

SMART⁺⁺

$$\sqrt{\left(\frac{-A}{2}\right)^2 + \left(\frac{-B}{2}\right)^2} - c$$

A++

รวมสูตร ตัวคณิต! พีชคณิต ADMISSION

และเตรียมตัวสอบ

ม.4-5-6



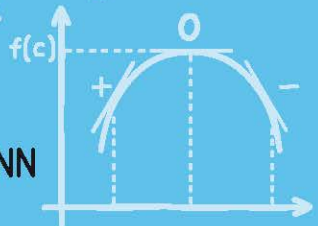
โดย ตัวต่อ ANN

$$\int 1 dx = x + c$$

$$\lim_{x \rightarrow a}$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + c = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$



รวมสูตร ตัวอย่าง ! พิธี Admission

และเตรียมตัวสอบ ม. 4-5-6

ผู้เขียน : ทวีพันธ์ อยู่สุนทร

ราคา 250 บาท

พิมพ์ครั้งที่ 1 : มีนาคม 2558

สงวนลิขสิทธิ์โดย : บริษัท สมาร์ท อินเทลลิเจนท์ จำกัด

จัดพิมพ์โดย : บริษัท สมาร์ท อินเทลลิเจนท์ จำกัด

SMART**

2387 อาคารรวมทุนพัฒนา ชั้น 3 ถนนเพชรบุรีตัดใหม่

แขวงบางกะปิ เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310

โทร. 0-2318-4818 (10 คู่สาย)

แฟกซ์ : 0-2318-4809

E-mail : SM8RTINTEL@gmail.com

จัดจำหน่ายโดย : บริษัท ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด (มหาชน)

เลขที่ 1858/87-90 ถนนบางนา-ตราด

แขวงบางนา เขตบางนา กรุงเทพฯ 10260

โทรศัพท์ 0-2739-8222, 0-2739-8000

โทรสาร 0-2739-8356-9

<http://www.se-ed.com>

พิมพ์ที่ : บริษัท แอคทีฟ พรินท์ จำกัด

โทร. 0-2530-4114 (8 คู่สาย)

ข้อมูลทางบรรณานุกรมทอสมุดแห่งชาติ

ทวีพันธ์ อยู่สุนทร.

รวมสูตร ตัวอย่าง ! พิธี Admission และเตรียมตัวสอบ ม.4-5-6. --กรุงเทพฯ :

สมาร์ท อินเทลลิเจนท์, 2558.

544 หน้า.

1. คณิตศาสตร์--การศึกษาและการสอน (มัธยมศึกษา). 2. คณิตศาสตร์--ข้อสอบและเฉลย.

I. ชื่อเรื่อง.

510.76

ISBN E-Book 978-616-7972-08-4



3

คำนำ

บทที่ 1 ตรีโกณมิติ

15

| | |
|------------------------------------|----|
| • ตรีโกณมิติพื้นฐาน | 16 |
| • เอกลัการตรีโกณมิติ | 18 |
| • มุมองศาและมุมเรเดียน | 21 |
| • การหุบมุมเมื่อมุมมีค่าไม่เต็มแคช | 23 |
| • ค่าแวง่มุมในวงกลม | 26 |
| • มุม 2A และมุม 3A | 29 |
| • มุมผลรวม และมุมผลต่าง | 32 |
| • ตรีโกณผลรวมและผลต่าง | 34 |
| • กำลังสองและกำลังสาม | 38 |
| • กราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติ | 40 |
| • การหา arc-function (1) | 43 |
| • การหา arc-function (2) | 46 |
| • กฎของ sin และ cos | 51 |
| • พื้นที่สามเหลี่ยม | 53 |

