



สถาบัน **THE BEST CENTER**

2145/7 ซ.รามคำแหง 43/1 ถ.รามคำแหง แขวงหัวหมาก เขตบางกะปิ กรุงเทพฯ 10240

โทร. 0-2318-6868, 0-2314-1492 โทรสาร 0-2718-6274

www.thebestcenter.com facebook.com/bestcentergroup

คุณภาพทางวิชาการต้องมาที่ 1

คู่มือเตรียมสอบ

นักเรียนอนุนิยมวิทยา

กรมอนุนิยมวิทยา

ปี 65

วิธีการสอบคัดเลือก

1.คณิตศาสตร์และสถิติ (คะแนนเต็ม 100 คะแนน) ขอบเขตเนื้อหาที่ใช้สอบ

คณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม เวกเตอร์
พีชคณิต และเลขาคณิต

สถิติ การวิเคราะห์ข้อมูลสถิติเบื้องต้น ความน่าจะเป็น อนุกรมเชิงเส้นอย่างง่าย การ
ทดสอบสมมุติฐานทางสถิติเบื้องต้น

2.ฟิสิกส์ (คะแนนเต็ม 100 คะแนน) ขอบเขตเนื้อหาที่ใช้สอบ

ภาคกลศาสตร์ แก๊ส คลื่น แสง เสียง ความร้อนและอุณหพลศาสตร์ ไฟฟ้าสถิต ไฟฟ้า
กระแส และแม่เหล็กไฟฟ้า

3.ภาษาอังกฤษ (คะแนนเต็ม 100 คะแนน) ขอบเขตเนื้อหาที่ใช้สอบ

การอ่านจับใจความ บทสนทนา และไวยากรณ์

สนใจสั่งซื้อ หรือสอบถามเพิ่มเติม โทร.081-496-9907



LINE: @thebestcenter

270.-

คู่มือสอบนักเรียนอุดุนิยมวิทยา กรมอุดุนิยมวิทยา

รวบรวมและเรียบเรียงโดย.....

ฝ่ายวิชาการ สถาบัน THE BEST CENTER

ห้ามตัดต่อหรือคัดลอกส่วนใดส่วนหนึ่งของเนื้อหา

สงวนลิขสิทธิ์ตาม พ.ร.บ.ลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537

ราคา 270 บาท

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย



The Best Center InterGroup Co., Ltd.

บริษัท เดอะเบสท์ เซ็นเตอร์ อินเตอร์กรุป จำกัด

บริหารงานโดย ดร.สิงห์ทอง บัวชุมและอาจารย์จันทน์ บัวชุม (ติวเตอร์กึ่ง ย่าน ม. ราม)

เลขที่ 2145/7 ซอยรามคำแหง 43/1 ถนนรามคำแหง แขวงหัวหมาก เขตบางกะปิ กรุงเทพฯ 10240

โทรศัพท์.081-496-9907,0-2314-1492, 0-2318-6868 โทรสาร. 0-2718-6274 line id: @thebestcenter

www.thebestcenter.com หรือ www.facebook.com/bestcentergroup

คู่มือสอบ
นักเรียนอนุตุนิยมวิทยา
กรมอนุตุนิยมวิทยา

THE BEST CENTER
เดอะเบสท์ เซ็นเตอร์

ราคา 270-

คำนำ

คู่มือเตรียมสอบสำหรับตำแหน่งนักเรียนอุดุนิยมวิทยา กรมอุดุนิยมวิทยา
เล่มนี้ ทางสถาบัน THE BEST CENTER และฝ่ายวิชาการของสถาบันได้เรียบเรียงขึ้น เพื่อให้
ผู้สมัครสอบใช้สำหรับเตรียมสอบในการสอบแข่งขันฯในครั้งนี้

ทางสถาบัน THE BEST CENTER ได้เล็งเห็นความสำคัญจึงได้จัดทำหนังสือ
เล่มนี้ขึ้นมา ภายในเล่มประกอบด้วยทุกส่วนที่กำหนดในการสอบ เจาะข้อสอบทุกส่วน พร้อม
คำเฉลยอธิบาย มาจัดทำเป็นหนังสือชุดนี้ขึ้น เพื่อให้ผู้สอบได้เตรียมตัวอ่านล่วงหน้า มีความ
พร้อมในการทำข้อสอบ

ท้ายนี้ คณะผู้จัดทำขอขอบคุณทางสถาบัน THE BEST CENTER ที่ได้ให้การ
สนับสนุนและมีส่วนร่วมในการจัดทำต้นฉบับ ทำให้หนังสือเล่มนี้สามารถสำเร็จขึ้นมาเป็น
เล่มได้ พร้อมกันนี้คณะผู้จัดทำขออ้อมรับข้อบกพร่องใดๆ อันเกิดขึ้นและยินดีรับฟังความ
คิดเห็นจากทุกๆท่าน เพื่อที่จะนำมาปรับปรุงแก้ไขให้ดียิ่งขึ้น

ขอให้โชคดีในการสอบทุกท่าน

ฝ่ายวิชาการ

สถาบัน The Best Center

www.thebestcenter.com

สารบัญ

คณิตศาสตร์

◆ ตรีโกณมิติและการประยุกต์	1
◆ ฟังก์ชัน	12
◆ เวกเตอร์	20
◆ พีชคณิต	29
◆ เรขาคณิตวิเคราะห์	35
◆ การวิเคราะห์ข้อมูลสถิติ	49
◆ ความน่าจะเป็น	132
◆ อนุกรม	139
◆ การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น	162
◆ การแจกแจงปกติ	173

ฟิสิกส์

◆ จลศาสตร์ พลศาสตร์ งานและพลังงานกลศาสตร์	178
◆ คลื่น	206
◆ ไฟฟ้า	218

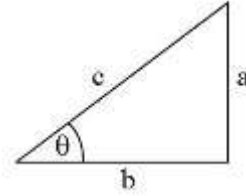
ภาษาอังกฤษ

◆ แนวข้อสอบ ภาษาอังกฤษ Structure	229
◆ แนวข้อสอบ ภาษาอังกฤษ Conversation	236
◆ แนวข้อสอบ ภาษาอังกฤษ Vocabulary	244
◆ แนวข้อสอบ ภาษาอังกฤษ Reading Comprehension	247
◆ รวมข้อสอบ ภาษาอังกฤษ	250

