) = 0$$

$$(4x + 3vx)dx + (2x + vx)dx + (2x + vx)x dv = 0$$

$$(4x + 3vx)dx + (2vx + v^2x)dx + (2x + vx)x dv = 0$$

$$(4x + 3vx + 2vx + v^2x)dx + (2+v)x^2 dv = 0$$

$$(4x + 5vx + v^2x)dx + (2+v)x^2 dv = 0$$

$$(4 + 5v + v^2)x dx + (2+v)x^2 dv = 0$$

โดยการหารตลอดด้วย $(4 + 5v + v^2)x^2$ ได้

$$\frac{1}{x} dx + \frac{2+v}{4+5v+v^2} dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v+2}{v^2+5v+4} dv = c$$

พิจารณา $\int \frac{v+2}{v^2+5v+4} dv$ โดยใช้การอินทิเกรตแบบแยกเศษส่วนย่อย

$$\begin{aligned} \text{ให้} \quad \frac{v+2}{v^2+5v+4} &= \frac{v+2}{(v+1)(v+4)} \\ &= \frac{A}{v+1} + \frac{B}{v+4} \end{aligned}$$

โดยการคูณตลอดด้วย $(v+1)(v+4)$ ได้

$$v+2 = A(v+4) + B(v+1)$$

แทนค่า $v = -1$ ได้ $1 = 3A + B(0)$

$$\text{ดังนั้น} \quad A = \frac{1}{3}$$

แทนค่า $v = -4$ ได้ $-2 = A(0) + B(-3)$

$$\text{ดังนั้น} \quad B = \frac{2}{3}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \frac{v+2}{v^2+5v+4} = \frac{1}{3(v+1)} + \frac{2}{3(v+4)}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \int \frac{v+2}{v^2+5v+4} dv &= \int \left(\frac{1}{3(v+1)} + \frac{2}{3(v+4)} \right) dv \\ &= \int \frac{1}{3(v+1)} dv + \int \frac{2}{3(v+4)} dv \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d(v+1)}{v+1} + \frac{2}{3} \int \frac{d(v+4)}{v+4} \\ &= \frac{1}{3} \ln|v+1| + \frac{2}{3} \ln|v+4| + c \end{aligned}$$

$$\text{จาก} \quad \int \frac{dx}{x} + \int \frac{v+2}{v^2+5v+4} dv = c$$

$$\text{ได้} \quad \ln|x| + \frac{1}{3} \ln|v+1| + \frac{2}{3} \ln|v+4| = c$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ ได้ $\ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + \frac{2}{3}\ln\left|\frac{y}{x} + 4\right| = c$

$$\ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{y+x}{x}\right| + \frac{2}{3}\ln\left|\frac{y+4x}{x}\right| = c$$

เนื่องจาก $y(1) = 0$ ดังนั้น $\ln|1| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+0}{1}\right| + \frac{2}{3}\ln\left|\frac{4+0}{1}\right| = c$

$$c = \frac{2}{3}\ln 4$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะรายคือ $\ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{y+x}{x}\right| + \frac{2}{3}\ln\left|\frac{y+4x}{x}\right| = \frac{2}{3}\ln 4$ ■

ตัวอย่าง 1.2.6 จงหาผลเฉลยเฉพาะรายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0 \text{ เมื่อ } y(1) = 0$$

วิธีทำ $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์

เนื่องจาก $M(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ และ $N(x, y) = -x^2$ ต่างเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 2

เปลี่ยนตัวแปรให้ $y = vx$ และ $dy = vdx + xdv$ แทนค่าในสมการได้

$$(x^2 + 3x(vx) + (vx)^2)dx - x^2(vdx + xdv) = 0$$

$$(x^2 + 3vx^2 + v^2x^2)dx - vx^2dx - x^3dv = 0$$

$$(x^2 + 3vx^2 + v^2x^2 - vx^2)dx - x^3dv = 0$$

$$(x^2 + 2vx^2 + v^2x^2)dx - x^3dv = 0$$

$$(1 + 2v + v^2)x^2dx - x^3dv = 0$$

$$(v^2 + 2v + 1)x^2dx - x^3dv = 0$$

โดยการหารตลอดด้วย $(v^2 + 2v + 1)x^3$ ได้

$$\frac{1}{x}dx - \frac{1}{v^2 + 2v + 1}dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{1}{v^2 + 2v + 1}dv = c$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{1}{(v+1)^2} dv = c$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int (v+1)^{-2} dv = c$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int (v+1)^{-2} d(v+1) = c$$

$$\ln|x| - \frac{(v+1)^{-1}}{(-1)} = c$$

$$\ln|x| + \frac{1}{v+1} = c$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ ได้ $\ln|x| + \frac{1}{\frac{y}{x} + 1} = c$

$$\ln|x| + \frac{x}{y+x} = c$$

เนื่องจาก $y(1) = 0$ ดังนั้น $\ln 1 + 1 = c$

$$c = 1$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะรายคือ $\ln|x| + \frac{x}{y+x} = 1$ ■