บทที่ 2 เรขาคณิตวิเคราะห์

57

| | |
|---|----|
| • จุด จุด จุด : จุดกึ่งกลาง จุดตัดของเส้นมีขนาน | 58 |
| • จุด จุด จุด : จุดของรูป □ ด้านขนาน | 61 |
| • จุด จุด จุด : จุดที่ไม่อยู่ตรงกลาง | 63 |
| • เส้นตรง : ความชัน | 65 |
| • เส้นตรง : สมการเส้นตรง | 68 |
| • ระยะห่าง : จุดกับจุด | 70 |
| • ระยะห่าง : จุดกับเส้น | 71 |
| • ระยะห่าง : เส้นกับเส้น | 73 |
| • โพรเจกชัน : ลงบนแกน x และ y | 75 |
| • โพรเจกชัน : ลงบนเส้นตรง $y = x$, $y = -x$ | 76 |
| • สมการเส้นแบ่งครึ่งมุม | 80 |
| • มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้นตัดกัน | 82 |

85

บทที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

| | |
|--|----|
| • อัตราการเปลี่ยนแปลง | 86 |
| • อัตราการเปลี่ยนแปลงประยุกต์กับฟิสิกส์ | 87 |
| • สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน | 90 |
| • ความชันและเส้นสัมผัสเส้นโค้ง | 93 |
| • วิธีหาค่าจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดสัมพัทธ์ : วิธีที่ 1 | 94 |
| • วิธีหาค่าจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดสัมพัทธ์ : วิธีที่ 2 | 98 |

| | |
|--|-----|
| • วิธีหาค่าจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดสัมบูรณ์ | 101 |
| • ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด | 103 |
| • ฟังก์ชันคอมโพสิท | 105 |
| • โจทย์อนุพันธ์ | 107 |

บทที่ 4 อนุกรม

| | |
|---|-----|
| • สูตรอนุกรม | 112 |
| • อนุกรมเรขาคณิต | 116 |
| • อนุกรมเรขาคณิตขั้นสูง | 119 |
| • การหาพื้นที่ปิดล้อม (1) | 121 |
| • การหาพื้นที่ปิดล้อม (2) | 124 |
| • การหาพื้นที่ปิดล้อม (3) | 126 |
| • การหาพื้นที่ปิดล้อม (4) | 128 |
| • บทประยุกต์ 1 : การคิดอนุกรมในฟังก์ชันคอมโพสิท | 130 |
| • บทประยุกต์ 2 : ดีฟและอนุกรมเป็นเส้นวงกลับกัน | 132 |
| • บทประยุกต์ 3 : อนุกรมเรขาคณิตกับพีสิกส์ | 134 |
| • บทประยุกต์ 4 : อนุกรมเรขาคณิตกับตรีโกณมิติ | 136 |

บทที่ 5 ลำดับและอนุกรม

| | |
|---------------------|-----|
| • ลำดับ | 140 |
| • การสมมติพจน์ลำดับ | 143 |

| | |
|----------------------------------|-----|
| • อนุกรม | 146 |
| • คุณสมบัติ Σ | 149 |
| • สูตร Σ | 151 |
| • อนุกรมเลขคณิตผสมอนุกรมเรขาคณิต | 154 |
| • อนุกรมเทเลสโคปิกเศษส่วน | 158 |
| • ลิมิตของลำดับ | 160 |

บทที่ 6 กำหนดการเชิงเส้น

167

| | |
|-------------------------|-----|
| • ทบทวนอสมการเชิงเส้น | 168 |
| • กำหนดการเชิงเส้น | 172 |
| • โจทย์กำหนดการเชิงเส้น | 175 |

185

บทที่ 7 ภาคตัดกรวย

| | |
|--------------------|-----|
| • สมการวงกลม | 186 |
| • สมการพาราโบลา | 190 |
| • สมการวงรี | 197 |
| • สมการไฮเพอร์โบลา | 204 |

บทที่ 8 ลิมิตและความต่อเนื่อง

213

- สูตรของลิมิต 214
- รูปที่ตอบได้โดยและต้องรอลู่ 217
- รูปที่ต้องรอลู่อาจใช้กฎ L' Hospital 221
- ความต่อเนื่อง 223
- โจทย์ที่ต้องตรวจสอบลิมิตบวกและลบ 226
- โจทย์ทั่วไปของลิมิต 229

233

บทที่ 9 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ^(x,y)

- ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential function) 234
- สูตรที่ควรนำไปใช้ในโจทย์ expo 238
- ฟังก์ชันลด ฟังก์ชันเพิ่มของ expo 240
- ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm function) 244
- ฟังก์ชันลด ฟังก์ชันเพิ่มของ log และค่าแปลก ๆ 248
- สมการ log และอสมการ log 251

บทที่ 10 การนับและความน่าจะเป็น

255

- กฎการนับของการคูณ 256
- กฎการนับของการบวก 257

| | |
|---------------------------------------|-----|
| • กฎการนับของการลบ | 261 |
| • ค่าแฟกทอเรียล (Factorial) ! | 263 |
| • จัดเรียงของที่แตกต่างกันแนวเส้นตรง | 266 |
| • จัดเรียงของที่แตกต่างกันแนววงกลม | 269 |
| • จัดเรียงของที่เหมือนกันแนวเส้นตรง | 272 |
| • จัดเรียงของที่เหมือนกันแนววงกลม | 274 |
| • จัดเรียงของติดกันแนวเส้นตรง | 276 |
| • จัดเรียงของติดกันแนววงกลม | 278 |
| • จัดเรียงของแยกกันแนวเส้นตรง | 280 |
| • จัดเรียงของแยกกันแนววงกลม | 282 |
| • สับเปลี่ยนของ k อย่างทีละเท่า ๆ กัน | 284 |
| • หยิบของเหมือนและของต่าง | 288 |
| • ความน่าจะเป็น | 289 |
| • ความน่าจะเป็นกับเซต | 292 |
| • ทวินาม | 295 |

299

บทที่ 11 ตรรกศาสตร์

| | |
|---|-----|
| • ประพจน์ และตารางค่าความจริง | 300 |
| • กฎของประพจน์ | 302 |
| • การขูบประพจน์ | 303 |
| • สัจนิรันดร์ (Tautology) | 308 |
| • ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวป่งปริมาณ $\forall x, \exists x$ | 310 |
| • ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวป่งปริมาณ $\forall x \forall y, \forall x \exists y, \exists x \forall y, \exists x \exists y$ | 312 |
| • สมเหตุสมผลหรือไม่ | 316 |

บทที่ 12 สถิติ ม. ปลาย

319

| | |
|---|-----|
| • ทบทวนสถิติ ม.ต้น | 320 |
| • ข้อมูลแบบตารางแจกแจงความถี่แบบไม่เป็นอันตรภาคชั้น | 325 |
| • ข้อมูลแบบตารางแจกแจงความถี่แบบเป็นอันตรภาคชั้น | 329 |
| • การวัดการกระจายข้อมูล | 338 |
| • กลุขของซิกม่า | 343 |
| • การแจกแจงปกติ | 344 |
| • เส้นโค้งปกติ (Normal Curve) | 348 |

355

บทที่ 13 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

| | |
|--------------------------------|-----|
| • ความสัมพันธ์ | 356 |
| • โดเมน & เรนจ์ | 361 |
| • กราฟความสัมพันธ์ | 367 |
| • อินเวอร์สความสัมพันธ์ | 372 |
| • กราฟอินเวอร์สของความสัมพันธ์ | 373 |
| • ฟังก์ชัน | 374 |
| • ฟังก์ชันอินเวอร์ส | 377 |
| • ฟังก์ชันคอมโพสิท | 379 |
| • การบวก ลบ คูณ หาร ฟังก์ชัน | 382 |

บทที่ 14 จำนวนเชิงซ้อน

385

- จำนวนเชิงซ้อนคืออะไร ?? 386
- การบวก ลบ จำนวนเชิงซ้อน 389
- การคูณหาร จำนวนเชิงซ้อน 390
- คุณสมบัติโมดูลัสของ Z และสังยุคของ Z 397
- การแก้สมการพหุนาม 401
- การถอดรากที่สอง 404
- จำนวนเชิงซ้อน 406
- หาผลบวก และผลคูณของรากสมการ 408

411

บทที่ 15 จำนวนจริง

- ทบทวนเครื่องหมายของสมการและอสมการ 412
- รูปแบบโจทย์อสมการ 414
- รูปแบบโจทย์ค่าสัมบูรณ์ 426
- รูปแบบโจทย์สแควรูท 440
- ทฤษฎีบทเศษเหลือ 444