ตรีโกณมิติและการประยุกต์

1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันไซน์ (sine)	:	$\sin \theta = \frac{a}{c}$	
ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine)	:	$\cos \theta = \frac{b}{c}$	
ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent)	:	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{a}{b}$	เมื่อ $\cos \theta \neq 0$
ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent)	:	$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{b}{a}$	เมื่อ $\sin \theta \neq 0$
ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant)	:	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{c}{b}$	เมื่อ $\cos \theta \neq 0$
ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant)	:	$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{c}{a}$	เมื่อ $\sin \theta \neq 0$



2. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

มุม A	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ฟังก์ชัน	(0°)	(30°)	(45°)	(60°)	(90°)	(180°)	(270°)	(360°)
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	---	0	---	0
cot A	---	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	---	0	---
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	---	-1	---	1
cosec A	---	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	---	-1	---

ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยองศากับหน่วยเรเดียน

$$1 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน}$$

$$1 \text{ เรเดียน} = \frac{180}{\pi} \text{ องศา}$$

3. ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta$
$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\sec(-\theta) = \sec \theta$
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\cot(-\theta) = -\cot \theta$

$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$
$\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$	$\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$
$\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta$	$\cos(2\pi + \theta) = \cos \theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta$

4. สูตรของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$(1) \quad \begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ \sec^2 A - \tan^2 A &= 1 \\ \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A &= 1 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin(A - B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos(A - B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(A + B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} & \tan(A - B) &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \\ \cot(A + B) &= \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A} & \cot(A - B) &= \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A} \end{aligned}$$

$$(3) \quad 2 \sin A \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B)$$

$$2 \cos A \sin B = \sin (A + B) - \sin (A - B)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B)$$

$$2 \sin A \sin B = \cos (A - B) - \cos (A + B)$$

$$(4) \quad \sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$(5) \quad \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$$

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$$

$$\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$(6) \quad \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

$$(7) \quad \sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

$$\tan^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$$

5. อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันอินเวอร์สไซน์ (arcsine)

$$y = \arcsin x \text{ ก็ต่อเมื่อ } \sin y = x$$

$$\text{เมื่อ } -1 \leq x \leq 1 \text{ และ } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

ฟังก์ชันอินเวอร์สโคไซน์ (arccosine)

$$y = \arccos x \text{ ก็ต่อเมื่อ } \cos y = x$$

$$\text{เมื่อ } -1 \leq x \leq 1 \text{ และ } 0 \leq y \leq \pi$$

ตัวผกผัน (inverse) ของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ สรุปดังตาราง

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$\arcsin$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
arc cot	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
arc sec	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
arc cosec	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

สิ่งที่ควรทราบ

$$1. \sin(\arcsin x) = x \quad \text{เมื่อ } -1 \leq x \leq 1$$

$$2. \cos(\arccos x) = x \quad \text{เมื่อ } -1 \leq x \leq 1$$

$$3. \tan(\arctan x) = x \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$4. \text{arc cosec } x = \arcsin \frac{1}{x}$$

$$5. \text{arc sec } x = \arccos \frac{1}{x}$$

$$6. \text{arc cot } x = \arctan \frac{1}{x}$$

$$7. \arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

$$8. \arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$$

$$9. \text{arc cot } x + \text{arc cot } y = \text{arc cot } \frac{xy-1}{y+x}$$

10. $\text{arc cot } x - \text{arc cot } y = \text{arc cot } \frac{xy + 1}{y - x}$

11. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

12. $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

13. $\text{arc sec } x + \text{arc cosec } x = \frac{\pi}{2}$

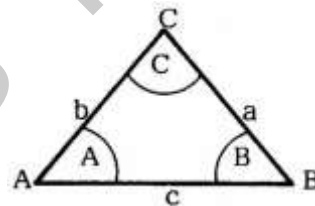
14. $2 \arctan x = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$

15. $2 \operatorname{arc} \cot x = \operatorname{arc} \cot \frac{x^2 - 1}{2x}$

6. กฎของไซน์และโคไซน์

กฎของไซน์

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



กฎของโคไซน์

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

พื้นที่ของสามเหลี่ยม

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่สามเหลี่ยม } ABC &= \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{1}{2}ac \sin B \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A\end{aligned}$$
















แนวข้อสอบตรีโกณมิติ

1. ค่าของ $\frac{3\tan^2 135^\circ - \sec^2 300^\circ}{2\sin 330^\circ}$ เท่ากับ

1. -7

2. -1

3. 1

4. 7

ตอบ 3

แนวคิด เนื่องจาก $\tan 135^\circ = \tan (180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$
 $\sec 300^\circ = \sec (360^\circ - 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$
 $\sin 330^\circ = \sin (360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{3\tan^2 135^\circ - \sec^2 300^\circ}{2\sin 330^\circ} = \frac{3(-1)^2 - (2)^2}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{3 - 4}{-1} = 1$$

2. ถ้า $\cos A = \frac{3}{5}$ และ $0^\circ < A < 90^\circ$ แล้วค่าของ $\frac{\sin A + \cot(90^\circ - A)}{\tan A - \sec(90^\circ - A)}$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{118}{5}$

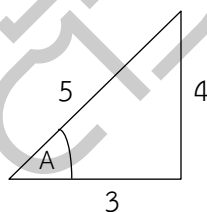
2. $\frac{128}{5}$

3. $\frac{118}{15}$

4. $\frac{128}{15}$

ตอบ 2

แนวคิด จาก $\cos A = \frac{3}{5}$ และ $0^\circ < A < 90^\circ$



จากรูป จะได้

$$\sin A = \frac{4}{5}, \tan A = \frac{4}{3}, \operatorname{cosec} A = \frac{5}{4}$$

เนื่องจาก $\cot(90^\circ - A) = \tan A$ และ $\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{\sin A + \cot(90^\circ - A)}{\tan A - \sec(90^\circ - A)} &= \frac{\sin A + \tan A}{\tan A - \operatorname{cosec} A} \\ &= \frac{\frac{4}{5} + \frac{4}{3}}{\frac{4}{3} - \frac{5}{4}} \\ &= \frac{128}{5} \end{aligned}$$

3. $4\sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{7\pi}{6} - \tan \frac{13\pi}{4} \cot^2 \frac{11\pi}{6}$ มีค่าตรงกับข้อใด