แบบฝึกหัด 1.2

จากข้อ 1 - 2 จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ถ้าเป็นจงบอกระดับชั้นด้วย

$$1. f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2$$

$$2. f(x, y) = \frac{x^2 + 3xy}{x - 2y^2}$$

จากข้อ 3 - 7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$3. (2xy + 3y^2)dx - (2xy + x^2)dy = 0$$

$$4. x^2 \frac{dy}{dx} = 4x^2 + 7xy + 2y^2$$

$$5. y^2 dx - (xy - x^2)dy = 0$$

$$6. 2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

$$7. (x^2 + 3y^2)dx - 2xydy = 0$$

จากข้อ 8 - 10 จงหาผลเฉลยเฉพาะรายของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$8. 2xydx - (3x^2 - 2y^2)dy = 0 \text{ เมื่อ } y(0) = -1$$

$$9. (2x - 5y)dx + (4x - y)dy = 0 \text{ เมื่อ } y(1) = 4$$

$$10. (y^2 + xy)dx = x^2 dy \text{ เมื่อ } y(1) = 1$$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.2

1. เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 2

2. ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

3. $x^3 = c(y^2 + xy)$

4. $y + x = cx^2(y + 2x)$

5. $-\frac{y}{x} + \ln|y| = c$

6. $y^3 + 3yx^2 = c$

7. $x^3 = c(x^2 + y^2)$

8. $x^2 = 2y^2(y + 1)$

9. $(2x + y)^2 = 12x^2(y - x)$

10. $\ln|x| = 1 - \frac{x}{y}$

1.3 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง (Exact differential equations)

นิยาม 1.3.1 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ จะเรียกว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงได้ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $F(x, y)$ บางฟังก์ชันที่ทำให้ $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ เป็นผลต่างอนุพันธ์แม่นตรง (Exact differential) ของ $F(x, y)$ นั่นคือ

$$d(F(x, y)) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

จากนิยามนี้สังเกตว่า $d(F(x, y)) = 0$

และเมื่อทำการอินทิเกรตแล้ว $\int d(F(x, y)) = c$

ได้ $F(x, y) = c$

ซึ่งเป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

ตัวอย่างเช่น สมการ $2xydx + x^2dy = 0$ เป็นสมการอนุพันธ์แบบแม่นตรง เพราะสามารถหาฟังก์ชัน $F(x, y) = x^2y$ ที่ทำให้ $d(x^2y) = 2xydx + x^2dy$ ได้

ดังนั้นได้ $d(x^2y) = 0$

$$\int d(x^2y) = c$$

$$x^2y = c$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $2xydx + x^2dy = 0$

สมการ $3x^2y^2dx + 2x^3ydy = 0$ เป็นสมการอนุพันธ์แบบแม่นตรง เพราะสามารถหาฟังก์ชัน $F(x, y) = x^3y^2$ ได้ที่ทำให้ $d(x^3y^2) = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy$

ดังนั้นจึงได้ $d(x^3y^2) = 0$

$$\int d(x^3y^2) = c$$

$$x^3y^2 = c$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $3x^2y^2dx + 2x^3ydy = 0$

การหา ฟังก์ชัน $F(x, y)$ ที่ทำให้ $d(F(x, y)) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ เมื่อ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง พิจารณาได้โดยเริ่มด้วยการทดสอบการเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง แล้วตามด้วยขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงดังนี้

1. การทดสอบการเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

ทฤษฎี 1.3.1 ให้ $M(x, y), N(x, y), \frac{\partial M}{\partial y}$ และ $\frac{\partial N}{\partial x}$ ต่างเป็นฟังก์ชันของ x และ y

1. ถ้าสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงแล้วจะได้ว่า
จะได้ว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

พิสูจน์ เนื่องจากสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง
จากนิยามจะได้ว่า มีฟังก์ชัน $F(x, y)$ บางฟังก์ชันของ x และ y ที่ทำให้

$$d(F(x, y)) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

จากผลต่างอนุพันธ์รวมจะได้ว่า

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

ดังนั้นจะได้ $M(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$ และ $N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$

และได้ว่า $\frac{\partial}{\partial y}M(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$ และ $\frac{\partial}{\partial x}N(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$

เนื่องจาก $\frac{\partial M}{\partial y}$ และ $\frac{\partial N}{\partial x}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้น $\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$

นั่นคือ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

2. ถ้า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ แล้วจะได้ว่าสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์
แบบแม่นตรง

พิสูจน์ เนื่องจากสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

กำหนดให้ $U(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติว่า $\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) = M(x, y)$

นั่นคือฟังก์ชัน $U(x, y)$ เป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการอินทิเกรตย่อย (Partial integration) M เทียบ
กับ x ในขณะที่ y คงที่

และจะได้ว่า $\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$

เนื่องจากกำหนดว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

แต่เนื่องจาก $\frac{\partial M}{\partial y}$ และ $\frac{\partial N}{\partial x}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องกันคือ $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