บทที่ 16 เมทริกซ์และ DETERMINANT

449

- รูปแบบของเมทริกซ์ (Matrix) 450
- ทราานส์โพสของเมทริกซ์ (Transpose of Matrix) 452

| | |
|---|-----|
| • การบวก ลบ คูณ เมทริกซ์ | 454 |
| • สมบัติของเมทริกซ์ | 457 |
| • ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant) | 459 |
| • สมบัติของ det | 467 |
| • อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ | 470 |
| • สมบัติของอินเวอร์สการคูณเมทริกซ์ | 474 |
| • การแก้ระบบสมการโดยใช้อินเวอร์สของเมทริกซ์ | 476 |
| • การแก้ระบบสมการโดยใช้กฎคราเมอร์ | 479 |
| • การแก้ระบบสมการโดยเมทริกซ์แต่งเติม | 481 |
| • (Augmented Matrix) | |
| • หา A^{-1} โดยเมทริกซ์แต่งเติม | 484 |

487

บทที่ 17 เวกเตอร์

| | |
|------------------------------------|-----|
| • เวกเตอร์ 2 มิติเบื้องต้น | 488 |
| • การบวก ลบ คูณ เวกเตอร์ | 491 |
| • เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector) | 494 |
| • การ dot เวกเตอร์ | 497 |
| • การ Cross เวกเตอร์ | 505 |
| • เวกเตอร์ 3 มิติ | 507 |
| • การ Cross เวกเตอร์ใน 3 มิติ | 509 |
| • การหามุมแสดงทิศทางของเวกเตอร์ | 514 |
| • สูตรพื้นที่และปริมาตร | 516 |

บทที่ 18 เขต

521

| | |
|------------------------------|-----|
| • พื้นฐานของเขต | 522 |
| • สี่เหลี่ยม | 524 |
| • เหาเวอร์เซต | 528 |
| • แผนภาพของเวอเรน - ออชเลอร์ | 531 |

เกี่ยวกับผู้เขียน

540

1

ตรี
โกณ
มิติ



P'แอน



น้อง A



น้อง B

ในสมัย ม.ต้น เราได้เรียนตรีโกณมิติพื้นฐาน
มาแล้วนะคะ ใน ม.ปลายเนื้อหาจะเข้มข้นขึ้น
ซึ่งในบทนี้จะมี 14 หัวข้อให้ศึกษากัน
โดยจะเริ่มจากการทบทวนตรีโกณมิติพื้นฐาน
สูตรตรีโกณ ม.ปลาย และกราฟตรีโกณมิติค่ะ

01.

ตรีโกณมิติพื้นฐาน

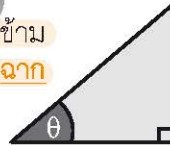


สูตรที่ต้องจำ ..

$$\sin \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$$

ด้านตรงข้ามมุมฉาก



ด้านตรงข้ามมุมที่เราอยากรู้

ด้านชิดมุมที่เราอยากรู้

ส่วนที่เหลือน้องก็สามารถหาค่าได้เลย คือ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$

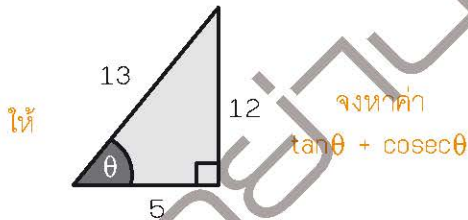
ส่วนกลับของ $\sin \theta$ คือ $\text{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$

ส่วนกลับของ $\cos \theta$ คือ $\text{sec} \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

ส่วนกลับของ $\tan \theta$ คือ $\text{cot} \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$



มาดูวิธีใช้สูตรกัน!



$$\sin \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{12}{13} \quad \text{จะได้} \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{5}{13} \quad \text{จะได้} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

.....