1. 6

2. 0

3. -6

4. $-3 + \sqrt{3}$

ตอบ 3

แนวคิด เนื่องจาก $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{13\pi}{4} = \tan(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cot \frac{11\pi}{6} = \cot(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4\sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{7\pi}{6} - \tan \frac{13\pi}{4} \cot \frac{11\pi}{6} &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (1)(-\sqrt{3})^2 \\ &= 4\left(-\frac{3}{4}\right) - (1)(3) \\ &= -3 - 3 \\ &= -6 \end{aligned}$$

4. กำหนด $0 < \theta < 2\pi$ และ $2\sin\theta \tan\theta - 1 = 2\sin\theta - \tan\theta$ ผลบวกของค่า θ ทุกค่าที่สอดคล้องกับสมการข้างต้น มีค่าตรงกับข้อใด

1. $\frac{9\pi}{2}$
3. $\frac{9\pi}{4}$

2. $\frac{11\pi}{2}$
4. $\frac{11\pi}{4}$

ตอบ 1

แนวคิด จากโจทย์ $2\sin\theta \tan\theta - 1 = 2\sin\theta - \tan\theta$

จะได้ $2\sin\theta \tan\theta - 2\sin\theta + \tan\theta - 1 = 0$

$$2\sin\theta(\tan\theta - 1) + (\tan\theta - 1) = 0$$

$$(\tan\theta - 1)(2\sin\theta + 1) = 0$$

นั่นคือ $\tan\theta - 1 = 0$ หรือ $2\sin\theta + 1 = 0$

$$\tan\theta = 1 \quad \text{หรือ} \quad \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \quad \text{หรือ} \quad \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore \text{ผลบวกของค่า } \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = \frac{9\pi}{2}$$

5. ค่าของ $4(\cos 15^\circ + \cos 75^\circ)$ ตรงกับข้อใด

1. $\sqrt{3}$
3. $2\sqrt{3}$

2. $\sqrt{6}$
4. $2\sqrt{6}$

ตอบ 4

แนวคิด

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore 4(\cos 15^\circ + \cos 75^\circ) = 4\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{6}$$

6. กำหนดสมการ $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$ และ $0 \leq x < 2\pi$ แล้ว ค่าของ x ตรงกับข้อใด

1. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

2. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

3. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

4. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

ตอบ 4

แนวคิด

จากโจทย์ $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$

จะได้ $2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x - 3 = 0$ (จาก $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$$2 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 3 = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

นั่นคือ $2\sin x - 1 = 0$ จะได้ $\sin x = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

และ $\sin x - 1 = 0$ จะได้ $\sin x = 1$ ดังนั้น $x = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$$

7. ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเซตคำตอบของสมการ $\sin(\theta + 60^\circ) = 2 \cos(\theta + 30^\circ)$ เมื่อ $0 < \theta < 360^\circ$

1. $\{30^\circ, 60^\circ\}$

2. $\{30^\circ, 150^\circ\}$

3. $\{30^\circ, 210^\circ\}$

4. $\{150^\circ, 210^\circ\}$

ตอบ 3

แนวคิด

จาก $\sin(\theta + 60^\circ) = 2 \cos(\theta + 30^\circ)$

$$\text{จะได้} \quad \sin\theta \cos 60^\circ + \cos\theta \sin 60^\circ = 2 (\cos\theta \cos 30^\circ - \sin\theta \sin 30^\circ)$$

$$\frac{1}{2} \sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta - \frac{1}{2} \sin\theta \right)$$

$$\frac{1}{2} \sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta = \sqrt{3} \cos\theta - \sin\theta$$

$$\frac{1}{2} \sin\theta + \sin\theta = \sqrt{3} \cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta$$

$$\frac{3}{2} \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

เนื่องจาก $\tan\theta$ มีค่าเป็นบวกในควอดรันต์ที่ 1 และควอดรันต์ที่ 3

$$\therefore \theta = 30^\circ, 210^\circ$$

8. จงหาค่าของ k ที่ทำให้ $(\cos\theta + \sin\theta)^2 + 2k \cos\theta \sin\theta = 5 \cos\theta \sin\theta + 1$

1. $\frac{2}{3}$

2. $-\frac{2}{3}$

3. $\frac{3}{2}$

4. $-\frac{3}{2}$

ตอบ 3

แนวคิด จาก $(\cos\theta + \sin\theta)^2 + 2k \cos\theta \sin\theta = 5 \cos\theta \sin\theta + 1$

จะได้ $(\cos^2\theta + 2 \cos\theta \sin\theta + \sin^2\theta) + 2k \cos\theta \sin\theta = 5 \cos\theta \sin\theta + 1$

เนื่องจาก $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

ดังนั้น $2 \cos\theta \sin\theta + 2k \cos\theta \sin\theta + 1 = 5 \cos\theta \sin\theta + 1$

$$2k \cos\theta \sin\theta = 3 \cos\theta \sin\theta$$

$$2k = 3$$

$$k = \frac{3}{2}$$

9. $\sin(\arctan \frac{5}{12} + \arccos \frac{3}{5})$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $-\frac{63}{65}$

2. $-\frac{13}{65}$

3. $\frac{63}{65}$

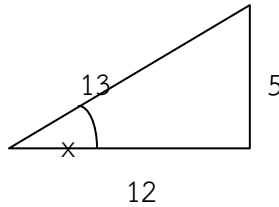
4. $\frac{115}{65}$

ตอบ 3

แนวคิด จากโจทย์ ให้ $x = \arctan \frac{5}{12}$ จะได้ $\tan x = \frac{5}{12}$

และ $y = \arccos \frac{3}{5}$ จะได้ $\cos y = \frac{3}{5}$

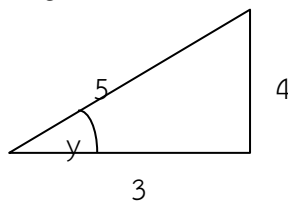
จาก $\tan x = \frac{5}{12}$ จะได้



จากรูป

$$\sin x = \frac{5}{13}, \cos x = \frac{12}{13}$$

จาก $\cos y = \frac{3}{5}$ จะได้



จากรูป

$$\sin y = \frac{4}{5}$$

ดังนั้น $\sin\left(\arctan \frac{5}{12} + \arccos \frac{3}{5}\right) = \sin(x + y)$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$= \left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{15}{65} + \frac{48}{65}$$

$$= \frac{63}{65}$$

10. ชายผู้หนึ่งยืนอยู่ห่างจากตึกหลังหนึ่งเป็นระยะทาง 100 ฟุต สังเกตเห็นมุมเงยของหลังคาตึกเป็น 30° และมุมเงยของเสาอากาศที่ตั้งอยู่บนหลังคาเป็น 60° จงหาความสูงของเสาอากาศ

