



ขายดี! พิมพ์ครั้งที่ 3



# ตะลุย โจทย์ คณิตศาสตร์ A-Level

- ♥ ฝึกทบทวน ข้อสอบ
- ♥ เตรียมความพร้อมในทุกสนามสอบ

**พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร**

ติวต่อวิชาคณิตศาสตร์และฟิสิกส์  
ประสบการณ์ติวมากกว่า 20 ปี



# ตะลุยโจทย์คณิตศาสตร์ A-Level

โดย พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร



สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย โดย พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร © พ.ศ. 2566

ห้ามคัดลอก ลอกเลียน ตัดแปลง ทำซ้ำ จัดพิมพ์ หรือกระทำการอื่นใด โดยวิธีการใด ๆ ในรูปแบบใด ๆ  
ไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ เพื่อเผยแพร่ในสื่อทุกประเภท หรือเพื่อวัตถุประสงค์ใด ๆ

## ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร.

ตะลุยโจทย์คณิตศาสตร์ A-Level. -- พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น, 2565.  
244 หน้า.

1. คณิตศาสตร์--การศึกษาและการสอน (มัธยมศึกษา). I. ชื่อเรื่อง.  
510.76

Barcode (e-book) : 9786160847006

จัดจำหน่ายโดย



เลขที่ 1858/87-90 ถนนเทพรัตน แขวงบางนาใต้ เขตบางนา กรุงเทพฯ 10260  
โทรศัพท์ 0-2826-8000

หากมีคำแนะนำหรือติชม สามารถติดต่อได้ที่ [comment@se-ed.com](mailto:comment@se-ed.com)



## คำนำ

คู่มือ **ตะลุยโจทย์คณิตศาสตร์ A-Level** ฉบับทบทวนก่อนสอบด้วยความมั่นใจ ครูได้เรียบเรียงขึ้นให้นักเรียนได้นำข้อสอบทั้ง 5 ชุดนี้ไปฝึกฝนเพื่อทำให้เกิดทักษะ ความชำนาญและแม่นยำมากขึ้น จนทำให้เกิดทักษะกระบวนการคิดที่ถูกต้อง สำหรับ ครูและผู้ปกครองนักเรียนที่สนใจสามารถนำเครื่องมือชุดนี้ไปใช้ในการสอน สอบ ตัวนักเรียนให้เกิดความรู้ ความเข้าใจ สร้างเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ จนสามารถ ประสบความสำเร็จในการสอบเข้ามหาวิทยาลัยได้

ครูได้คัดสรร ประยุกต์ พลิกแพลงข้อสอบในแนวที่ข้อสอบจริงมักออกบ่อยๆ ใน แต่ละปี ขอให้นักเรียนได้ตั้งใจทำตามคำแนะนำที่ให้ไว้ ผู้เขียนเชื่อว่านักเรียนจะสามารถ ทำข้อสอบได้แน่นอน ขอให้นักเรียนพยายามสู้ๆ อดทนต่อปัญหา และความยากของ ข้อสอบเหล่านี้ไปได้

ครูหวังเป็นอย่างยิ่งว่า คู่มือชุดนี้จะสามารถพัฒนาให้นักเรียนเกิดความรู้ ความ เข้าใจ และเกิดความคิดรวบยอดที่ถูกต้องด้วยตนเองในทางคณิตศาสตร์ ณ โอกาสนี้ ครูขอเป็นกำลังใจให้นักเรียนทุกคนที่ตั้งใจ และฟันฝ่ากับการเรียนมาตลอด จงประสบ ผลสำเร็จกันทุกคน ถ้าหนังสือเล่มนี้มีข้อผิดพลาดประการใด ครูขอน้อมรับการติชมด้วย ความยินดียิ่ง และขอขอบคุณทุกท่านที่สนับสนุนงานเขียนด้วยดีมาโดยตลอด

ด้วยความปรารถนาดี

**พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร**







# สารบัญ

คำแนะนำเกี่ยวกับคู่มือเล่มนี้

7

ชุดที่ 1

พื้นฐานสุดๆ ทุกข้อต้องอยู่หมัด!  
พร้อมเฉลย (จำนวน 45 ข้อ)

9

ชุดที่ 2

ทักษะพอมือ คิดแล้วสนุกจัง  
พร้อมเฉลย (จำนวน 45 ข้อ)