อินทิเกรตย่อยเทียบกับ x โดยถือว่า y เป็นค่าคงที่ จะได้

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y) + B'(y)$$

ดังนั้นจึงสามารถกำหนดฟังก์ชัน $F(x, y)$ ได้ดังนี้

$$F(x, y) = U(x, y) - B(y)$$

ทำให้

$$\begin{aligned} dF(x, y) &= dU(x, y) - dB(y) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy - B'(y) dy \\ &= M(x, y) dx + (N(x, y) + B'(y)) dy - B'(y) dy \\ &= M(x, y) dx + N(x, y) dy + B'(y) dy - B'(y) dy \\ &= M(x, y) dx + N(x, y) dy \end{aligned}$$

ดังนั้นจากนิยาม 1.3.1 สรุปได้ว่า สมการ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

ตัวอย่าง 1.3.1 จงพิจารณาว่าสมการ $(2x^2 - xy^2 - 2y + 3)dx - (x^2y + 2x)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงหรือไม่

วิธีทำ จากสมการ $(2x^2 - xy^2 - 2y + 3)dx - (x^2y + 2x)dy = 0$ ได้ว่า

$$M(x, y) = 2x^2 - xy^2 - 2y + 3 \text{ และ } N(x, y) = -(x^2y + 2x) = -x^2y - 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy - 2 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy - 2$$

$$\text{ได้ว่า } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้น สมการ $(2x^2 - xy^2 - 2y + 3)dx - (x^2y + 2x)dy = 0$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ■

ตัวอย่าง 1.3.2 จงพิจารณาว่าสมการ $(2y - 4xy^2)dx + (2x - 3x^2y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงหรือไม่

วิธีทำ จากสมการ $(2y - 4xy^2)dx + (2x - 3x^2y)dy = 0$ ได้ว่า

$$M(x, y) = 2y - 4xy^2 \text{ และ } N(x, y) = 2x - 3x^2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 - 8xy \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 - 6xy$$

ได้ว่า $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

ดังนั้น สมการ $(2y - 4xy^2)dx + (2x - 3x^2y)dy = 0$ ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ■

2. การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง มีขั้นตอนดังนี้

1. ทดสอบดูว่าสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงหรือไม่นั้น โดยการพิจารณาว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ หรือไม่

ถ้า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ แล้ว $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบ

แม่นตรง

แต่ถ้า $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ แล้ว $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ จึงไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์

แบบแม่นตรง

2. ถ้าสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงให้ดำเนินการหาผลเฉลยต่อไป ซึ่งแบ่งเป็น 2 วิธีดังนี้

วิธีที่ 1 วิธีแบบมาตรฐาน (Standard method)

จากสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ จะมี $F(x, y) = c$ เป็นผลเฉลยทั่วไป แสดงว่า

$$d(F(x, y)) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

นั่นคือ $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$

และ $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ dx ได้ $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$

$$\partial F = M(x, y) \partial x$$

แล้วทำการอินทิเกรตย่อยเทียบกับ x โดยถือว่า y เป็นค่าคงตัว ดังนั้นค่าคงที่ของการอินทิเกรตจึงเป็น $g(y)$ แทนที่จะเป็น c ดังนี้

$$\begin{aligned} \int \partial F &= \int M(x, y) \partial x + g(y) \\ F(x, y) &= \int M(x, y) \partial x + g(y) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ในทำนองเดียวกันเทียบสัมประสิทธิ์ของ dy ได้ $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$

$$\partial F = N(x, y) \partial y$$

แล้วทำการอินทิเกรตย่อยเทียบกับ y โดยถือว่า x เป็นค่าคงตัว ดังนั้นค่าคงที่ของการอินทิเกรตจึงเป็น $h(x)$ แทนที่จะเป็น c ดังนี้

$$F(x, y) = \int N(x, y) \partial y + h(x) \quad \dots\dots\dots(2)$$

จาก (1) ได้ว่า $F(x, y)$ ขาดพจน์ y บางส่วน พร้อมด้วยค่าคงที่ c_1

จาก (2) ได้ว่า $F(x, y)$ ขาดพจน์ x บางส่วน พร้อมด้วยค่าคงที่ c_2

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปที่สมบูรณ์จะต้องนำฟังก์ชันของสมการ (1) และ (2) มารวมกันโดยมีหลักการดังนี้

1. ถ้าพจน์ในฟังก์ชันทั้งสองเหมือนกัน พจน์ต่อพจน์ ให้ลอกมาพจน์พจน์
2. ลอกพจน์ไม่เหมือนกันลงให้หมด

ตัวอย่างเช่น $F(x, y) = x^2 + y + 2y^2 - 3 + g(y)$

$$F(x, y) = x^2 + y - 5y^2 + 5 + h(x)$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $x^2 + y + 2y^2 - 5y^2 - 3 + 5 + c_1 + c_2 = 0$

$$x^2 + y - 3y^2 + 2 + c_1 + c_2 = 0$$

$$x^2 + y - 3y^2 + 2 = -c_1 - c_2$$

$$x^2 + y - 3y^2 + 2 = c \quad \text{โดยที่ } c = -c_1 - c_2$$

ตัวอย่าง 1.3.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(3x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

