สรุปคณิต

ม.4

วิธีบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต

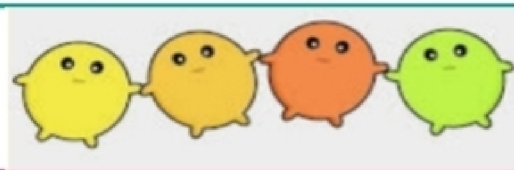
เป็นการเขียนตัวแปรแทนสมาชิกในเซต เพื่อบอกว่ามีสิ่งใดเป็นสมาชิกของเซต โดยการเขียนเงื่อนไขในลักษณะของตัวแปร

ตัวอย่าง $A = \{x \mid x$ เป็นสระในอักษรภาษาไทย$\}$

อ่านว่า A เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก x โดยที่ x เป็นสระในอักษรภาษาไทย

" | " เป็นสัญลักษณ์แทนคำว่า "โดยที่"

$B = \{y \mid y$ เป็นจำนวนคู่และ $1 < y < 10\}$



ชนิดของเซต

1) เซตว่าง (Empty Sets or Null sets) คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก ใช้สัญลักษณ์ $\varnothing$ อ่านว่า ฟี (Phi) หรือใช้สัญลักษณ์ { } แทนเซตว่างได้

2) เซตจำกัด (Finite Sets) คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ หรือศูนย์ จำนวนสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $n(A)$

เช่น $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ นับสมาชิกได้ 5 ตัว ดังนั้น $n(A) = 5$

3) เซตอนันต์ (Infinite Sets) คือ เซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด ซึ่งไม่สามารถนับจำนวนสมาชิกได้แน่นอน เช่น $C = \{s \mid s$ เป็นจำนวนประชากรของประเทศไทย$\}$

4) เอกภพสัมพัทธ์ (Relative Universe) คือ เซตที่กำหนดขอบเขตของสิ่งที่เราจะศึกษา โดยมีข้อตกลงว่าจะไม่กล่าวถึงสิ่งใดนอกเหนือจากสมาชิกของเซตที่กำหนด ใช้สัญลักษณ์ "$\mathcal{U}$"

เช่น 1) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2, 3, 4\}$ จะได้ $A \cup B = \{2, 3\}$

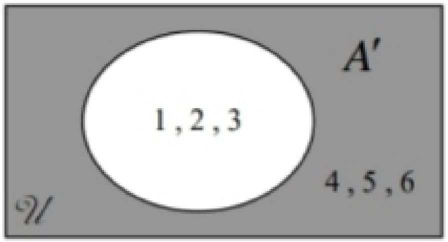
2) $A = \{1, 2\}$ $B = \{3, 4\}$ จะได้ $A \cup B = \{\ \}$

คอมพลีเมนต์ (Complement)

บทนิยาม คอมพลีเมนต์ของเซต A คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ ($\mathscr{U}$) แต่ไม่เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย A'

เช่น $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{1, 2, 3\}$

ดังนั้น $A' = \{4, 5, 6\}$



$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

$p \leftrightarrow q \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

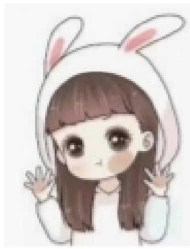
$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$

$p \wedge p \equiv p$

$p \vee p \equiv p$



$p \wedge T \equiv p$

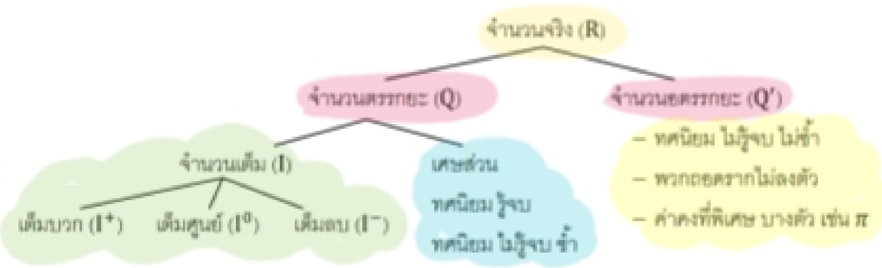
$p \vee F \equiv p$

$T \rightarrow p \equiv p$

$p \rightarrow F \equiv \sim p$

$p \leftrightarrow T \equiv p$

$p \leftrightarrow F \equiv \sim p$



และเราสามารถเติมเครื่องหมาย + หรือ − ไปบนหัว R หรือ Q ได้

- R^+ หมายถึง จำนวนจริงที่เป็นบวก
- R^- หมายถึง จำนวนจริงที่เป็นลบ
- Q^+ หมายถึง จำนวนตรรกยะที่เป็นบวก
- Q^- หมายถึง จำนวนตรรกยะที่เป็นลบ