55

ชุดที่ 3

ใกล้ถึงความจริง อดทนเข้าไว้  
พร้อมเฉลย (จำนวน 45 ข้อ)

101

ชุดที่ 4

เริ่มยากจริงแฮะ! สู้ไหวรีเปล่า?  
พร้อมเฉลย (จำนวน 45 ข้อ)

144

ชุดที่ 5

โอโฮ! Step ขั้นเทพ มั่นใจเกินร้อย  
พร้อมเฉลย (จำนวน 45 ข้อ)

193



# คำแนะนำในการใช้คู่มือเล่มนี้



**คู่มือ**เล่มนี้ ประกอบด้วยโจทย์แนวใหม่ หลากหลายรูปแบบ เหมาะกับนักเรียนที่เตรียมสอบเข้ามหาวิทยาลัยเป็นอย่างมาก ผู้เขียนได้คัดสรรและเน้นเฉพาะจุดที่ข้อสอบมักนำมาออกข้อสอบมากที่สุด ในรูปแบบที่ง่ายและสะดวกต่อการอ่านทบทวน ฝึกฝนให้เข้าใจจนชำนาญ มีชุดเก็งข้อสอบทั้งหมด 5 ชุด แต่ละชุดได้เฉลยหลักการคิดไว้อย่างละเอียด ดังนี้

## ชุดที่ 1 พื้นฐานสุดๆ ทุกข้อต้องอยู่หมัด!

(ข้อสอบส่วนมากอยู่ในระดับง่าย)

ชุดนี้นักเรียนควรทำทุกข้อให้เข้าใจอย่างถ่องแท้ เพื่อเป็นพื้นฐานในการทำข้อสอบชุดต่อไป ถ้าไม่เข้าใจให้ดูเฉลยประกอบ

## ชุดที่ 2 ทักษะพอมิ คิดแล้วสนุกจัง! (ข้อสอบระดับง่าย)

ชุดนี้นักเรียนควรพยายามทำด้วยตนเองให้ได้มากที่สุด ถ้าไม่เข้าใจในประเด็นใดก็สามารถดูเฉลยคร่าวๆ ได้ แล้วกลับมาทำใหม่ให้ได้ด้วยตนเอง

## ชุดที่ 3 ใกล้ถึงความจริง อดทนเข้าไว้ (ข้อสอบเริ่มยากขึ้นในระดับปานกลาง)

ข้อสอบชุดนี้ขอให้นักเรียนพยายามและตั้งใจทำให้ได้ทุกข้อ เพราะเป็นข้อสอบที่เริ่มใกล้เคียงกับข้อสอบจริงมาก ขอให้นักเรียนอดทนและพยายามให้มาก ครูเอาใจช่วย ลู้ๆ....นะ ความสำเร็จอยู่ไม่ไกล

## ชุดที่ 4 เริ่มยากจริงแฮะ! ลู้โหรีเปล่า? (ข้อสอบส่วนมากยากนะ)

ข้อสอบชุดนี้ขอให้นักเรียน อดทน และพยายามทำให้ได้ แม้จะยากนิดนึง แต่ก็ เป็นแนวที่ข้อสอบชอบออกมากๆ โดยดูเฉลยประกอบเป็นบางข้อให้เข้าใจ ครูเชื่อว่านักเรียนทุกคนทำได้แน่นอน ครูเป็นกำลังใจให้นะ ลู้ๆ อีกครั้ง

## ชุดที่ 5 โอ้โฮ! Step ขั้นเทพ มั่นใจเกินร้อย (ข้อสอบยากเสมือนจริง)

ขอให้นักเรียนพยายามทำด้วยตนเองให้ได้ทุกข้อ ถ้าดูเฉลยไม่เข้าใจในบางข้อ ควรจะถามเพื่อนๆ ที่มีความถนัด หรือครูผู้สอนในห้องเรียน อธิบายให้ฟัง



## คำแนะนำเพิ่มเติม

ในการทำข้อสอบแต่ละข้อ เพื่อให้ง่าย และสะดวกต่อการฝึกฝน ครูขอแนะนำให้นักเรียนหากระดาษมาปิดส่วนเฉลยไว้ก่อน เราจะมองเห็นเฉพาะตัวข้อสอบพร้อมพื้นที่สำหรับทดเท่านั้น ถ้าดูแล้วไม่เข้าใจนักเรียนควรเปิดเฉลยดูคร่าวๆ แล้วปิดกลับไว้ดังเดิม หลังจากนั้นให้กลับมาทำใหม่ให้ได้ จนเข้าใจอย่างถ่องแท้ ทำในลักษณะเช่นนี้เรื่อยๆ ไป ทุกข้อ ครูเชื่อว่านักเรียนของครูทุกคน ต้องเอาชนะมันได้แน่นอน ตามคำสุภาษิตที่ว่า *Success comes only from hard work!*