วิธีทำ $M(x, y) = 3x^2 + y^2$ และ $N(x, y) = 2xy$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0 + 2y = 2y$$

และ $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = y \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2y$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

จาก $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = 3x^2 + y^2$

$$\partial F = (3x^2 + y^2)dx$$

$$\int \partial F = \int (3x^2 + y^2)dx = \int 3x^2 dx + \int y^2 dx = 3 \int x^2 dx + y^2 \int dx$$

$$F(x, y) = x^3 + xy^2 + g(y) \quad \dots\dots\dots(1)$$

และจาก $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = 2xy$

$$\partial F = 2xy dy$$

$$\int \partial F = \int 2xy dy = 2x \int y dy$$

$$F(x, y) = xy^2 + h(x) \quad \dots\dots\dots(2)$$

จาก (1) และ (2) ได้ผลเฉลยทั่วไปคือ $x^3 + xy^2 = c$ ■

ตัวอย่าง 1.3.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(3x^2 + 4xy^2)dx + (2y - 3y^2 + 4x^2y)dy = 0$$

วิธีทำ $M(x, y) = 3x^2 + 4xy^2$ และ $N(x, y) = 2y - 3y^2 + 4x^2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 4xy^2) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2) + 4x \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0 + 8xy = 8xy$$

และ $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2y - 3y^2 + 4x^2y) = \frac{\partial}{\partial x}(2y) - \frac{\partial}{\partial x}(3y^2) + 4y \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 8xy$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

จาก $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = 3x^2 + 4xy^2$

$$\partial F = (3x^2 + 4xy^2)dx$$

$$\int \partial F = \int (3x^2 + 4xy^2)dx = \int 3x^2 dx + 4y^2 \int x dx$$

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2y^2 + g(y) \quad \dots\dots\dots(1)$$

และจาก $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = 2y - 3y^2 + 4x^2y$

$$\begin{aligned}\partial F &= (2y - 3y^2 + 4x^2y) \partial y \\ \int \partial F &= \int (2y - 3y^2 + 4x^2y) \partial y = \int 2y \partial y - \int 3y^2 \partial y + 4x^2 \int y \partial y \\ F(x, y) &= y^2 - y^3 + 2x^2y^2 + h(x) \quad \dots\dots\dots(2)\end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) ได้ผลเฉลยทั่วไปคือ $x^3 + 2x^2y^2 + y^2 - y^3 = c$ ■

ตัวอย่าง 1.3.5 จงหาผลเฉลยเฉพาะรายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2x \cos y + 3x^2y) + (x^3 - x^2 \sin y - y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{เมื่อ } y(2) = 0$$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่เป็น $(2x \cos y + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2 \sin y - y)dy = 0$

$$\begin{aligned}M(x, y) &= 2x \cos y + 3x^2y \quad \text{และ} \quad N(x, y) = x^3 - x^2 \sin y - y \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (2x \cos y + 3x^2y) = \frac{\partial}{\partial y} (2x \cos y) + \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y) \\ &= 2x \frac{\partial}{\partial y} (\cos y) + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y} (y) = -2x \sin y + 3x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ} \quad \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^3 - x^2 \sin y - y) = \frac{\partial}{\partial x} (x^3) - \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \sin y) - \frac{\partial}{\partial x} (y) \\ &= 3x^2 - \sin y \frac{\partial}{\partial x} (x^2) - 0 = 3x^2 - 2x \sin y\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

$$\begin{aligned}\text{จาก} \quad \frac{\partial F}{\partial x} &= M(x, y) = 2x \cos y + 3x^2y \\ \partial F &= (2x \cos y + 3x^2y) \partial x \\ \int \partial F &= \int (2x \cos y + 3x^2y) \partial x = \int 2x \cos y \partial x + \int 3x^2y \partial x \\ &= 2 \cos y \int x \partial x + 3y \int x^2 \partial x \\ F(x, y) &= x^2 \cos y + x^3y + g(y) \quad \dots\dots\dots(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และจาก} \quad \frac{\partial F}{\partial y} &= N(x, y) = x^3 - x^2 \sin y - y \\ \partial F &= (x^3 - x^2 \sin y - y) \partial y \\ \int \partial F &= \int (x^3 - x^2 \sin y - y) \partial y = \int x^3 \partial y - \int x^2 \sin y \partial y - \int y \partial y \\ &= x^3 \int \partial y - x^2 \int \sin y \partial y - \int y \partial y\end{aligned}$$

$$F(x, y) = x^3 y + x^2 \cos y - \frac{y^2}{2} + h(x) \quad \dots\dots\dots(2)$$

จาก (1) และ (2) ได้ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$x^3 y + x^2 \cos y - \frac{y^2}{2} = c$$

และจาก $y(2) = 0$ ได้ $0 + 4 \cos 0 - \frac{0}{2} = c$ นั่นคือ $c = 4$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะรายคือ $x^3 y + x^2 \cos y - \frac{y^2}{2} = 4$ ■

ตัวอย่าง 1.3.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(\cos x \sin x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$$