จำนวนจริง มีสมบัติเกี่ยวกับการเท่ากันอยู่ 5 ข้อ ดังนี้

- สมบัติการสะท้อน $a = a$ เสมอ
- สมบัติการสมมาตร ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
- สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
- สมบัติการบวกด้วยตัวเท่า ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
- สมบัติการคูณด้วยตัวเท่า ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	จำนวนจริงบวกกัน ยังคงได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริง	จำนวนจริงคูณกัน ยังคงได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริง
สมบัติสลับที่	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
สมบัติเปลี่ยนกลุ่ม	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	มีเอกลักษณ์การบวก คือ 0	มีเอกลักษณ์การคูณ คือ 1
สมบัติการมีอินเวอร์ส	จำนวนจริงทุกตัว มีอินเวอร์สการบวกที่เป็นจำนวนจริง	จำนวนจริงทุกตัว (ยกเว้น 0) มีอินเวอร์สการคูณที่เป็นจำนวนจริง
สมบัติการแจกแจง	$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$	

ในการแก้อสมการ สิ่งที่ต้องระวังคือ เมื่อคูณหรือหารทั้ง 2 ข้างด้วยเลขลบ ต้องกลับ > เป็น < และ ≥ เป็น ≤ การย้ายข้างก็ด้วย ถ้าย้ายเลขลบ จากคูณไปเป็นหาร (หรือจากหารไปเป็นคูณ) ก็ต้องกลับเครื่องหมาย เหมือนกัน

เช่น

$$\begin{aligned} x &> 3 \\ -2x &< (3)(-2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -3x &< 6 \\ x &> \tfrac{6}{-3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -\tfrac{x}{2} &\le 5 \\ x &\ge (5)(-2) \end{aligned}$$

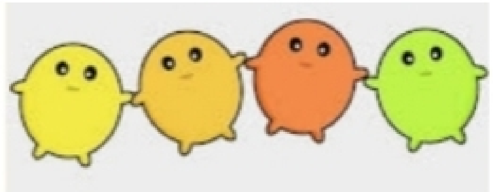
แต่

$$\begin{aligned} -4x &< -8 \\ -x &< \tfrac{-8}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 2 &> 8 \\ x &> 8 + 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tfrac{x+2}{x} &> 5 \\ x + 2 &\ \underline{?}\ 5x \end{aligned}$$

ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย เพราะย้าย 4 ซึ่งเป็นบวก

ย้ายแบบ บวก ↔ ลบ ไม่ต้องเปลี่ยนเครื่องหมาย

ห้ามทำ! เพราะไม่รู้ว่า x เป็นบวกหรือลบ



การแก้อสมการดีกรี 1 ใช้หลักเดียวกับเรื่องสมการ แต่ต้องระวังตอนย้ายเลขลบแบบคูณหาร

เช่น

$$\begin{aligned} 2x + 3 &\ge 4x - 5 \\ 2x - 4x &\ge -5 - 3 \\ -2x &\ge -8 \\ x &\le \tfrac{-8}{-2} \\ x &\le 4 \end{aligned}$$

กลับ ≥ เป็น ≤ ด้วย

ดังนั้น เซตคำตอบคือ $(-\infty, 4]$

บางที โจทย์อาจนำอสมการหลายๆท่อนมาต่อกัน เช่น $2x - 4 < 2 - x < 2x + 14$

ในกรณีนี้ เราจะใช้หลัก บวกลบคูณหาร "ทุกท่อน" ด้วยตัวเท่า เพื่อรวม x ไปไว้ที่เดียว