ด้วยความจริงใจ

พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร



# ชุดที่ 1

## พื้นฐานสุดๆ ทุกข้อต้องอยู่หมัด

ระดับความยากง่ายของข้อสอบ : **ง่าย**

math



ABC



Wake  
up







## ตอนที่ 1

ข้อสอบชุดนี้มีทั้งหมด 45 ข้อ ใช้เวลาทำ 3 ชั่วโมง  
ข้อ 1 – 30 ข้อละ 6 คะแนน



1 กำหนดให้  $I$  แทนเซตของจำนวนเต็ม ให้

$$A = \{x \in I \mid |2x - 1| \leq 8\}$$

และ

$$B = \{x \in I \mid x^2 - 2x > 3\}$$

แล้ว  $n(A \cap B)$  มีค่าเท่าใด

- 1) 2
- 2) 3
- 3) 4
- 4) 7

เฉลยข้อ 1    **ตอบ 2)**

จาก  $|2x - 1| \leq 8$

จะได้  $-8 \leq 2x - 1 \leq 8$

$$-7 \leq 2x \leq 9$$

$$-3.5 \leq x \leq 4.5 \text{ และ } x \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

ดังนั้น  $x = \{-3, -2, -1, \dots, 3, 4\}$

และจาก  $|x^2 - 2x| > 3$

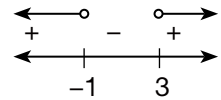
จะได้  $x^2 - 2x < -3$  หรือ  $x^2 - 2x > 3$

$$x^2 - 2x + 3 < 0 \quad | \quad x^2 - 2x - 3 > 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + 2 < 0 \quad | \quad (x - 3)(x + 1) > 0$$

$$(x - 1)^2 + 2 < 0 \quad | \quad x = -1, 3$$

$$\therefore x \neq \emptyset$$



$$\therefore x = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$$

$$\text{หา } A \cap B = \{-3, -2, -1, \dots, 3, 4\} \cap$$

$$(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$$

$$= \{-3, -2, 4\}$$

ดังนั้น  $n(A \cap B) = 3$



2 ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$(x + 1)^{x^2} > (x + 1)^4$$

เมื่อ  $x > -1$  แล้วช่วงในข้อใดเป็นช่วงเซตของ A

- 1)  $(0, \infty)$
- 2)  $(-1, 0) \cup (1, \infty)$
- 3)  $(-4, 0) \cup (1, \infty)$
- 4)  $(-1, 0) \cup [3, \infty)$

Note...



เฉลยข้อ 2 ตอบ 4)

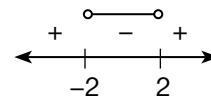
จาก  $(x + 1)^{x^2} > (x + 1)^4$  แบ่งพิจารณาได้ 2 กรณี ดังนี้

I ถ้า  $-1 < x < 0$  จะได้

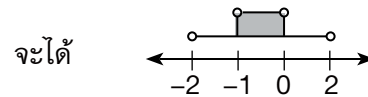
$$(x + 1)^{x^2} > (x + 1)^4$$

$$x^2 < 4$$

$$(x - 2)(x + 2) < 0$$



แต่  $x = (-1, 0)$



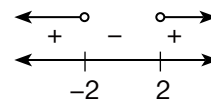
ดังนั้น  $x = (-1, 0)$

II ถ้า  $x > 0$  จะได้

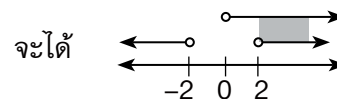
$$(x + 1)^{x^2} > (x + 1)^4$$

$$x^2 > 4$$

$$(x - 2)(x + 2) > 0$$



และ  $x > 0$



ดังนั้น  $x = (2, \infty)$

นั่นคือ คำตอบทั้งหมดของ A คือ

$$(-1, 0) \cup (2, \infty)$$

- 3 กำหนดให้  $U$  เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ  $A$ ,  $B$  และ  $C$  เป็นซับเซตของ  $U$  โดยที่