วิธีทำ $M(x, y) = \cos x \sin x - xy^2$ และ $N(x, y) = y(1 - x^2) = y - yx^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\cos x \sin x - xy^2) = \frac{\partial}{\partial y}(\cos x \sin x) - x \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \\ &= 0 - 2xy = -2xy \end{aligned}$$

$$\text{และ } \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y - yx^2) = \frac{\partial}{\partial x}(y) - y \frac{\partial}{\partial x}(x^2)$$

$$\text{และ } = 0 - 2xy = -2xy$$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

$$\text{จาก } \frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = \cos x \sin x - xy^2$$

$$\partial F = (\cos x \sin x - xy^2)dx$$

$$\begin{aligned} \int \partial F &= \int (\cos x \sin x - xy^2)dx = \int \cos x \sin x dx - y^2 \int x dx \\ &= \int \sin x d(\sin x) - y^2 \int x dx \end{aligned}$$

$$F(x, y) = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + g(y) \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{และจาก } \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = y - yx^2$$

$$\partial F = (y - yx^2)dy$$

$$\int \partial F = \int (y - yx^2)dy = \int y dy - x^2 \int y dy$$

$$F(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + h(x) \quad \dots\dots\dots(2)$$

จาก (1) และ (2) ได้ผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$ ■

ตัวอย่าง 1.3.7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(y \sec^2 x + \sec x \tan x) dx + (\tan x + 2y) dy = 0$$

วิธีทำ $M(x, y) = y \sec^2 x + \sec x \tan x$ และ $N(x, y) = \tan x + 2y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (y \sec^2 x + \sec x \tan x) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (y \sec^2 x) - \frac{\partial}{\partial y} (\sec x \tan x) \\ &= \sec^2 x \frac{\partial}{\partial y} (y) - 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sec^2 x \\ \text{และ} \quad \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\tan x + 2y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\tan x) - \frac{\partial}{\partial x} (2y) \\ &= \sec^2 x - 0 \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad \frac{\partial F}{\partial x} &= M(x, y) = y \sec^2 x + \sec x \tan x \\ \partial F &= (y \sec^2 x + \sec x \tan x) dx \\ \int \partial F &= \int (y \sec^2 x + \sec x \tan x) dx \\ &= \int y \sec^2 x dx + \int \sec x \tan x dx \\ &= y \int \sec^2 x dx + y \int \sec x \tan x dx \\ F(x, y) &= y \tan x + \sec x + g(y) \quad \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และจาก} \quad \frac{\partial F}{\partial y} &= N(x, y) = \tan x + 2y \\ \partial F &= (\tan x + 2y) dy \\ \int \partial F &= \int (\tan x + 2y) dy = \int \tan x dy + \int 2y dy \\ &= \tan x \int dy + \int 2y dy \\ F(x, y) &= y \tan x + y^2 + h(x) \quad \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) ได้ผลเฉลยทั่วไปคือ $y \tan x + \sec x + y^2 = c$ ■

วิธีที่ 2 วิธีการจัดกลุ่มใหม่ (Regrouping method)

วิธีการจัดกลุ่มใหม่นี้ เป็นวิธีที่หาฟังก์ชัน $F(x, y)$ บางฟังก์ชัน โดยที่กลุ่มของพจน์ซึ่งจัดใหม่นั้นจะเป็นผลต่างอนุพันธ์รวมแบบแม่นยำตรงของฟังก์ชันดังกล่าวดังนี้

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

จัดกลุ่มใหม่หาฟังก์ชัน $F(x, y)$ โดยที่ $d(F(x, y)) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$

$$d(F(x, y)) = 0$$

$$\int d(F(x, y)) = c$$

ได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $F(x, y) = c$

วิธีการจัดกลุ่มใหม่นี้เริ่มด้วยการกระจายสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าว แล้วพิจารณาพจน์ของอนุพันธ์ที่จัดกลุ่มใหม่ โดยพิจารณาได้ดังนี้

1. ถ้ามีพจน์ของ dx มีตัวแปร y หรือมีทั้ง x และ y และพจน์ของ dy มีตัวแปร x หรือมีทั้ง x และ y ให้จัดพจน์เหล่านี้รวมกันเป็นกลุ่มใหม่ จากนั้นแล้วหาฟังก์ชัน $F(x, y)$ บางฟังก์ชัน โดยที่กลุ่มของพจน์ที่รวมกันจัดใหม่นั้นจะเป็นผลต่างอนุพันธ์รวมของ $F(x, y)$ หรือ $d(F(x, y))$ นั่นเอง

ตัวอย่างเช่น $3x^2ydx + x^3dy$ ซึ่งรวมกลุ่มกันแล้วจะได้เป็นผลต่างอนุพันธ์รวมของ $F(x, y)$ โดยที่ $F(x, y) = x^3y$ นั่นเอง

$ydx + xdy$ ซึ่งรวมกลุ่มกันแล้วจะได้เป็นผลต่างอนุพันธ์รวม $F(x, y)$ โดยที่ $F(x, y) = xy$ นั่นเอง