$$\begin{aligned} \text{จากโจทย์ } \tan \theta + \operatorname{cosec} \theta &= \frac{12}{5} + \frac{13}{12} \\ &= \frac{12 \times 12}{5 \times 12} + \frac{13 \times 5}{12 \times 5} \\ &= \frac{144}{60} + \frac{65}{60} \\ &= \frac{209}{60} \end{aligned}$$

◀ Ans

2

เรขาคณิต วิเคราะห์



P'แอน



น้อง A



น้อง B

ในบทนี้เราจะพูดถึงเรขาคณิตวิเคราะห์
ซึ่งจะช่วยให้เราในการคำนวณหาจุด เส้น พื้นที่ ระยะห่าง
จะมีสูตรที่ต้องจำค่อนข้างเยอะนะคะ
แต่ถ้าเราทำโจทย์เยอะ ๆ ก็จำสูตรได้เองค่ะ

01.

จุด จุด จุด : จุดกึ่งกลาง จุดตัดของเส้นมัธยฐาน



สูตรที่ต้องจำ ..

$$\text{จุดกึ่งกลางของเส้นตรง} = \left(\frac{\text{ผลบวกของ } x}{2}, \frac{\text{ผลบวกของ } y}{2} \right)$$

ถ้ามีเส้นตรง 1 เส้น ชื่อว่า “ส่วนของเส้นตรง กข” ถูกแบ่งเป็น
กค = คข

อยากรู้ว่าจุด  อยู่ที่ตำแหน่งใด เราก็จะใช้สูตรข้างต้นหาคะจะ



จุด ก (x_1, y_1) **จุด ค ?** จุด ข (x_2, y_2)

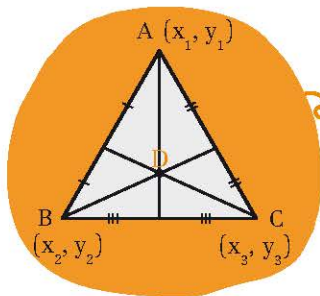
$$\text{จุด ค} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



และถ้าเปลี่ยนใจทงไปหาจุดตัดของ
เส้นมัธยฐาน ของสามเหลี่ยม ก้ง่าย ๆ
เหมือนกันเลย ถ้าให้ $\triangle ABC$ มีจุดตัด
ของเส้นมัธยฐานคือจุด D
จะหาจุด D โดย

สูตรที่ต้องจำ ..

$$\text{จุดตัดของเส้นมัธยฐาน} = \left(\frac{\text{ผลบวกของ } x}{3}, \frac{\text{ผลบวกของ } y}{3} \right)$$



$$\text{จุด } D = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

หาวิธีใช้สูตรกัน !

ตัวอย่างที่ 1

จงหาจุดกึ่งกลางของ \overline{AB} เมื่อกำหนดจุด $A (-2, 2)$ และ $B (0, -4)$

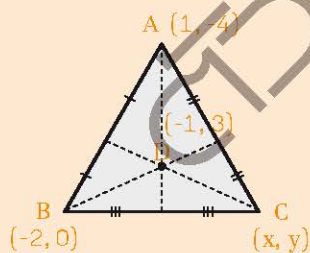
$$\begin{aligned} \text{จุดกึ่งกลางของเส้นตรง} &= \left(\frac{-2 + 0}{2}, \frac{2 + (-4)}{2} \right) \\ &= (-1, -1) \end{aligned}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 2