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5\}$$

และ  $C = (A' - B)'$

จำนวนเซตของ  $X$  โดยที่  $A \subset X \subset C$  มีค่าตรงกับข้อใด

- 1) 4 เซต
- 2) 6 เซต
- 3) 8 เซต
- 4) 16 เซต

- 4 กำหนดให้  $p$  และ  $q$  เป็นประพจน์ ประพจน์ในข้อใดสมมูลกับประพจน์

$$[(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p] \rightarrow (p \rightarrow q)$$

- 1)  $\sim(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- 2)  $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge q)$
- 3)  $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)$
- 4)  $(p \vee \sim q) \vee (\sim p)$

### เฉลยข้อ 3 ตอบ 1)

จาก  $U = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5\}$$

และ  $C = (A' - B)'$

$$= (\{4, 5, 6, 7, 8\} - \{2, 3, 4, 5\})'$$

$$= (\{6, 7, 8\})'$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\therefore C = (A' - B)' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

จะได้จำนวนเซตของ  $X$  โดยที่  $A \subset X \subset C$

$$= 2^{n(C - A)}$$

$$= 2^2 = 4 \text{ เซต}$$

### เฉลยข้อ 4 ตอบ 3)

จาก  $[(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p] \rightarrow (p \rightarrow q)$

$$\equiv [\sim(p \wedge \sim q) \vee \sim p] \rightarrow (\sim p \vee q)$$

$$\equiv \sim[(p \wedge \sim q) \wedge p] \rightarrow (\sim p \vee q)$$

$$\equiv [(p \wedge \sim q) \wedge p] \vee (\sim p \vee q)$$

$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)$$

**สูตรสมมูล ที่ควรจำ**

$$1) \quad p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$2) \quad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$3) \quad \sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$4) \quad p \wedge \sim p \equiv F, p \vee \sim p \equiv T$$



- 5 กำหนดให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง และ  $I$  แทนเซตของจำนวนเต็ม ให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันจาก  $R$  ไป  $R$  โดยที่  $f(x - 2) = x^3 - 2x + 2$  และ  $g^{-1}(2x + 1) = x - 3$  แล้ว  $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$  มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) 1.5
- 2) -2.5
- 3) -3.5
- 4) -4.5

เฉลยข้อ 5    ตอบ 4)

จาก  $f(x - 2) = x^3 - 2x + 2$

จะได้  $f^{-1}(x^3 - 2x + 2) = x - 2$

แทนค่า  $x = 0$

จะได้  $f^{-1}(0^3 - 2(0) + 2) = 0 - 2$

$$\therefore f^{-1}(2) = -2$$

และจาก  $g^{-1}(2x + 1) = x - 3$

จะได้  $(g^{-1} \circ f^{-1})(2) = g^{-1}(f^{-1}(2))$   
 $= g^{-1}(-2)$

$$(\because f^{-1}(2) = -2)$$

หา  $g^{-1}(-2)$

แทนค่า  $x = -\frac{3}{2}$  ลงใน

$$g^{-1}(2x + 1) = x - 3$$

จะได้  $g^{-1}\left(2\left(-\frac{3}{2}\right) + 1\right) = -\frac{3}{2} - 3$

$$\therefore g^{-1}(-2) = -\frac{9}{2} = -4.5$$

ดังนั้น  $(g^{-1} \circ f^{-1})(2) = -\frac{9}{2} = -4.5$





6 กำหนดให้

$$r = \left\{ (x, y) \mid y^2 = \frac{3x^2 - 12}{x^2} \right\}$$

และ  $f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ และ } xy \leq 0\}$

แล้ว  $D_r - R_f$  มีค่าตรงกับข้อใด

- 1)  $(-2, \infty) - \{-3, -4\}$
- 2)  $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
- 3)  $(-2, 2)$
- 4)  $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

เฉลยข้อ 6 ตอบ 2)

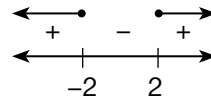
จาก  $r = \left\{ (x, y) \mid y^2 = \frac{3x^2 - 12}{x^2} \right\}$

พบว่า  $y^2 \geq 0$

จะได้  $\frac{3x^2 - 12}{x^2} \geq 0$

$$\frac{3(x^2 - 4)}{x^2} \geq 0$$

$$(x - 2)(x + 2) \geq 0$$

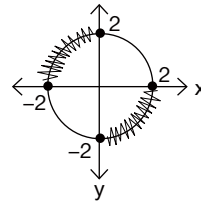


$$\therefore x = D_r = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

และจาก  $f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ และ } xy \leq 0\}$