2. ควรจะต้องหาผลต่างอนุพันธ์รวมย้อนกลับว่าได้พจน์ดังกล่าวหรือไม่ นั่นคือการหาค่าของ $d(F(x, y))$ นั่นเอง เพราะบางกรณีอาจจะต้องใช้ค่าคงที่คูณหรือหารเข้าไปใน $F(x, y)$ เพื่อจะทำให้ผลต่างอนุพันธ์รวมเท่ากับพจน์ที่จัดรวมเป็นกลุ่มใหม่

ตัวอย่างเช่น $xy^2dx + x^2ydy$ ซึ่งรวมกลุ่มกัน หากพิจารณาว่าน่าจะเป็นผลต่างอนุพันธ์รวมของ $F(x, y) = x^2y^2$ นั้น แต่เมื่อนำมาหาค่าของ $d(F(x, y))$ จะได้ $d(x^2y^2) = 2xy^2dx + 2x^2ydy$ ซึ่งไม่เท่ากับ $xy^2dx + x^2ydy$ ดังนั้นจะต้องนำ 2 เข้าไปหาร จะได้ $F(x, y) = \frac{x^2y^2}{2}$ และถ้าหาค่าของ $d(F(x, y))$ ใหม่ จะได้ผลต่างอนุพันธ์รวมที่เท่ากัน นั่นคือ $d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right) = xy^2dx + x^2ydy$

3. ถ้ามีพจน์ของ dx มีตัวแปรเฉพาะ x เพียงตัวแปรเดียวหรือมีเฉพาะค่าคงที่ และพจน์ของ dy มีตัวแปรเฉพาะ y เพียงตัวแปรเดียวหรือมีเฉพาะค่าคงที่ ไม่ต้องจัดพจน์เหล่านี้รวมกันเป็นกลุ่มใหม่ เพราะพจน์เหล่านี้สามารถทำการอินทิเกรตได้ผลเฉลยทันที

ตัวอย่างเช่น $3x dx + 2dy$ ไม่ต้องจัดรวมเป็นกลุ่มใหม่กัน

จากตัวอย่าง 1.3.3 สมการเชิงอนุพันธ์ $(3x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$ ได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $x^3 + xy^2 = c$ ถ้าหากใช้วิธีการจัดกลุ่มใหม่ดำเนินการดังนี้

$$M(x, y) = 3x^2 + y^2 \text{ และ } N(x, y) = 2xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0 + 2y = 2y$$

$$\text{และ } \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = y \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2y$$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

$$\text{กระจายสมการได้ } 3x^2 dx + y^2 dx + 2xydy = 0$$

$$\text{จัดกลุ่มใหม่ได้ } 3x^2 dx + (y^2 dx + 2xydy) = 0$$

$$3x^2 dx + d(xy^2) = 0$$

$$\int 3x^2 dx + \int d(xy^2) = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $x^3 + xy^2 = c$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปที่ได้เท่ากับวิธีที่ 1

ตัวอย่าง 1.3.8 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2x^2 - xy^2 - 2y + 3)dx - (x^2y + 2x)dy = 0$$

วิธีทำ $M(x, y) = 2x^2 - xy^2 - 2y + 3$ และ $N(x, y) = -(x^2y + 2x) = -x^2y - 2x$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 - xy^2 - 2y + 3) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^2) - x \frac{\partial}{\partial y}(y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial y}(3) \\ &= 0 - 2xy - 2 + 0 \\ &= -2xy - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(-x^2y - 2x) \\ &= -y \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(2x) \\ &= -2xy - 2\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

$$\text{กระจายสมการได้} \quad 2x^2dx - xy^2dx - 2ydx + 3dx - x^2ydy - 2xdy = 0$$

$$\text{จัดกลุ่มใหม่ได้} \quad 2x^2dx + 3dx - (xy^2dx + x^2ydy) - (2ydx + 2xdy) = 0$$

$$2x^2dx + 3dx - d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right) - d(2xy) = 0$$

$$\int 2x^2dx + \int 3dx - \int d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right) - \int d(2xy) = c$$

$$\text{ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ } \frac{2x^3}{3} + 3x - \frac{x^2y^2}{2} - 2xy = c \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.3.9 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(3x^2 - 2y + e^{x+y})dx + (e^{x+y} - 2x + 4)dy = 0$$

วิธีทำ $M(x, y) = 3x^2 - 2y + e^{x+y}$ และ $N(x, y) = e^{x+y} - 2x + 4$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2y + e^{x+y}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+y}) \\ &= 0 - 2 + e^{x+y} \frac{\partial}{\partial y}(x+y) \\ &= -2 + e^{x+y} \left(\frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) \right) \\ &= -2 + e^{x+y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y} - 2x + 4) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y}) - \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial x}(4) \\ &= e^{x+y} \frac{\partial}{\partial x}(x+y) - 2 + 0 \\ &= e^{x+y} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}(y) \right) - 2 \\ &= e^{x+y} - 2\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

$$\text{กระจายสมการได้ } 3x^2 dx - 2y dx + e^{x+y} dx + e^{x+y} dy - 2x dy + 4dy = 0$$

$$\text{จัดกลุ่มใหม่ได้ } 3x^2 dx + 4dy - (2y dx + 2x dy) + (e^{x+y} dx + e^{x+y} dy) = 0$$

$$3x^2 dx + 4dy - d(2xy) + d(e^{x+y}) = 0$$

$$\int 3x^2 dx + \int 4dy - \int d(2xy) + \int d(e^{x+y}) = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ $x^3 + 4y - 2xy + e^{x+y} = c$ ■