ให้จุดตัดของเส้นมัธยฐานของ $\triangle ABC$ คือ $(-1, 3)$

มีจุด $A (1, -4)$ จุด $B (-2, 0)$ จงหาจุด C



จุดตัดของเส้นมัธยฐาน

$$= \left(\frac{1 + (-2) + x}{3}, \frac{(-4) + 0 + y}{3} \right)$$

$$(-1, 3) = \left(\frac{-1 + x}{3}, \frac{-4 + y}{3} \right)$$

คิดค่า x

$$-1 = \frac{-1 + x}{3}$$

$$(-1)(3) = -1 + x$$

$$x = -3 + 1 = -2$$

คิดค่า y

$$3 = \frac{-4 + y}{3}$$

$$3(3) = -4 + y$$

$$y = 9 + 4 = 13$$

\therefore จุด C คือ $(-2, 13)$

Ans

3

อนุพันธ์
ของ
ฟังก์ชัน



P'แอน



น้อง A

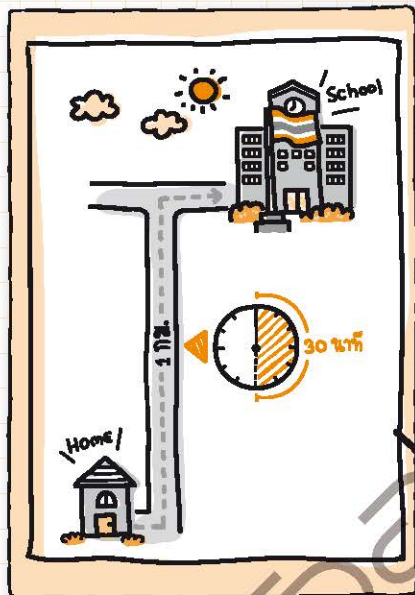


น้อง B

บทนี้เป็นเรื่องใหม่ แต่เราจะใช้บทนี้ไปถึงตอนเรียนในมหาวิทยาลัยเลยล่ะ ตั้งใจอ่านและทำความเข้าใจในบทเรียนนะ พี่จะอธิบายในหัวข้ออัตราการเปลี่ยนแปลง สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ความชันและเส้นสัมผัสเส้นโค้ง วิธีหาค่าจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดสัมพัทธ์ วิธีหาค่าจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดสัมบูรณ์ ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด ฟังก์ชันคอมโพสิท และโจทย์อนุพันธ์

01.

อัตราการเปลี่ยนแปลง



การเปลี่ยนแปลงส่วนใหญ่ เรามักเทียบกับเวลาที่เปลี่ยนไป เช่น เราเดินจากโรงเรียนกลับมาถึงบ้านใช้เวลา 30 นาที ด้วยระยะทาง 1 กิโลเมตร เราสามารถคำนวณอัตราการเปลี่ยนแปลงเป็น 1 กิโลเมตรต่อเวลา 30 นาที ดังนั้น เราจะเรียกการเปลี่ยนแปลงที่เกี่ยวกับช่วงเวลว่า "อัตราการเปลี่ยนแปลง"



อัตราการเปลี่ยนแปลง มี 2 แบบ คือ

อัตราการเปลี่ยนแปลง 2 แบบ

- 1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันเทียบกับ x ช่วง

$x = A$ ถึง $x = B$ คือ
$$\frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

- 2) อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ x ใด ๆ ของ y เทียบกับ x

คือ
$$f'(x) = \lim_{(B-A) \rightarrow 0} \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

02.

อัตราการเปลี่ยนแปลง ประยุกต์กับฟิสิกส์



ให้สมการการเคลื่อนที่ $s = f(t)$ หา...

1) เฉลี่ย

2) ขณะใด ๆ

1) เฉลี่ย

ความเร็วเฉลี่ยช่วงเวลา t_1 ถึง $t_2 = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$

เพราะความเร็ว คือ การเปลี่ยนแปลงระยะทางหารด้วยเวลาที่เปลี่ยนแปลงไป

ความเร่งเฉลี่ยช่วงเวลา t_1 ถึง $t_2 = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$

เพราะความเร่ง คือ การเปลี่ยนแปลงความเร็วหารด้วยเวลาที่เปลี่ยนแปลงไป

อัตราความเร็วเฉลี่ย = ค่าสัมบูรณ์ของความเร็วเฉลี่ย

$$= \left| \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \right|$$

อัตราความเร่งเฉลี่ย = ค่าสัมบูรณ์ของความเร่งเฉลี่ย

$$= \left| \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \right|$$

2) ขณะใด ๆ

จะมีแนวคิดเกี่ยวกับความเร็วเฉลี่ย แต่เราจะให้เวลาที่เปลี่ยนแปลงไปเปลี่ยนแปลงน้อยมาก ๆ จนเราถือได้ว่ามันเป็นแค่เพียงจุดจุดหนึ่ง