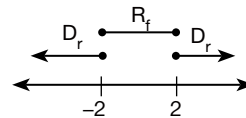
จะได้กราฟของ  $x^2 + y^2 = 4$

$$x^2 + y^2 = 2^2 \text{ และ } xy \leq 0$$



$$\therefore y = R_f = [-2, 2]$$

จะได้  $D_r - R_f$  ดังนี้



ดังนั้น  $D_r - R_f = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$



7 ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

1)  $\frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\sin x}{\operatorname{cosec} x} = 1 - \sin^2 x$

2)  $\cos(A + B) \cos(A - B)$   
 $= \cos^2 A + \sin^2 B$

3)  $\frac{\tan(A - B) + \tan B}{1 - \tan(A - B) \tan B} = \tan A$

4)  $\frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \cot \theta$

เฉลยข้อ 7 ตอบ 3)

1) ผิดเพราะ

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\sin x}{\operatorname{cosec} x} \\ = \cos^2 x + \sin^2 x = 1\end{aligned}$$

2) ผิดเพราะ

$$\begin{aligned}\cos(A + B) \cos(A - B) \\ = (\cos A \cos B - \sin A \sin B)(\cos A \cos B + \sin A \sin B) \\ = \cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B\end{aligned}$$

3) ถูกเพราะ

$$\begin{aligned}\frac{\tan(A - B) + \tan B}{1 - \tan(A - B) \tan B} &= \tan(A - B + B) \\ &= \tan A\end{aligned}$$

4) ผิดเพราะ

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} &= \frac{2\sin \theta \cos \theta}{1 + 2\cos^2 \theta - 1} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \tan \theta\end{aligned}$$



8 ถ้า  $\sec^{-1}x = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{17}} - 2\cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}}$

แล้ว  $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \sec^{-1}x\right)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- 1)  $\frac{13}{16}$
- 2)  $\frac{5}{16}$
- 3)  $\frac{3}{4}$
- 4)  $-\frac{1}{16}$



เฉลยข้อ 8 ตอบ 1)

$$\text{จาก } \cot\left(\frac{\pi}{2} + \sec^{-1}x\right) = -\tan(\sec^{-1}x)$$

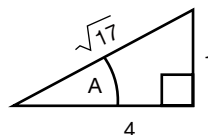
$$= -\tan\left(\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{17}} - 2\cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

↓  
A

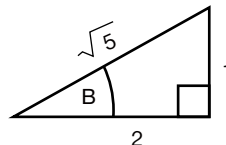
↓  
B

$$= -\left[\frac{\tan A - \tan 2B}{1 + \tan A \tan 2B}\right]$$

$$\text{จาก } A = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{17}}$$



$$\text{และ } B = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}}$$



$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \tan 2B &= \frac{2\tan B}{1 - \tan^2 B} \\ &= \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } & -\left[\frac{\tan A - \tan 2B}{1 + \tan A \tan 2B}\right] \\ &= -\left[\frac{\frac{1}{4} - \frac{4}{3}}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)}\right] \\ &= -\left[-\frac{13}{16}\right] \\ &= \frac{13}{16} \end{aligned}$$

9 เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของสมการวงกลม

$x^2 + y^2 + 4x - 3 = 0$  และผ่านจุดโฟกัสของสมการพาราโบลา  $(x - 3)^2 = 4y - 8$  ตั้งฉากกับสมการเส้นตรงในข้อใด

- 1)  $\frac{-3x + 5y}{2} = -4$
- 2)  $10x + 6y + 5 = 0$
- 3)  $-5x + 3y - 2 = 0$
- 4)  $3x + 5y = -4$

เฉลยข้อ 9 ตอบ 2)