เช่น

$$\begin{array}{ccccc} 2x - 4 & < & 2 - x & < & 2x + 14 \\ 2x - 4 - 2x & < & 2 - x - 2x & < & 2x + 14 - 2x \\ -4 & < & 2 - 3x & < & 14 \\ -4 - 2 & < & 2 - 3x - 2 & < & 14 - 2 \\ -6 & < & -3x & < & 12 \\ \frac{-6}{-3} & > & \frac{-3x}{-3} & > & \frac{12}{-3} \\ 2 & > & x & > & -4 \end{array}$$

ลบ $2x$ ตลอดทุกท่อน

ลบ 2 ตลอดทุกท่อน

หาร −3 ตลอดทุกท่อน (กลับเครื่องหมายด้วย)

ดังนั้น เซตคำตอบคือ $(-4, 2)$

3. อสมการในรูป |▨| > ▭ แปลว่า ▨ > ▭ หรือ ▨ < −▭

ตัวอย่าง จงแก้อสมการ $|x+2| \ge x+4$

วิธีทำ จะได้ $x+2 \ge x+4$ หรือ $x+2 \le -(x+4)$

$2 \ge 4$ ไม่มีคำตอบ

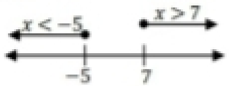
$x+2 \le -x-4$
$2x \le -6$
$x \le -3$

ดังนั้น เซตคำตอบคือ $(-\infty, -3]$

ตัวอย่าง จงแก้อสมการ $\left|\frac{x-1}{3}\right| > 2$

วิธีทำ จะได้ $\frac{x-1}{3} > 2$ หรือ $\frac{x-1}{3} < -2$

$x-1 > 6$ $\qquad$ $x-1 < -6$
$x > 7$ $\qquad$ $x < -5$



ดังนั้น เซตคำตอบคือ $(-\infty, -5) \cup (7, \infty)$

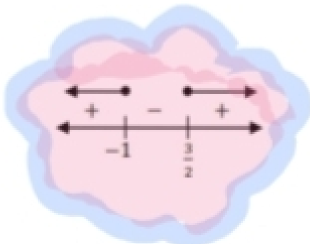
4. ประโยคในรูป |▨| = |▭| , |▨| > |▭| , |▨| < |▭|
ให้กำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์โดยการยกกำลังสองทั้งสองข้าง ($|x|^2 = x^2$)
แล้วย้ายข้างมาเข้าสูตร $u^2 - a^2 = (u-a)(u+a)$

ตัวอย่าง จงแก้อสมการ $|2-3x| \ge |x-4|$

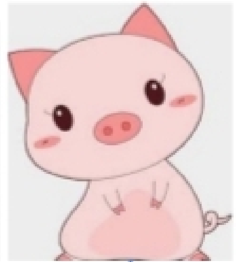
วิธีทำ

$$|2-3x|^2 \ge |x-4|^2$$
$$(2-3x)^2 \ge (x-4)^2$$
$$(2-3x)^2 - (x-4)^2 \ge 0$$

$$\big((2-3x)-(x-4)\big)\big((2-3x)+(x-4)\big) \ge 0$$
$$(2-3x-x+4)(2-3x+x-4) \ge 0$$
$$(-4x+6)(-2x-2) \ge 0$$
$$(-2x+3)(-x-1) \ge 0$$

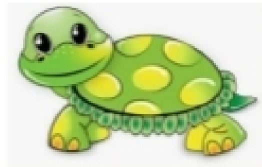


ดังนั้น เซตคำตอบคือ $(-\infty, -1] \cup [\frac{3}{2}, \infty)$



➤ ข้อควรระวัง

1. $5!+4! \ne (5+4)!$
2. $6! \times 3! \ne (6\times3)!$
3. $\frac{3!}{7!} \ne \left(\frac{3}{7}\right)!$
4. $(-3)!$ ไม่มีนิยาม เพราะ $-3 \in I^-$



$\frac{5!3!}{4!}$

วิธีทำ $\frac{5!3!}{4!} = \frac{5\times4!\times3\times2\times1}{4!} = 5\times3\times2\times1 = 30$

$4!+3!$

วิธีทำ $4!+3! = 4\times3!+3! = 5\times3! = 5\times3\times2\times1 = 30$

$\frac{8!}{5!3!}$

วิธีทำ $\frac{8!}{5!3!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!\times3\times2\times1} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$