$$\text{ความเร็ว ณ ขณะเวลาใด ๆ} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{f(t+A) - f(t)}{A} = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

$$\begin{aligned} \text{ความเร่ง ณ ขณะเวลาใด ๆ} &= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{v(t+A) - v(t)}{A} = \frac{dv}{dt} = v'(t) \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{อัตราเร็ว ณ ขณะเวลาใด ๆ} &= \text{ค่าสัมบูรณ์ของความเร็ว ณ ขณะใด ๆ} \\ &= \left| \lim_{A \rightarrow 0} \frac{f(t+A) - f(t)}{A} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right| = |f'(t)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{อัตราเร่ง ณ ขณะเวลาใด ๆ} &= \text{ค่าสัมบูรณ์ของความเร่ง ณ ขณะใด ๆ} \\ &= \left| \lim_{A \rightarrow 0} \frac{v(t+A) - v(t)}{A} \right| = \left| \frac{dv}{dt} \right| = |v'(t)| \\ &= \left| \frac{d^2s}{dt^2} \right| = |s''(t)| \end{aligned}$$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x + 1 \\ &\text{หมายถึงฟังก์ชัน} \\ f(x) &\text{ดิฟแล้วมีค่าเป็น} \\ &5x + 1 \text{ หรือ} \\ \frac{d}{dx} f(x) &= 5x + 1 \end{aligned}$$



4

อินทิกเรต



P'แอน



น้อง A



น้อง B

ในบทนี้แม้ชื่อจะแปลก ๆ แต่บอกเลยว่าอ่านจบบท
ทำโจทย์ได้แน่นอนค่ะ พี่จะอธิบายในส่วนของสูตรอินทิกเรต
การหาพื้นที่ปิดล้อม และการประยุกต์นำสูตรไปใช้
กับโจทย์ต่าง ๆ นะคะ

01.

สูตรอินทิเกรต

อินทิเกรต หรือในภาษาไทยเรียกว่า
ปฏิยานุพันธ์ คือ การคิด 3 แบบค่ะ

- 1 เป็นวิธีการคำนวณพื้นที่ใต้กราฟ
- 2 เป็นการคิดย้อนกลับของการดิฟ (อนุพันธ์)
- 3 เป็นการเพิ่มค่าตัวแปรในสมการและหาร
ด้วยเลขชี้กำลังที่เพิ่มขึ้นบวกด้วยค่าคงที่



โดย

$$y = x^n \text{ เมื่อ } n \neq -1$$

$\int y \, dx = \int x^n \, dx$; เครื่องหมาย $\int \dots dx$ เรียกว่า “อินทิเกรต”

$$\int y \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงที่}$$



อ้อ!!
แล้วสูตรการ
อินทิเกรต
มีเยอะไหมคะ



ไม่เยอะจะ
ถ้าเข้าใจก็ทำได้
ง่าย ๆ เลย
อินทิเกรต
มีสูตรตามนี้



- 1) $\int 1 dx = x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
- 2) $\int k dx = kx + c$ เมื่อ k และ c เป็นค่าคงที่
- 3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$ และ c เป็นค่าคงที่
- 4) $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่
(ดึงค่าคงที่ออกนอกการอินทิเกรตได้)
- 5) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- 6) $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
(อินทิเกรตสามารถกระจายเข้าไปได้ในผลบวกและผลต่าง แต่ในผลคูณกับผลหาร ห้ามกระจายเข้าไป)



มาดูวิธีใช้สูตรกัน!

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int 5 \, dx$

วิธีทำ

$$\int 5 \, dx = 5x + c \quad \text{Ans}$$

.....

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int x^3 \, dx$

วิธีทำ

$$\int x^3 \, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c \quad \text{Ans}$$

.....

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int 6x^4 \, dx$

วิธีทำ

$$\int 6x^4 \, dx = \frac{6x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{6x^5}{5} + c \quad \text{Ans}$$

5

ลำดับ
และ
อนุกรม



P'แอน



น้อง A



น้อง B

ลำดับและอนุกรม เป็นเรื่องที่เราเคยเจอมาแล้ว
ตอนสอบเข้าโรงเรียนประถมและ ม.ต้น
แต่ในระดับ ม.ปลาย ความยากจะเพิ่มมากขึ้น
ซึ่งพีจะอธิบายในส่วนของลำดับและอนุกรม ลิมิตของลำดับ
และการนำไปใช้ ในรายละเอียดย่อย ๆ นะคะ

01.