จากสมการวงกลม

$$x^2 + y^2 + 4x - 3 = 0$$

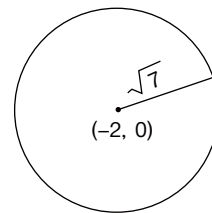
$$(x^2 + 4x) + y^2 = 3$$

$$(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2) + (y - 0)^2 = 3$$

$$(x + 2)^2 + (y - 0)^2 = 3 + 4$$

$$(x + 2)^2 + (y - 0)^2 = \sqrt{7}^2$$

จะได้กราฟดังนี้

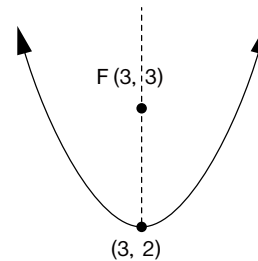


และจากสมการพาราโบลา

$$(x - 3)^2 = 4y - 8$$

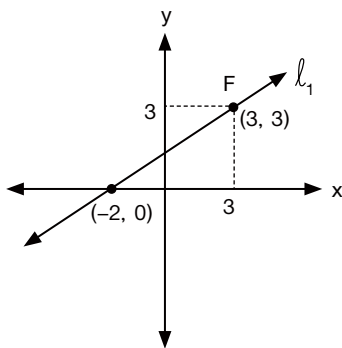
$$= 4(y - 2)$$

$$= 4(1)(y - 2)$$



จะได้เส้นตรงที่ผ่านจุด  $(-2, 0)$  และจุด  $(3, 3)$  ดังนี้





จากสมการ  $l_1$  ;  $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 0 = \left( \frac{3 - 0}{3 - (-2)} \right) (x - (-2))$$

$$y - 0 = \frac{3}{5} (x + 2)$$

$$5y = 3x + 6$$

$$\therefore 3x - 5y + 6 = 0$$

จะได้สมการเส้นตรง  $l_1$  ;  $3x - 5y + 6 = 0$   
ซึ่งตั้งฉากกับสมการในตัวเลือก 2)

เพราะ

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$\frac{3}{5} \times \left( -\frac{5}{3} \right) = -1$$

เมื่อ  $m_1$  แทน ความชันของ  $l_1$

และ  $m_2$  แทน ความชันของ  $l_2$

10 ให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ

$$\left( \frac{3^{1+2x} + 3^{4-2x}}{4} \right) - 61 = 0$$

แล้ว A เป็นับเซตของช่วงในข้อใด

1)  $(-2, 1)$

2)  $(-3, 0)$

3)  $(-1, 1)$

4)  $(-2, 3)$

เฉลยข้อ 10 ตอบ 4)

จาก  $\left( \frac{3^{1+2x} + 3^{4-2x}}{4} \right) - 61 = 0$

$$3 \times 3^{2x} + \frac{3^4}{3^{2x}} = 61 \times 4$$

$$\frac{3(3^{2x})(3^{2x}) + 3^4}{3^{2x}} = 244$$

$$3(3^{4x}) + 3^4 = 244(3^{2x})$$

$$3(3^{4x}) - 244(3^{2x}) + 81 = 0$$

$$(3 \cdot 3^{2x} - 1)(3^{2x} - 81) = 0$$

จะได้  $3 \cdot 3^{2x} - 1 = 0$

หรือ  $3^{2x} - 81 = 0$

$$3^{2x} = 3^{-1} \quad \left| \quad 3^{2x} = 81 \right.$$

$$2x = -1 \quad \left| \quad 3^{2x} = 3^4 \right.$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \quad \left| \quad \therefore x = \frac{4}{2} = 2 \right.$$

ดังนั้น  $x = \left\{ -\frac{1}{2}, 2 \right\}$





- 11 กำหนดให้  $A$  เป็นเมทริกซ์ ขนาด  $3 \times 3$  และ  $\det A \neq 0$  แล้ว  $\det (2\text{adj}(A^{-1}))$  มีค่าตรงกับข้อใด

- 1)  $\frac{8}{(\det A)^2}$
- 2)  $-(8\det A)^2$
- 3)  $\frac{2}{(\det A)^3}$
- 4)  $2\det^4 A$

**เฉลยข้อ 11**    **ตอบ 1)**

$$\begin{aligned}
 &\text{จาก } \det (2\text{adj}(A^{-1})) \\
 &= 2^3 \det [(A^{-1})^{-1} \det (A^{-1})] \\
 &= 8\det [A \det A^{-1}] \\
 &= 8\det \left[ A \left( \frac{1}{\det A} \right) \right] \\
 &= \frac{8}{(\det A)^3} (\det A) \\
 &= \frac{8}{(\det A)^2}
 \end{aligned}$$



**สมบัติที่ควรจำ**

ให้  $A, B$  เป็นเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  และ  $K \in \mathbb{R}$

- 1)  $\det (KA) = K^n \det A$
- 2)  $\det (A^K) = (\det A)^K$
- 3)  $\det (B^{-1}) = \frac{1}{\det B}$  ;  $\det B \neq 0$
- 4)  $\det (\text{adj} B) = (\det B)^{n-1}$
- 5)  $\text{adj} A = A^{-1} \det A$