1. $\frac{50\sqrt{3}}{3}$

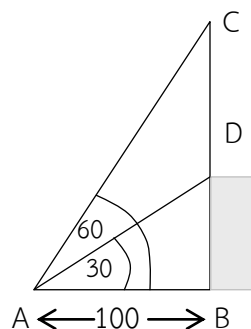
2. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$

3. $50\sqrt{3}$

4. $100\sqrt{3}$

ตอบ 2

แนวคิด



$$\triangle ADB : \tan 30^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BD}{100}$$

$$BD = \frac{100}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{100\sqrt{3}}{3}$$

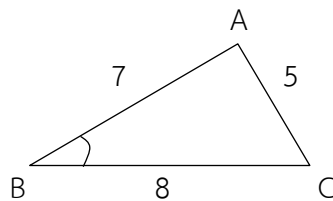
$$\Delta ADB : \tan 60^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{BD}{100}$$

$$BC = 100\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{ ความสูงของเสาอากาศ} = BC - BD = 100\sqrt{3} - \frac{100\sqrt{3}}{3} = \frac{200\sqrt{3}}{3} \text{ ฟุต}$$

11. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ดังรูป



ค่าของ $\sin^2 \frac{B}{2}$ เท่ากับข้อใด

$$1. \quad \frac{3}{28}$$

2. $\frac{7}{28}$

3. $\frac{12}{28}$

4. $\frac{21}{28}$

ตอบ 1

แนวคิด จากกฎของโคไซน์

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$$

$$5^2 = 7^2 + 8^2 - 2(7)(8) \cos B$$

$$\cos B = \frac{11}{14}$$

สูตร $\cos^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$

จะได้ $\cos^2 B = \frac{1 - \cos B}{2} = \frac{1 - \frac{11}{14}}{2}$
 $= \frac{3}{28}$

ନର ନର ନର ନର ନର ନର ନରନର ନର ନର ନର ନର ନର ନର

ฟังก์ชัน

1. ความสัมพันธ์ (Relation)

บทนิยาม คู่อันดับ $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

บทนิยาม ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) โดยที่

$a \in A$ และ $b \in B$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

ตัวอย่าง ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b\}$

$$\text{จะได้ } A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

1. ถ้า A มีสมาชิก m ตัว และ B มีสมาชิก n ตัว แล้ว $A \times B$ จะมีสมาชิก $m \times n$ ตัว
2. $A \times B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$
3. ถ้า $A \times B = A \times C$ และ $A \neq \emptyset$ แล้ว $B = C$
4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
6. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
7. $A \times B$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $B \times A$

ความสัมพันธ์

ให้ A และ B เป็นเซต เรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$ และเรียกความสัมพันธ์จาก A ไป A ว่าความสัมพันธ์ใน A

- หมายเหตุ**
1. $\emptyset$ เป็นความสัมพันธ์
 2. ถ้า $A \times B$ มีสมาชิกอยู่ n ตัว แล้วความสัมพันธ์จาก A ไป B จะมี 2^n ความสัมพันธ์

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

โดเมนของความสัมพันธ์ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r

$$D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$$

เรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r

$$R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$$

อินเวอร์สของความสัมพันธ์

อินเวอร์สของความสัมพันธ์ คือ ความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ r^{-1}

$$r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$$

- หมายเหตุ
1. $D_{r^{-1}} = R_r$
 2. $R_{r^{-1}} = D_r$
 3. ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
แล้ว r^{-1} เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A
 4. กราฟของ r และ r^{-1} จะสมมาตรกัน โดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร
 5. ถ้า $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 9 - x^2\}$
จะได้ $r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid y = 9 - x^2\}$
หรือ $r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid x = 9 - y^2\}$

ตัวอย่าง กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(1, a), (3, b), (5, c)\}$

1. โดเมนของความสัมพันธ์ $D_r = \{1, 3, 5\}$
2. เรนจ์ของความสัมพันธ์ $R_r = \{a, b, c\}$
3. อินเวอร์สของความสัมพันธ์ $r^{-1} = \{(a, 1), (b, 3), (c, 5)\}$
จะได้ $D_{r^{-1}} = \{a, b, c\} = R_r$
 $R_{r^{-1}} = \{1, 3, 5\} = D_r$

2. ฟังก์ชัน (Function)

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใดๆ ของความสัมพันธ์ ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้วสมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน นั่นคือ ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ

$$\text{ถ้า } (x, y) \in f \text{ และ } (x, z) \in f \text{ แล้ว } y = z$$

การตรวจสอบความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. รูปคู่อันดับ สมาชิกตัวหน้าต้องไม่ซ้ำกัน
2. รูปสมการ ค่า x หนึ่งค่า จะให้ค่า y เพียงค่าเดียว
3. รูปกราฟ ลากเส้นตรงขนานแกน y จะตัดกราฟเพียงจุดเดียว

พีชคณิตของฟังก์ชัน

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$ และ $g(x) \neq 0$

ฟังก์ชันคอมโพสิท (Composite function)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง และ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

ฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ โดยที่

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ สำหรับทุก } x \text{ ซึ่ง } f(x) \in D_g$$

หมายเหตุ 1. ฟังก์ชัน $g \circ f$ หาได้ ก็ต่อเมื่อ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

2. ถ้า $R_f \subset D_g$ แล้ว $D_{g \circ f} = D_f$

3. $g \circ f$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $f \circ g$

3. ฟังก์ชันจากเซตหนึ่งไปอีกเซตหนึ่ง

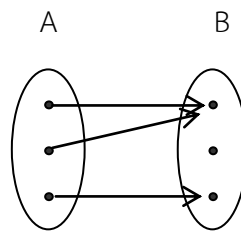
1. ฟังก์ชันจาก A ไป B (function from A into B)

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชัน

2. $D_f = A$

3. $R_f \subset B$



f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \rightarrow B$

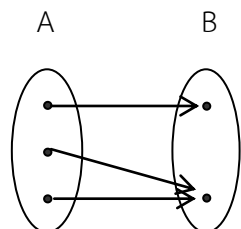
2. ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (function from A onto B)

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชัน

2. $D_f = A$

3. $R_f = B$



f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \xrightarrow{\text{ไปทั่วถึง}} B$

3. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one function)

