

คณิตศาสตร์

ม.4

เล่ม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551



ผู้เรียบเรียง

สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

65.-

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง ดร.สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

ผู้ตรวจ รศ.นงนุช สุขวารี
ผศ. ดร.สุชัย ตันยอชัยวัฒน์
สุพดี มงคลจินดาวงศ์

บรรณาธิการ ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย.

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เล่ม 2.-กรุงเทพฯ : แม็คเอดูเคชั่น, 2561.

180 หน้า.

1. คณิตศาสตร์-การศึกษาและการสอน (มัธยมศึกษา).

I. ชื่อเรื่อง.

510.76

ISBN 978-616-274-927-8

พิมพ์ครั้งที่ 1

จำนวน 20,000 เล่ม

สงวนลิขสิทธิ์ : เมษายน 2561

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย ห้ามลอกเลียน ไม่ว่าจะเป็นส่วนหนึ่งส่วนใด
ของหนังสือเล่มนี้ นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษร

จัดทำโดย

MAC EDUCATION

ส่งชานดิสง่าย ไปรษณีย์ลาดพร้าว

ในนาม บริษัท แม็คเอดูเคชั่น จำกัด

9/99 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว

แขวงจันทระเกษม เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

โทร. 0-2512-0661, 0-2938-2022-7 แฟกซ์ 0-2938-2028

www.MACeducation.com

พิมพ์ที่ : บริษัท 888 อินเทอร์เน็ตกรุ๊ป จำกัด

ฟังก์ชัน

1. ความสัมพันธ์

- 1.1 ผลคูณคาร์ทีเซียน
- 1.2 ความสัมพันธ์
- 1.3 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์
- 1.4 กราฟของความสัมพันธ์
- 1.5 ความสัมพันธ์ผกผัน

5. ฟังก์ชันผกผัน

4. ฟังก์ชันประกอบ

2. ฟังก์ชัน

- 2.1 ความหมายของฟังก์ชัน
- 2.2 รูปแบบการเขียนฟังก์ชัน
- 2.3 การหาค่าของฟังก์ชัน

3. การบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน



ผลการเรียนรู้

1. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน หาฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน
2. ใช้สมบัติของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา

มีเพียงบางความสัมพันธ์
เท่านั้นที่เป็นฟังก์ชัน

นักเรียนจะมีวิธีตรวจสอบ
อย่างไรว่าความสัมพันธ์นั้น
เป็นฟังก์ชันหรือไม่



แนวคิดหลัก

ในชีวิตประจำวันจะพบกับความสัมพันธ์อยู่ตลอดเวลา ซึ่งอาจเป็นความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งสองสิ่ง เช่น การเป็นพ่อ กับลูก การเรียนอยู่ห้องเดียวกัน บุคคลกับเลขประจำตัวประชาชน จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่าความสัมพันธ์คือการจับคู่ระหว่างสิ่งแรกกับสิ่งที่สอง บางความสัมพันธ์เป็นการจับคู่ระหว่างสิ่งแรกตัวเดียวกับสิ่งที่สองหลายตัว หรือการจับคู่ระหว่างสิ่งแรกหลายตัวกับสิ่งที่สองเพียงตัวเดียว แต่บางความสัมพันธ์เป็นการจับคู่ระหว่างสิ่งแรกเพียงตัวเดียวกับสิ่งที่สองเพียงตัวเดียว ในทางคณิตศาสตร์จะเรียกความสัมพันธ์สองแบบหลังนี้ว่า ฟังก์ชัน แนวคิดที่สำคัญของฟังก์ชัน คือ เป็นกฎหรือโปรแกรมที่กำหนดขึ้นเพื่อให้ได้ผลลัพธ์จากสิ่งที่นำเข้า

1. ความสัมพันธ์

1.1 ผลคูณคาร์ทีเซียน



แนวคิดสำคัญ

คู่อันดับเป็นการจับคู่ของสองสิ่งโดยถือลำดับเป็นสำคัญ ถ้ามีเซต 2 เซต คือเซต A และเซต B แล้วเซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมดโดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B เรียกว่า ผลคูณคาร์ทีเซียน โดยสมาชิกตัวหน้าทั้งหมดเรียกว่า โดเมน และสมาชิกตัวหลังทั้งหมดเรียกว่า เรนจ์ เนื่องจากสามารถใช้คู่อันดับแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังได้ จึงกล่าวได้ว่า ความสัมพันธ์คือเซตของคู่อันดับและเป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซตสองเซต

การจับคู่ระหว่างสิ่งสองสิ่งที่มีความสัมพันธ์กัน และเขียนแสดงสิ่งที่มีความสัมพันธ์กันในวงเล็บโดยมีเครื่องหมายจุลภาค $(,)$ คั่นสิ่งเหล่านี้ สิ่งที่ได้เหล่านี้เรียกว่า **คู่อันดับ**

คู่อันดับจะประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัว คือสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลัง โดยที่สมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังสลับที่กันไม่ได้ เพราะการสลับที่ของสมาชิกอาจจะทำให้ความหมายไม่เหมือนกัน เช่น (a, b) คือ คู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเป็น a และสมาชิกตัวหลังเป็น b แต่ (b, a) คือ คู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเป็น b และสมาชิกตัวหลังเป็น a ดังนั้น คู่อันดับ $(1, 2)$ กับคู่อันดับ $(2, 1)$ จึงมีความหมายไม่เหมือนกัน