ตัวอย่าง 1.3.10 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\left[y \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \cos y \right] dx + (x + \ln x - x \sin y) dy = 0$$

วิธีทำ $M(x, y) = y \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \cos y = y + \frac{y}{x} + \cos y$

และ $N(x, y) = x + \ln x - x \sin y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(y + \frac{y}{x} + \cos y \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (y) - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial y} (y) + \frac{\partial}{\partial y} (\cos y) \\ &= 1 + \frac{1}{x} - \sin y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x + \ln x - x \sin y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x) + \frac{\partial}{\partial x} (\ln x) - \sin y \frac{\partial}{\partial x} (x) \\ &= 1 + \frac{1}{x} - \sin y \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

กระจายสมการได้ $y dx + \frac{y}{x} dx + \cos y dx + x dy + \ln x dy - x \sin y dy = 0$

จัดกลุ่มใหม่ได้ $(y dx + x dy) + \left(\frac{y}{x} dx + \ln x dy \right) + (\cos y dx - x \sin y dy) = 0$

$$d(xy) + d(y \ln x) + d(x \cos y) = 0$$

$$\int d(xy) + \int d(y \ln x) + \int d(x \cos y) = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ $xy + y \ln x + x \cos y = c$ ■

แบบฝึกหัด 1.3

จากข้อ 1 – 2 จงพิจารณาว่าสมการต่อไปนี้ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงหรือไม่

$$1. \quad (3x^4y^2 - x^2)dx + (4x^3y^3 - 2xy)dy = 0$$

$$2. \quad \sin x \cos y dx + \sin y \cos x dy = 0$$

จากข้อ 3 – 7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$3. \quad (2xy - 3x^2)dx + (x^2 + y)dy = 0$$

$$4. \quad (x + y \cos x)dx + \sin x dy = 0$$

$$5. \quad (2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6. \quad \left(\frac{y}{x} + 6x\right)dx + (\ln|x| - 2)dy = 0$$

$$7. \quad \sin y dx + (x + 2 \sin y) \cos y dy = 0$$

จากข้อ 8 - 10 จงหาผลเฉลยเฉพาะรายของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$8. \quad 3y(x^2 - 1)dx + (x^3 + 8y - 3x)dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(0) = 1$$

$$9. \quad (3x^2y^2 - y^3 + 2x)dx + (2x^3y - 3xy^2 + 1)dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(-2) = 1$$

$$10. \quad (2y \sin x \cos x + y^2 \sin x) + (\sin^2 x - 2y \cos x)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{เมื่อ } y(0) = 3$$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.3

1. ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

2. เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

3. $x^2 y - x^3 + \frac{y^2}{2} = c$

4. $\frac{x^2}{2} + y \sin x = c$

5. $x^2 y^2 + 2xy = c$

6. $y \ln|x| + 3x^2 - 2y = c$

7. $x \sin y + \sin^2 y = c$

8. $x^3 y - 3xy + 4y^2 = 4$

9. $x^3 y^2 - xy^3 + x^2 + y = -1$

10. $y \sin^2 x - y^2 \cos x = -9$

บรรณานุกรม

Anton, H., Bivens I., and Davis, S. (2002). **Calculus** . Seventh Edition. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Ayres, F.J. (1981). **Calculus**. McGraw-Hill Book Company.

Faires, J.D. and Burden, L.R. (1993). **Numerical Methods**. PWS Publishing Company, Boston.

Kreyszig, E. (1988). **Advanced Engineering Mathematics**. Sixth Edition. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Spiegel, M.R. (1983). **Advanced Mathematics for Engineers & Scientists**. McGraw-Hill Book Company.

William, E.B. and Richard, C.D. (1986). **Elementary Differential Equations**. John Wiley & Sons, Inc., New York.

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2528). **แคลคูลัส**
ชั้นปีที่ 2 เล่มที่ 2. กรุงเทพมหานคร : พิกษ์การพิมพ์

จินดา อาริยะกุล. (2538). **Integrals และการประยุกต์**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล. พิมพ์ครั้งที่ 7. กรุงเทพมหานคร : พิกษ์การพิมพ์.

ชนศักดิ์ ป้ายเที่ยง. (2530). **อนุกรมอนันต์**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

ดำรง ทิพย์โยธา. (2541). **การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เล่ม 1**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

แผนกวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีการเกษตร มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล
ล้านนา. (2553). แคลคูลัส 3 สำหรับวิศวกร. เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล
ล้านนา.