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ

ถ้า $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$ แล้ว $x_1 = x_2$

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \xrightarrow{1-1} B$

หมายเหตุ รูปกราฟ ถ้าลากเส้นตรงขนานแกน x จะตัดกราฟเพียงจุดเดียว

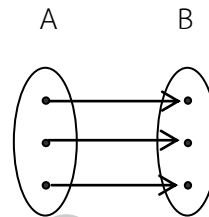
4. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B (one - to - one - function from A onto B)

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2. $D_f = A$

3. $R_f = B$



f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \xrightarrow{\text{ไปทั่วถึง}} B$

4. ฟังก์ชันผกผัน (Inverse function)

ทฤษฎีบท

1. f^{-1} เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2. เรียก f^{-1} ว่าเป็นฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน
3. ให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว

$$y = f(x) \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = f^{-1}(y)$$

หมายเหตุ 1. $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ สำหรับทุกค่า x ในโดเมนของ f

2. $(f \circ f^{-1})(x) = x$ สำหรับทุกค่า x ในโดเมนของ f^{-1}

๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑

แนวข้อสอบฟังก์ชัน

1. ถ้า $r = \{(x, y) \mid y \leq x^2 \text{ และ } y \geq 2x\}$ แล้วเรนจ์ของ r^{-1} คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0, 2]$

2. $[0, 4]$

3. $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

4. $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

ตอบ 3

แนวคิด จาก $y \leq x^2$ และ $y \geq 2x$

$$\text{จะได้ } x^2 \geq y \text{ และ } y \geq 2x$$

$$\text{นั่นคือ } x^2 \geq 2x$$

$$x^2 - 2x \geq 0$$

$$x(x - 2) \geq 0$$

$$\text{จะได้ } x \leq 0 \text{ หรือ } x \geq 2$$

$$\text{เนื่องจาก } R_{r^{-1}} = D_r$$

$$\therefore R_{r^{-1}} = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$$

2. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3 - \sqrt{x^2 - 16}\}$ โดเมน (D_r) และเรนจ์ (R_r) ของ r คือข้อใด

1. $D_r = \{x \mid x \leq -4 \text{ หรือ } x \geq 4\}$, $R_r = R$
2. $D_r = \{x \mid x \leq -4 \text{ หรือ } x \geq 4\}$, $R_r = \{y \mid y \leq 3\}$
3. $D_r = \{x \mid x \geq 4\}$, $R_r = \{y \mid y \leq 3\}$
4. $D_r = \{x \mid -4 \leq x \leq 4\}$, $R_r = \{y \mid y \geq 0\}$

ตอบ 2

แนวคิด จาก $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3 - \sqrt{x^2 - 16}\}$

$$\text{จะพบว่า } x^2 - 16 \geq 0$$

$$(x - 4)(x + 4) \geq 0$$

$$\text{จะได้ } x \leq -4 \text{ หรือ } x \geq 4$$

$$\text{ดังนั้น } D_r = \{x \mid x \leq -4 \text{ หรือ } x \geq 4\}$$

$$\text{เนื่องจาก } \sqrt{x^2 - 16} \geq 0$$

$$\text{ดังนั้น } 3 - \sqrt{x^2 - 16} \leq 3 \text{ นั่นคือ } y \leq 3$$

$$\therefore R_r = \{y \mid y \leq 3\}$$

3. ถ้า $(f + 2g)(x - 1) = 3$ และ $(2f - g)(x + 1) = x^2 - 4$ แล้ว $g(0)$ อยู่ในช่วงใด

1. $(-2, 1)$
2. $(0, 2)$
3. $(2, 3)$
4. $(5, 8)$

ตอบ 2

แนวคิด จาก $(f + 2g)(x - 1) = 3$

$$\text{แทน } x = 1 \text{ จะได้ } (f + 2g)(0) = 3$$

$$f(0) + 2g(0) = 3 \quad \text{----- (1)}$$

จาก $(2f - g)(x + 1) = x^2 - 4$

$$\text{แทน } x = -1 \text{ จะได้ } (2f - g)(0) = (-1)^2 - 4$$

$$2f(0) - g(0) = -3 \quad \text{----- (2)}$$

$$(1) \times 2 \quad 2f(0) + 4g(0) = 6 \quad \text{----- (3)}$$

$$(3) - (2) \quad 5g(0) = 9$$

$$g(0) = \frac{9}{5}$$

$\therefore g(0)$ อยู่ในช่วง $(0, 2)$

4. กำหนดให้ $f(x) = 4x$ และ $g(x) = \frac{2}{x-1}$ ค่าของ x ที่ทำให้ $f(g(x)) = g(f(x))$ เท่ากับข้อใด

1. $-\frac{1}{30}$

2. $\frac{1}{30}$

3. 0

4. $\frac{1}{5}$

ตอบ 4

แนวคิด จากโจทย์ $f(x) = 4x$ และ $g(x) = \frac{2}{x-1}$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{2}{x-1}\right) = 4\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{8}{x-1}$$

$$g(f(x)) = g(4x) = \frac{2}{4x-1}$$

เนื่องจาก $f(g(x)) = g(f(x))$

$$\text{จะได้} \quad \frac{8}{x-1} = \frac{2}{4x-1}$$

$$8(4x-1) = 2(x-1)$$

$$32x - 8 = 2x - 2$$

$$30x = 6$$

$$x = \frac{1}{5}$$

5. ถ้า $f(x) = \sqrt{(3+x)(2-x)}$ และ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ แล้วโดเมนของ $f \cdot g$ คือเซตในข้อใด

1. $\emptyset$

2. $(-\infty, 2]$

3. $(-3, 2]$

4. $[-3, 2]$

ตอบ 3

แนวคิด จาก $f(x) = \sqrt{(3+x)(2-x)}$

จะได้ $(3+x)(2-x) \geq 0$ (ภายใน $\sqrt{\quad}$ ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0)

$$(x+3)(x-2) \leq 0$$

นั่นคือ $-3 \leq x \leq 2$

$$\therefore D_f = [-3, 2]$$

จาก $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$
 จะได้ $x+3 > 0$ (ส่วนต้องไม่เท่ากับศูนย์)
 $x > -3$

$$\therefore D_g = (-3, \infty)$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } D_{f,g} &= D_f \cap D_g \\ &= [-3, 2] \cap (-3, \infty) \\ &= (-3, 2] \end{aligned}$$

6. กำหนด $f(x) = 3x - 1$ และ $g(x) = (x - 1)^3$ ค่าของ $2f^{-1}(2) + 3g^{-1}(1)$ เท่ากับข้อใด