12 กำหนดให้  $f(x)$  เป็นสมการพหุนามกำลังสอง

โดยที่  $f(0) = 1$

และ  $f(x+1) = f(x) + x + 1$

สำหรับจำนวนจริง  $x$  ใดๆ ค่าของ

$\int_{-1}^1 f(x) dx$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1)  $\frac{7}{3}$

2)  $\frac{5}{6}$

3)  $\frac{11}{3}$

4)  $\frac{3}{2}$



เฉลยข้อ 12 ตอบ 1)

ให้  $f(x) = ax^2 + bx + c$

เมื่อ  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริง

จาก  $f(0) = 1$

จะได้  $f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 1 \therefore c = 1$

และจาก  $f(x+1) = f(x) + x + 1$

แทนค่า  $x = 0$  จะได้

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + 0 + 1 \\ &= 1 + 1 \quad (\because f(0) = 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

และแทนค่า  $x = 1$  ลงใน

$$f(x+1) = f(x) + x + 1$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } f(2) &= f(1) + 1 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 \\ &= 4 \quad (\because f(1) = 2) \end{aligned}$$

หา  $f(1)$  และ  $f(2)$

จาก  $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } f(1) &= a(1)^2 + b(1) + 1 \\ 2 &= a + b + 1 \end{aligned}$$

$$a + b = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } f(2) &= a(2)^2 + b(2) + 1 \\ 4 &= 4a + 2b + 1 \end{aligned}$$

$$4a + 2b = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

จาก  $\textcircled{1}$  และ  $\textcircled{2}$  จะได้  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{2}$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

$$\text{นั่นคือ } \int f(x) dx = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x + c$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int_{-1}^1 f(x) dx &= \left( \frac{1}{6}(1)^3 + \frac{1}{4}(1)^2 + 1 + c \right) \\ &\quad - \left( \frac{1}{6}(-1)^3 + \frac{1}{4}(-1)^2 + (-1) + c \right) \\ &= \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + 1 \right) - \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 1 + 1 \\ &= 2\frac{1}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

- 13 กำหนดให้  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ทำให้  
 $|z - 1| = |z + 2|$  และ  $\left|z + \frac{1}{2}\right| = 2$   
 ค่าของ  $|\bar{z}| + |z|$  มีค่าเท่ากับข้อใด

1)  $\sqrt{11}$

2)  $\sqrt{13}$

3)  $\sqrt{17}$

4)  $\sqrt{19}$



**เฉลยข้อ 13**    **ตอบ 3)**

ให้  $z = a + bi$  จาก  $|z - 1|$

$$\text{จาก } |z - 1| = |z + 2|$$

$$|a + bi - 1| = |a + bi + 2|$$

$$|(a - 1) + bi| = |(a + 2) + bi|$$

$$\sqrt{(a - 1)^2 + b^2} = \sqrt{(a + 2)^2 + b^2}$$

$$(a - 1)^2 = (a + 2)^2$$

$$a^2 - 2a + 1 = a^2 + 4a + 4$$

$$6a = -3$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

และจาก  $\left|z + \frac{1}{2}\right| = 2$

จะได้  $\left|a + bi + \frac{1}{2}\right| = 2$

$$\sqrt{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + b^2} = 2$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง;

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = 4$$

แทนค่า  $a = -\frac{1}{2}$

จะได้  $b^2 = 4$

$$\therefore b = 2, -2$$

นั่นคือ  $z = -\frac{1}{2} + 2i$

หรือ  $z = -\frac{1}{2} - 2i$

จะได้  $|\bar{z}| = \left|-\frac{1}{2} - 2i\right|$

หรือ  $|\bar{z}| = \left|-\frac{1}{2} + 2i\right|$

$$\begin{aligned}\therefore |\bar{z}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2}\end{aligned}$$



14 กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$\left(49^{\frac{1}{4} \log_{\frac{1}{7}} 3 - \frac{1}{2}}\right)^2 = (441)^{-\log x}$$

แล้ว A เป็นซับเซตในช่วงคำตอบของข้อใด

- 1)  $(-3, 3)$
- 2)  $(-1, 5)$
- 3)  $(-2, 0)$
- 4)  $\left(-1, \sqrt{2}\right)$