ลำดับ

1, 2, 3, ...?



เราเคยเจอโจทย์ให้หาคำถัดไปจาก 1, 2, 3, ... ? ไหมคะ คำตอบก็คือ 4 นั่นเอง เราจะเรียกการเรียงแบบนี้ว่า "ลำดับ" นั่นเอง

ลำดับแสดงในรูป a_n โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 1, 2, 3, ... แบ่งเป็น 2 แบบ คือ

แบบที่ 1

ลำดับเลขคณิต

“ลำดับที่ผลต่างของพจน์ติดกัน เป็นค่าคงที่ เรียกว่า d ”

$$\text{เช่น } a_{\text{ขวา}} - a_{\text{ซ้าย}} = d$$

$d \Rightarrow$ ผลต่างร่วม

แบบที่ 2

ลำดับเรขาคณิต

“ลำดับที่ผลหารของพจน์ที่ติดกัน เป็นค่าคงที่ เรียกว่า r ”

$$\text{เช่น } \frac{a_{\text{ขวา}}}{a_{\text{ซ้าย}}} = r$$

$r \Rightarrow$ อัตราส่วนร่วม

อ้อ! มี 2 แบบนี้เอง พี่แอนคะแล้วจะแยก แต่ล่ะอย่างว่าเป็น ลำดับเลขคณิตหรือ ลำดับเรขาคณิต ได้ยังไงคะ



มาดู ตัวอย่าง กันนะจ๊ะ

ลำดับเลข คณิต VS ลำดับเรขาคณิต

ขนาดตัวอย่างกัน

ตัวอย่างที่ 1 2, 5, 8, 11, เป็นลำดับอะไร ?

มองจาก ขว - ซ้าย เช่น $5-2, 8-5, 11-8$

จากการมองผลต่างระหว่าง 2, 5, 8, 11,
มีค่าเท่ากัน ซึ่งเท่ากับ 3

จะได้ ผลต่างร่วม $d = 3$

ดังนั้น จึงเป็น ลำดับเลขคณิต

.....

ตัวอย่างที่ 2 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ เป็นลำดับอะไร ?

จากการมองผลต่าง $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{4}, \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{8}, \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = \frac{-1}{16}$$

ผลต่างไม่เท่ากัน ดังนั้น จึงไม่เป็น ลำดับเลขคณิต

มองจาก ขว ÷ ซ้าย เช่น $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \div \frac{1}{4}, \frac{1}{16} \div \frac{1}{8}$

จากการมองอัตราส่วน $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

มีค่าเท่ากัน ซึ่งเท่ากับ $\frac{1}{2}$

จะได้ อัตราส่วนร่วม $r = \frac{1}{2}$

ดังนั้น จึงเป็น ลำดับเรขาคณิต



แบบที่ 1
ลำดับเลขคณิต

ผลต่างร่วม = ขว - ซ้าย

$$d = a_{n+1} - a_n$$

พจน์ทั่วไป $a_n = a_1 + (n-1)d$

แบบที่ 2
ลำดับเรขาคณิต

อัตราส่วนร่วม = ขว ÷ ซ้าย

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

พจน์ทั่วไป $a_n = a_1 r^{n-1}$

- ☀ โดยที่ n คือ จำนวนพจน์
- d คือ ผลต่างร่วม
- r คือ อัตราส่วนร่วม

$$\int dx = x + c$$

$$\lim_{x \rightarrow a}$$

รวมสูตรเก่งคณิต

พืชิต ADMISSION

และเตรียมตัวสอบ ม.4-5-6

โดยตัวต่อ ANN

พร้อมสุดยอดเคล็ดลับ

จำสูตรเป๊ะเวอร์!

$$\sum_{i=1}^n c$$

SMART⁺⁺

ISBN 978-616-7972-08-4

ราคา 250 บาท