1. 7
2. 8
3. 10
4. หาค่าไม่ได้

ตอบ 2

แนวคิด จาก $f(x) = 3x - 1$
 จะได้ $f^{-1}(3x - 1) = x$
 ให้ $3x - 1 = 2$ จะได้ $x = 1$
 นั่นคือ $f^{-1}(2) = 1$
 จาก $g(x) = (x - 1)^3$
 จะได้ $g^{-1}[(x - 1)^3] = x$
 ให้ $(x - 1)^3 = 1$ จะได้ $x = 2$
 นั่นคือ $g^{-1}(1) = 2$
 $\therefore$ ค่าของ $2f^{-1}(2) + 3g^{-1}(1) = 2(1) + 3(2) = 8$

7. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$ แล้ว $R_{f^{-1}} = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$

ข. ถ้า $f(4x - 3) = 2x - 1$ แล้ว $f^{-1}(7) = 13$

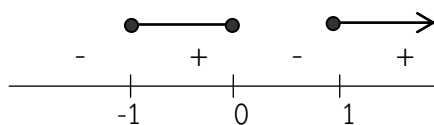
ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. ข้อ ก. ถูก และข้อ ข. ถูก
2. ข้อ ก. ถูก และข้อ ข. ผิด
3. ข้อ ก. ผิด และข้อ ข. ถูก
4. ข้อ ก. ผิด และข้อ ข. ผิด

ตอบ 3

แนวคิด ก. ผิด

$$\begin{aligned} \text{จาก } f(x) &= \sqrt{x^3 - x} \\ \text{จะได้ } x^3 - x &\geq 0 \\ x(x^2 - 1) &\geq 0 \\ x(x - 1)(x + 1) &\geq 0 \end{aligned}$$



$$\therefore R_{f^{-1}} = D_f = [-1, 0] \cup [1, \infty)$$

ข. ถูก

$$\text{จาก } f(4x - 3) = 2x - 1$$

$$\text{จะได้ } f^{-1}(2x - 1) = 4x - 3$$

$$\text{ให้ } 2x - 1 = 7 \text{ จะได้ } x = 4$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } f^{-1}(7) &= 4(4) - 3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑

เวกเตอร์

1. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ในสองมิติ เวกเตอร์ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

เมื่อ $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x

$$\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน y}$$

ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ เวกเตอร์ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

เมื่อ $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x

$$\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน y}$$

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน z}$$

ถ้า $\vec{PQ}$ เป็นเวกเตอร์ในสองมิติ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุด แล้ว

$$\text{เวกเตอร์ } \vec{PQ} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

$$\text{ขนาดของเวกเตอร์ } \vec{PQ} \text{ คือ } |\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ถ้า $\vec{PQ}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุด 2 จุด แล้ว

$$\text{เวกเตอร์ } \vec{PQ} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$\text{ขนาดของเวกเตอร์ } \vec{PQ} \text{ คือ } |\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = c\vec{i} + d\vec{j}$

การเท่ากันของเวกเตอร์

เวกเตอร์ $\vec{u} = \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

นิเสธของเวกเตอร์

นิเสธของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$

การบวกเวกเตอร์

$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} = (a+c)\vec{i} + (b+d)\vec{j}$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ k เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว $k\vec{u} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix} = (ka)\vec{i} + (kb)\vec{j}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย

ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$

การเท่ากันของเวกเตอร์

เวกเตอร์ $\vec{u} = \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ และ $c_1 = c_2$

การบวกเวกเตอร์

$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = (a_1 + a_2)\vec{i} + (b_1 + b_2)\vec{j} + (c_1 + c_2)\vec{k}$

กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

นิเสธของเวกเตอร์

นิเสธของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ k เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว $k\vec{u} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{bmatrix} = (ka)\vec{i} + (kb)\vec{j} + (kc)\vec{k}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย

ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

การขนานกันของเวกเตอร์ในสองมิติและสามมิติ

กำหนดให้ $\vec{u} \neq \vec{0}$ และ $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $k \neq 0$ ซึ่งทำให้ $\vec{u} = k\vec{v}$

เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับศูนย์ เขียนแทนด้วย $\vec{0}$

2. ผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (dot product)

กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ที่ทำมุม θ โดยที่ $0 \leq \theta \leq 180^\circ$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

เวกเตอร์ในสองมิติ

ถ้า $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ และ $\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$ แล้ว $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$

เวกเตอร์ในสามมิติ

$$\text{ถ้า } \vec{u} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k} \text{ และ } \vec{v} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$$

$$\text{แล้ว } \vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ และ k เป็นจำนวนจริง

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$
3. $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
5. $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
6. $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
7. ถ้า $\vec{u} \neq \vec{0}$ และ $\vec{v} \neq \vec{0}$ แล้ว $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
8. ถ้า $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ และมีทิศทางเดียวกันแล้ว $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}|$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product)

กำหนดให้ $\vec{u} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$ และ $\vec{v} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \end{aligned}$$

สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ และ k เป็นจำนวนจริง

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$
4. $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$
5. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
6. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$
7. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$
8. ถ้า $\vec{u} \neq \vec{0}$ และ $\vec{v} \neq \vec{0}$ แล้ว $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$

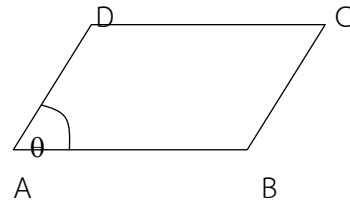
เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ โดยที่ $0 \leq \theta \leq 180^\circ$

9. ถ้า $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ และ $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$ แล้ว $\vec{u} \times \vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

3. การหาพื้นที่และปริมาตร

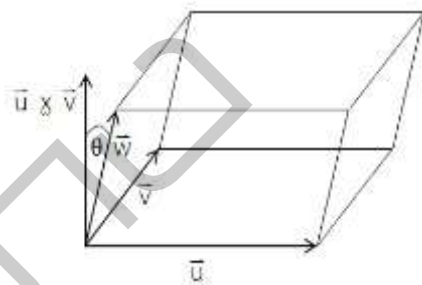
การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม } ABCD &= |\vec{AB} \times \vec{AD}| \\ &= |\vec{AB}| |\vec{AD}| \sin \theta \end{aligned}$$



การหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน} \\ \text{เท่ากับ } |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| \end{aligned}$$



หมายเหตุ 1. $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$
 $= \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

2. ถ้า $\vec{w}$, $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ อยู่ในระนาบเดียวกัน แล้ว $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑ ๑๑๑

