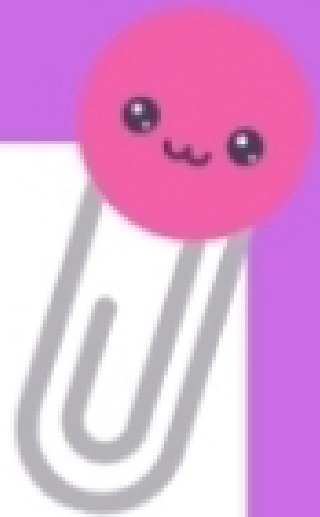




สรุปคณิต

ม.5



<https://www.facebook.com/>

จำหน่ายคอร์สเรียน

ออนไลน์-by-ครู

๙-909830265882363/



บทนิยาม ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \dots \times a}_{n \text{ ตัว}}$$

สรุปสมบัติของเลขยกกำลัง

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง m และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$

4. $(ab)^m = a^m b^m$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} ; b \neq 0$

6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} ; a \neq 0$

7. $a^0 = 1 ; a \neq 0$

8. 0^0 ไม่นิยาม



สังยุคหรือคอนจูเกต(conjugate)

การคูณหรือการหารรากมักจะใช้ conjugate เพื่อให้รากของตัวส่วนหายไป

บทนิยาม ให้ $\sqrt{a}$ และ $\sqrt{b}$ หาค่าได้

1.) คอนจูเกตของ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ คือ $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

2.) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

มาจาก $\Rightarrow$ ผลต่างกำลังสอง $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$



การเขียนจำนวนให้ตัวส่วนอยู่ในรูปที่ไม่ติดกรณฑ์

กรณีที่ 1 ส่วนที่มีกรณฑ์เพียงพจน์เดียว

เช่น $\frac{a}{\sqrt{b}}$ นักเรียนสามารถคูณ $\sqrt{b}$ เข้าทั้งเศษและส่วนของ $\frac{a}{\sqrt{b}}$ ซึ่งจะได้ดังนี้

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$



กรณีที่ 2 ส่วนที่มีกรณฑ์ 2 พจน์บวกกัน

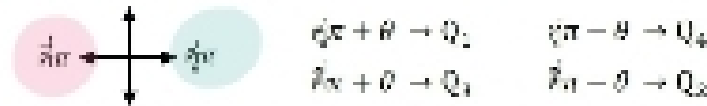
เช่น $\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ หรือ $\frac{c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

สามารถแก้โดยใช้หลักการ ผลต่างกำลังสอง $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

ซึ่งเรียก $(a - b)$ กับ $(a + b)$ ว่าเป็นคู่สังยุค (conjugate) :ซึ่งกันและกัน

ในสี่เหลี่ยมมุมฉาก 2π หรือ 360° จึงมี "มุม $X \pm \theta$ " กับ "มุม $Y \pm \theta$ "

มุมทั้งสองมุม "มุม $X \pm \theta$ " ให้มุมที่ติดมุม $\pi \pm \theta$ มุมเหล่านี้จะสะท้อนลงมาเป็น "มุมที่ติดมุม θ " ให้มุมทั้งสองได้เหมือนกันเสมอทุกทิศทาง ตามตารางต่อไปนี้



$\begin{aligned} \sin(3\pi + \theta) &= \sin Q_1 = -\sin \theta \\ \tan(5\pi - \theta) &= \tan Q_2 = -\tan \theta \\ \sec(-2\pi - \theta) &= \sec Q_4 = \sec \theta \\ \sin(-\theta) &= \sin(0 - \theta) = \sin Q_4 = -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos(0 - \theta) = \cos Q_4 = \cos \theta \\ \tan(-\theta) &= \tan(0 - \theta) = \tan Q_4 = -\tan \theta \end{aligned}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{ตามสี่เหลี่ยมมุมฉาก}$
--	--



มุมที่ติดมุม "มุม $Y \pm \theta$ " ให้มุมที่ติดมุม $\frac{\pi}{2} \pm \theta$ มุมเหล่านี้จะสะท้อนลงมาเป็น "มุมที่ติดมุม θ " ให้