และพบว่า  $|\bar{z}| = |z|$

$$\text{ดังนั้น } |\bar{z}| + |z| = \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17}$$



สมบัติที่ควรรู้

ให้ Z เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$1) |\bar{z}| = |z|$$

$$2) |z \cdot \bar{z}| = |z|^2$$

$$3) |\bar{z}| + |z| = 2|z|$$

เฉลยข้อ 14 ตอบ 2)

$$\begin{aligned} \text{จาก } \left(49^{\frac{1}{4} \log_{\frac{1}{7}} 3 - \frac{1}{2}}\right)^2 &= \left(7^{2\left(\frac{1}{4}\right) \log_{7^{-1}} 3 - \frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= \left(7^{-\frac{1}{2} \log_7 3 - \frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= \left(7^{\log_7 3^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= \left(3^{-\frac{1}{2}} \times 7^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= \left(21^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= 21^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{และ } (441)^{-\log x} = 21^{-2 \log x}$$

$$\text{จะได้ } 21^{-2 \log x} = 21^{-1}$$

$$\text{นั่นคือ } -2 \log x = -1$$

$$\log x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

$$\text{ดังนั้น } A = \left\{\sqrt{10}\right\} \approx \left\{3.16\right\}$$

15 จงหาค่าของ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \right)$$

มีค่าตรงกับข้อใด

- 1) 1
- 2) 0
- 3) -1
- 4) 2

เฉลยข้อ 15 ตอบ 1)

$$\begin{aligned} \text{จาก } & \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(n(n+1))^2 + 2n^2 + 2n + 1}{(n(n+1))^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(n(n+1))^2 + (2n(n+1)) + 1}{(n(n+1))^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(n(n+1) + 1)^2}{(n(n+1))^2}} \\ &= \left| \frac{n(n+1) + 1}{n(n+1)} \right| \\ &= \left| 1 + \frac{1}{n(n+1)} \right| \\ &= \left| 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (\because n \in \mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$



# ตะลุยโจทย์ คณิตศาสตร์ A-Level

ได้เล่มนี้  
แล้วเลย!



- ชูข้อสอบใน ตะลุยโจทย์คณิตศาสตร์ A-LEVEL เป็นโจทย์
- ที่มีจะนำมาออกสอบบ่อยๆ และเป็นข้อสอบแนวปัจจุบันมากที่สุด
- หากนักเรียนได้ฝึกฝนทำทุกข้อจนเข้าใจ เชื่อว่าชัยชนะ
- จะเป็นของทุกคนอย่างแน่นอน

ประวัติผู้เขียน **พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิตร**

การศึกษา

- ปริญญาตรี โครงการคุรุทายาท วิชาเอกการประถมศึกษา วิชาโทวัดผลการศึกษา มหาวิทยาลัยมหาสารคาม
- ปริญญาตรี วิชาเอกการมัธยมศึกษา (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
- ปริญญาโท ด้านหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

ตำแหน่ง

- ครู ค.ศ. 3 อาจารย์พิเศษ โรงเรียนเทพศิรินทร์พญาสุพรรณ
- เจ้าของโรงเรียนกวดวิชาศรีวิตร

ผลงาน

- มีประสบการณ์กวดวิชาคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ มากกว่า 20 ปี

พร้อมจำหน่ายในรูปแบบ

- ☐ e-book ☐ audio CD / MP3 ☐ audiobook  
☒ ปกอ่อน ☐ LARGE PRINT (ตัวอักษรขนาดใหญ่)



www.se-ed.com



sbc.fans



SE-ED Publisher

- |                                           |                                      |
|-------------------------------------------|--------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> อนุบาล           | <input type="checkbox"/> ประถม       |
| <input checked="" type="checkbox"/> มัธยม | <input type="checkbox"/> ผู้ใหญ่     |
| <input type="checkbox"/> Audio CD         | <input type="checkbox"/> สติ๊กเกอร์  |
| <input type="checkbox"/> MP3              | <input type="checkbox"/> บัตรคำศัพท์ |
| <input type="checkbox"/> DVD              | <input type="checkbox"/> ระบายสี     |
| <input type="checkbox"/> โปสเตอร์         | <input type="checkbox"/> คู่มือสอน   |

ISBN 978-616-08-4700-6



9 786160 847006

199 บาท

ตะลุยโจทย์คณิตศาสตร์ A-Level

หมวด : คู่มือเรียน-สอบ / มีรูปแบบลาย-คณิตศาสตร์