แนวข้อสอบเวกเตอร์

1. กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ เวกเตอร์ในข้อใดที่มีขนาดเป็นสามเท่าของ $|\vec{u}|$ และมี

ทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$

1. $3\sqrt{2} \vec{i} - 6\sqrt{2} \vec{k}$

2. $3\sqrt{2} \vec{i} + 6\sqrt{2} \vec{k}$

3. $9\sqrt{2} \vec{i} + 12\sqrt{2} \vec{k}$

4. $9\sqrt{2} \vec{i} - 12\sqrt{2} \vec{k}$

ตอบ 4

แนวคิด จากโจทย์ $\vec{u} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ และ $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$

เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นสามเท่าของ $|\vec{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ คือ $3|\vec{u}| \left(\frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} \right)$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(3)^2 + (5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore 3|\vec{u}| \left(\frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} \right) = 3(5\sqrt{2}) \left[\frac{1}{5} (3\vec{i} - 4\vec{k}) \right]$$

$$= 3\sqrt{2}(3\vec{i} - 4\vec{k})$$

$$= 9\sqrt{2}\vec{i} - 12\sqrt{2}\vec{k}$$

2. ถ้า $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ และ $(x+1)\vec{u} = 2x\vec{u} - (x+5)\vec{v}$ แล้วจำนวนจริง x ที่ทำให้ $\vec{u}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ คือข้อใด

1. $\{x \mid x < -1 \text{ หรือ } x > 5\}$
2. $\{x \mid x < -5 \text{ หรือ } x > 1\}$
3. $\{x \mid -1 < x < 5\}$
4. $\{x \mid -5 < x < 1\}$

ตอบ 2

แนวคิด จาก $(x+1)\vec{u} = 2x\vec{u} - (x+5)\vec{v}$

$$(x+1)\vec{u} - 2x\vec{u} = -(x+5)\vec{v}$$

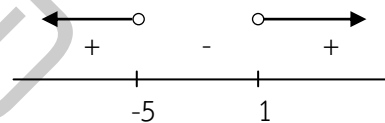
$$-(x-1)\vec{u} = -(x+5)\vec{v}$$

$$\vec{u} = \frac{(x+5)}{(x-1)}\vec{v}$$

เนื่องจาก $\vec{u}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ แสดงว่า $\frac{(x+5)}{(x-1)} > 0$

จะได้ $(x+5)(x-1) > 0$

นั่นคือ $\{x \mid x < -5 \text{ หรือ } x > 1\}$



3. ถ้า $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 3$ และ $\vec{u}$ ทำมุม 120° กับ $\vec{v}$ แล้ว $|\vec{u} - \vec{v}|$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 7
2. 4
3. 2
4. $\sqrt{19}$

ตอบ 1

แนวคิด

สูตร	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \vec{v} \cos \theta$
	$ \vec{u} - \vec{v} ^2 = \vec{u} ^2 + \vec{v} ^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (5)(3) \cos 120^\circ$$

$$= 15\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2})$$

$$= -\frac{15}{2}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$= (5)^2 + (3)^2 - 2\left(-\frac{15}{2}\right)$$

$$= 49$$

$$\therefore |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{49} = 7$$

4. กำหนด $\begin{bmatrix} a \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ b \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ และ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ ถ้าขนาดของ $\vec{u}$ เป็นจำนวนเต็ม

บวกที่มีค่าน้อยที่สุด แล้ว c มีค่าเท่าใด

1. $\sqrt{3}$

2. $2\sqrt{3}$

3. $3\sqrt{3}$

4. $4\sqrt{3}$

ตอบ 2

แนวคิด จาก $\begin{bmatrix} a \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ b \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$

จะได้ $\begin{bmatrix} a+4 \\ 3+b \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $a+4=0$ จะได้ $a=-4$ และ $3+b=-3$ จะได้ $b=-6$

จาก $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ จะได้ $\vec{u} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + c\vec{k}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + (c)^2} = \sqrt{16 + 36 + c^2}$$

$$= \sqrt{52 + c^2}$$

เนื่องจาก $|\vec{u}|$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุด

แสดงว่า $\sqrt{52 + c^2}$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุด

ดังนั้น $52 + c^2 = 64 \rightarrow c^2 = 12$

$\therefore c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

5. กำหนดให้ $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ และ $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ แล้ว $\sin\theta$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{\sqrt{51}}{\sqrt{174}}$

2. $\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{174}}$

3. $\frac{\sqrt{55}}{\sqrt{174}}$

4. $\frac{\sqrt{57}}{\sqrt{174}}$

ตอบ 2

แนวคิด

สูตร $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$

$$\sin \theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (-6)\vec{i} - (4)\vec{j} + (1)\vec{k} \\ &= -6\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2 + (1)^2} = \sqrt{53}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{53}}{\sqrt{29}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{53}}{\sqrt{174}}$$

6. ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{k}$ และ $\vec{w} = -\vec{j} - \vec{k}$ เท่ากับกี่ลูกบาศก์หน่วย

- | | |
|------|------|
| 1. 1 | 2. 2 |
| 3. 3 | 4. 4 |

ตอบ 1

แนวคิด ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน = $|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$

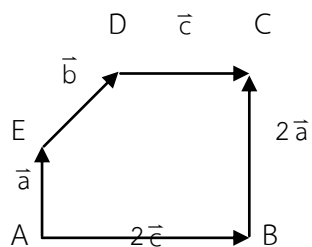
จากโจทย์ $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{k}$ จะได้

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (-2)\vec{i} - (-3)\vec{j} + (-4)\vec{k} \\ &= -2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= (-\vec{j} - \vec{k}) \cdot (-2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) \\ &= (0)(-2) + (-1)(3) + (-1)(-4) \\ &= 1\end{aligned}$$

$\therefore$ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน = $|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| = |1| = 1$ ลูกบาศก์หน่วย

7.