โดยทั้งสองได้เหมือนกันเสมอทุกทิศทาง ตามตารางต่อไปนี้

มุมที่ติดมุมที่ติดมุม $\frac{\pi}{2} \pm \theta$ จะได้มุม θ ในทุกทิศทาง

มีอีกวิธีอีก ให้มุม $\frac{\pi}{2} \pm \theta$ เป็น $\theta \pm \frac{\pi}{2} \pm \theta$ แล้วหาค่าตามวิธีก่อน

$\sin \leftrightarrow \cos$
 $\tan \leftrightarrow \cot$
 $\sec \leftrightarrow \csc$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right)$	$\cot\left(-\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot\left(-4\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right)$
--	---



$$\begin{aligned} &= \sin Q_3 \\ &= -\cos \theta \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \cot Q_2 \\ &= -\tan \theta \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin 3$

วิธีทำ ถ้าสังเกตดีๆ จะเห็นว่าไม่มี $^{\circ}$ อยู่หลัง 3 ดังนั้น ใช้นี้คือ 3 แทนองศา ไม่ได้ 3 องศา

เนื่องจาก $\frac{\pi}{2} = \frac{3.1416}{2} = 1.5708$ ดังนั้นมุม 3 เติบโตมากกว่า $\frac{\pi}{2}$ ไม่ได้ที่อยู่ในจตุภาคที่ 1 เมื่อสามารถยังไม่ได้ ทำให้อยู่ในจตุภาคที่ 1 ได้เป็น $\sin 3 = \sin(3.1416 - 0.1416) = \sin(\pi - 0.1416) = \sin 0.1416$

$$\begin{array}{ccc}
 \sin 0.1396 & & = 0.1392 \\
 \uparrow \text{เพิ่ม } 0.0020 & \nearrow \text{เพิ่ม } 0.0029 & \uparrow \text{เพิ่ม } x \\
 \sin 0.1416 & & = 0.1412 \\
 \downarrow \text{เพิ่ม } 0.0029 & & \downarrow \text{เพิ่ม } 0.0029 \\
 \sin 0.1425 & & = 0.1421
 \end{array}$$

หากการเพิ่มของฟังก์ชันนี้จนเข้าใกล้ค่าส่วน จะได้ $\frac{0.0020}{0.0029} = \frac{x}{0.0029}$ นั่นคือ $x = 0.0020$

จะได้ $\sin 0.1416 = 0.1392 + 0.0020 = 0.1412$

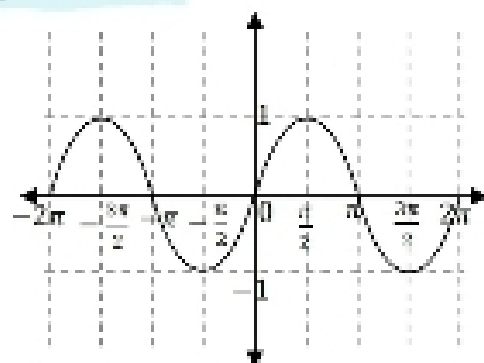
ดังนั้น $\sin 3 = \sin(\pi - 0.1416) = \sin 0.1416 = 0.1412$



กราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เรื่องนี้ คือจะจำรูปแบบของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ให้ได้ ดังนี้

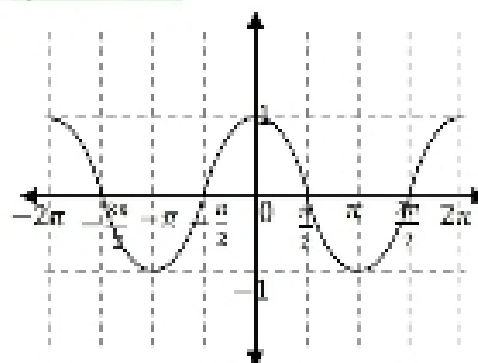
$$y = \sin x$$



โดเมน = $\mathbb{R}$

เรนจ์ = $[-1, 1]$

$$y = \cos x$$



โดเมน = $\mathbb{R}$

เรนจ์ = $[-1, 1]$

สูตรมุมสามเท่า

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

$$\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3 \cot A}{3 \cot^2 A - 1}$$



สูตรมุมครึ่งเท่า

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$$

หมายเหตุ: ผลลัพธ์จะเป็น บวก หรือ ลบ อย่างใดอย่างหนึ่ง ตามจุดภาคของ $\frac{A}{2}$