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. (2542). แคลคูลัสสำหรับ
วิศวกรรมศาสตร์ 2. เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. (2543). แคลคูลัสสำหรับ
วิศวกรรมศาสตร์ 3. เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี. (2540).
คณิตศาสตร์พื้นฐาน. กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2540). ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน. พิมพ์ครั้งที่ 7 กรุงเทพมหานคร :
โรงพิมพ์มหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย.

อนัญญา อภิชาติบุตร. (2537). แคลคูลัส เล่มที่ 2. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

อรุณี เจริญราช. (2538). แคลคูลัส เล่ม 3. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

ประวัติผู้ปฏิบัติงาน

รองศาสตราจารย์ ดร. ชัยศักดิ์ อุรจนานนท์

ประวัติการศึกษา

- ชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 (ป.7) โรงเรียนพลวิทยา
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 (ม.ศ.3) โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
ประกาศนียบัตรวิชาการศึกษา (ปกศ.) วิทยาลัยครูสงขลา
การศึกษบัณฑิต (กศ.บ. เกียรตินิยมอันดับหนึ่ง)
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตสงขลา
ปีการศึกษา 2521-2524
ศึกษาศาสตรบัณฑิต (ศศ.บ.)
มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช ปีการศึกษา 2531-2533
ครุศาสตรมหาบัณฑิต (ค.ม.) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2529-2530
ศึกษาศาสตรดุษฎีบัณฑิต (ศษ.ด.) มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ปีการศึกษา 2548-2552

ตำแหน่ง

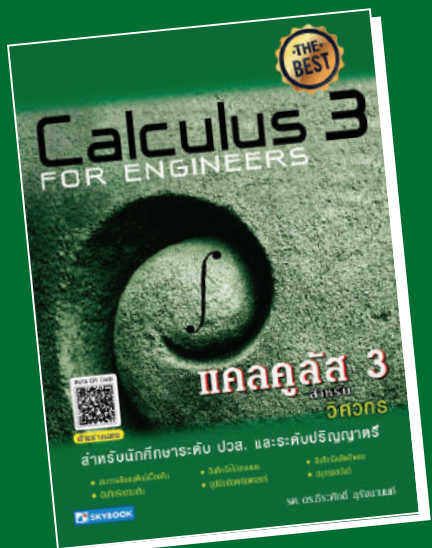
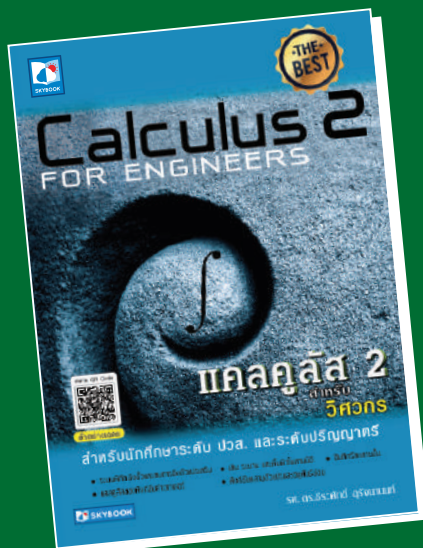
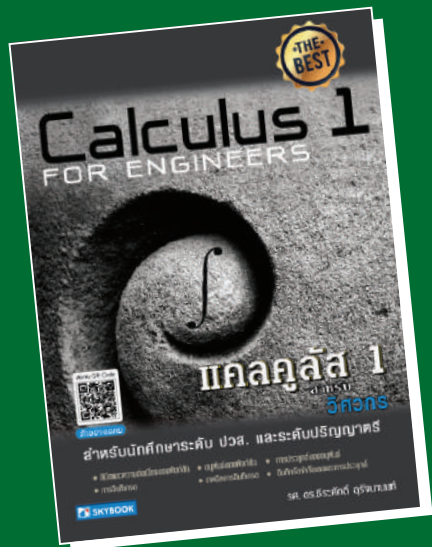
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ระดับ 6 ปีการศึกษา 2537
รองศาสตราจารย์ ระดับ 7 ปีการศึกษา 2540
รองศาสตราจารย์ ระดับ 8 ปีการศึกษา 2542
รองศาสตราจารย์ ระดับ 9 ปีการศึกษา 2545

สถานที่ทำงาน

- มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา เชียงใหม่

ตำรา

- ความน่าจะเป็นและสถิติประยุกต์ เล่ม 1
ความน่าจะเป็นและสถิติประยุกต์ เล่ม 2
อินทิกรัล
สมการเชิงอนุพันธ์
แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร
แคลคูลัส 2 สำหรับวิศวกร
แคลคูลัส 3 สำหรับวิศวกร



จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย



บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
SKYBOOK COMPANY LIMITED
 28, 30, 32 ซอยรังสิต-ปทุมธานี 16 ซอย 7
 ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
 โทรศัพท์ 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร 0-2567-5105
www.skybook.co.th e-mail: sales@skybook.co.th

e-book

หมวด คณิตศาสตร์
 แคลคูลัส 3 สำหรับวิศวกร

ISBN : 978-616-213-926-0



9 786162 139260

ราคา 408 บาท