จากรูปที่กำหนดให้ $\vec{c}$ เท่ากับเวกเตอร์ใด

1. $\vec{a} - \vec{b}$

2. $\vec{b} - \vec{a}$

3. $\vec{a} - 2\vec{b}$

4. $\vec{b} - 2\vec{a}$

ตอบ 2

แนวคิด จากรูป $\vec{AE} + \vec{ED} + \vec{DC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 2\vec{c} + 2\vec{a}$$

$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$$

๙๙ ๙๙ ๙๙ ๙๙ ๙๙ ๙๙ ๙๙๙๙ ๙๙ ๙๙ ๙๙ ๙๙ ๙๙ ๙๙

พีชคณิต

1. ถ้า $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $(AB)^t$ ตรงกับข้อใด

1. $\begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -6 & 10 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}$

ตอบ 1

แนวคิด

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1)(3) + (2)(-2) + (1)(1) & (-1)(0) + (2)(4) + (1)(2) \\ (0)(3) + (3)(-2) + (-2)(1) & (0)(0) + (3)(4) + (-2)(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \\ (AB)^t &= \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. กำหนด $A = \begin{bmatrix} x^2 & x - x^2 \\ 0 & x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x - 1 & 1 \\ 0 & x^2 + 1 \end{bmatrix}$ ถ้า $x^2 - x + 1 = 0$ ข้อความต่อไปนี้

ข้อใดเป็นจริง

1. $A - B = 0$

2. $A + B = 0$

3. $A + 2B = 0$

4. $2A - B = 0$

ตอบ 1

แนวคิด จากโจทย์ $x^2 - x + 1 = 0$

หรือ $-x^2 + x - 1 = 0$

เพราะว่า

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} x^2 & x - x^2 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x - 1 & 1 \\ 0 & x^2 + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^2 - x + 1 & x - x^2 - 1 \\ 0 & x - x^2 - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. จงหาค่า x จากสมการ
$$\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

1. $-3\frac{2}{3}$

2. $-4\frac{2}{3}$

3. $-5\frac{2}{3}$

4. $-6\frac{2}{3}$

ตอบ 4

แนวคิด

$$\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x - 24 - 4 - 4x = -3x - 28$$

จากโจทย์จะได้ $-3x - 28 = -8$

$$x = \frac{-20}{3} = -6\frac{2}{3}$$

4. ถ้า $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ แล้วอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ $A + B$ คือข้อใด

1. $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$

ตอบ 4

แนวคิด

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \\ (A + B)^{-1} &= \frac{1}{(2)(-4) - (-1)(7)} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. กำหนด k เป็นจำนวนจริงใดๆ A เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 โดย $A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ถ้า $\det(A) = 1$ แล้ว A^{-1} ตรงกับข้อใด

1. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ตอบ 2

แนวคิด $\det(A) = \begin{vmatrix} k & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (k)(-1) - (1)(-2) = -k + 2$

จากโจทย์ $\det(A) = 1$ จะได้ $-k + 2 = 1$ นั่นคือ $k = 1$

ดังนั้น $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{(1)(-1) - (1)(-2)} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

6. กำหนดให้ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

1. -3

2. 3

3. $-\frac{1}{2}$

4. $\frac{1}{2}$

ตอบ 4

แนวคิด $\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$[(1)(4) - (2)(3)] \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot [(2)(2) - (1)(1)] = [(-1)(1) - (2)(1)]$

$(-2) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} (3) = -3$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

7. A, B เป็นเมทริกซ์มีมิติ 3×3 กำหนด $\det(A) = 2\det(B) = 3$ ค่าของ $\det(2AB^t A^{-1})$ มีค่าตรงกับข้อใด

1. 3
2. 6
3. 12
4. 24

ตอบ 3

แนวคิด จากโจทย์ $\det(A) = 2\det(B) = 3$ และ $n = 3$

จะได้ $\det(A) = 3$, $\det(B) = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \det(2AB^t A^{-1}) &= 2^3 \cdot \det(A) \cdot \det(B^t) \cdot \det(A^{-1}) \\ &= 2^3 \cdot \det(A) \cdot \det(B) \cdot \frac{1}{\det(A)} \\ &= (8)(3)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 12 \end{aligned}$$

8. จากระบบสมการ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ ค่าของ $x + 2y$ ตรงกับข้อใด

1. 5
2. 6
3. 7
4. 8

ตอบ 1

แนวคิด แก่ระบบสมการโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ ดังนี้

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{8-7}{4-3} = 1$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{14-12}{4-3} = 2$$

$$\therefore x + 2y = 1 + 2(2) = 5$$

$$\text{หรือจาก } X = A^{-1}B \text{ จะได้ } A^{-1} = \frac{1}{(2)(2) - (-1)(-3)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น } A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ นั่นคือ } x = 1 \text{ และ } y = 2$$

9. กำหนดสมการ $2x + 4y + z = 1$ ----- (1)

$x + 2y = -2$ ----- (2)

$-x - 3y + 2z = 3$ ----- (3)

จงหาค่า x

1. 9

2. -9

3. 20

4. -20

ตอบ 4

แนวคิด จากโจทย์ เขียนในรูปสมการเมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

$$\therefore x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{20}{-1} = -20$$

10. ถ้า $\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix} = 2$ แล้ว $\begin{vmatrix} 2s & t & u \\ 2p & q & r \\ 2x & y & z \end{vmatrix}$ มีค่าตรงกับข้อใด

1. -2

2. -4

3. 2

4. 4

ตอบ 2

แนวคิด $\begin{vmatrix} 2s & t & u \\ 2p & q & r \\ 2x & y & z \end{vmatrix} = (2) \begin{vmatrix} s & t & u \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ (เอา 2 ออกจากหลักที่ 1)

$$\begin{aligned}
 &= -(2) \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix} \quad (\text{สลับที่ระหว่างหลักที่ 1 กับหลักที่ 3}) \\
 &= -(2)(2) \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

11. กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}$, $\det(A) = 2$ และ $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ -2p & -2q & -2r \end{bmatrix}$ แล้ว

ค่าของ $\det(2B^{-1})$ ตรงกับข้อใด

- | | |
|-------|-------|
| 1. -2 | 2. -1 |
| 3. 1 | 4. 2 |

ตอบ 1

แนวคิด

$$\begin{aligned}
 \det B &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ -2p & -2q & -2r \end{vmatrix} \\
 &= (-2) \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} \quad (\text{เอา } -2 \text{ ออกจากแถวที่ 3}) \\
 &= -(-2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} \quad (\text{สลับที่ระหว่างแถวที่ 1 กับแถวที่ 2}) \\
 &= -(-(-2)) \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (\text{สลับที่ระหว่างแถวที่ 2 กับแถวที่ 3}) \\
 &= (-2) \cdot (\det(A)) \\
 &= (-2) \cdot (2) \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

$$\therefore \det(2B^{-1}) = 2^3 \cdot \det(B^{-1}) = 2^3 \cdot \frac{1}{\det(B)} = (8) \left(\frac{1}{-4} \right) = -2$$