บทนิยาม คู่อันดับ $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

จะเห็นได้ว่า $(a, b) \neq (b, a)$ ยกเว้น $a = b$ เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า x และ y ที่ทำให้ $(x, 2) = (5, y)$

วิธีทำ จากบทนิยามของการเท่ากันของคู่อันดับ จะได้ว่า

$$(x, 2) = (5, y) \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = 5 \text{ และ } 2 = y$$

$$\text{ดังนั้น } x = 5, y = 2$$

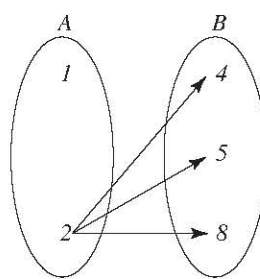
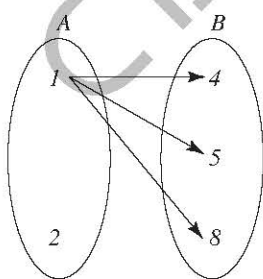
ตอบ

บทนิยาม ถ้าเซต A และเซต B เป็นเซตใดๆ ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B หมายถึง เซตของคู่อันดับทั้งหมดที่สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต A และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต B ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$
นั่นคือ $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$

ทฤษฎีบท $A = \phi$ หรือ $B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \times B = \phi$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $A \times B$ เมื่อกำหนด $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{4, 5, 8\}$

วิธีทำ เขียนแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต A ไปยังสมาชิกของเซต B โดยแยกเป็นกลุ่มได้ 2 กลุ่ม คือ



คู่อันดับกลุ่มที่ 1 ได้แก่ $(1, 4), (1, 5), (1, 8)$ คู่อันดับกลุ่มที่ 2 ได้แก่ $(2, 4), (2, 5), (2, 8)$

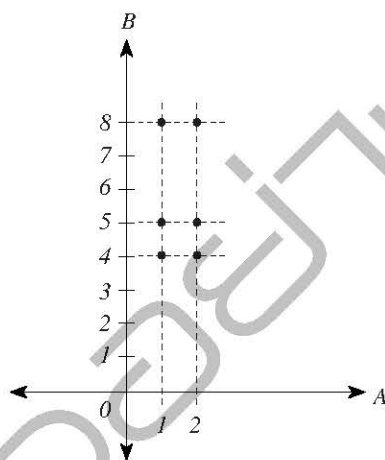
$$\text{ดังนั้น } A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 8), (2, 4), (2, 5), (2, 8)\}$$

นอกจากนี้ยังสามารถแสดงสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ ในรูปตารางได้ดังนี้

A \ B	4	5	8
1	(1, 4)	(1, 5)	(1, 8)
2	(2, 4)	(2, 5)	(2, 8)

จะได้ว่า $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 8), (2, 4), (2, 5), (2, 8)\}$

เนื่องจาก $A \times B$ เป็นเซตของคู่อันดับ ดังนั้นสามารถแสดงจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ ด้วยจุดบนระนาบ ดังนี้



จะได้ว่า $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 8), (2, 4), (2, 5), (2, 8)\}$

ตอบ

ข้อสังเกต

- $B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2), (8, 1), (8, 2)\}$
- เซต A มีสมาชิก 2 ตัว ทำให้มีกลุ่มของคู่อันดับ 2 กลุ่ม
เซต B มีสมาชิก 3 ตัว ทำให้แต่ละกลุ่มมีคู่อันดับ 3 คู่อันดับ
จึงได้ว่า จำนวนสมาชิกในเซต $A \times B$ มี $2 \times 3 = 6$ คู่อันดับ
จำนวนสมาชิกในเซต $B \times A$ มี $3 \times 2 = 6$ คู่อันดับ
แต่เซต $A \times B \neq B \times A$ เนื่องจาก $(1, 4) \in A \times B$ แต่ $(1, 4) \notin B \times A$
- ในกรณีทั่วไป ถ้าเซต A มีสมาชิกจำนวน m ตัว และเซต B มีสมาชิก n ตัว จะได้ว่า
จำนวนสมาชิกของเซต $A \times B$ มี $m \times n$ คู่อันดับ จึงเป็นหนึ่งเหตุผลที่ใช้เครื่องหมายคูณ
เป็นสัญลักษณ์แทนผลคูณคาร์ทีเซียน แต่พึงระวังว่ากรณีนี้จะเป็นจริงเมื่อเซต A และ
เซต B เป็นเซตจำกัดเท่านั้น
- สำหรับเซต A และเซต B ใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะได้ว่า
“ถ้า $A \neq B$ แล้ว $A \times B \neq B \times A$ ”

สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

ให้ A , B และ C เป็นเซตใดๆ

- $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ หรือ $A = \phi$ หรือ $B = \phi$
- $A \times \phi = \phi = \phi \times A$
- $$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$
- $$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$
- $$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$
- ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \times C \subset B \times C$
- ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ B เป็นเซตจำกัด ซึ่ง $B \neq \phi$ แล้ว $A \times B$ เป็นเซตอนันต์

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{3, 7\}$ และ $C = \{\phi\}$ จงหา

$$(1) A \times (B \cup C)$$

$$(2) (A \times B) \cup (A \times C)$$

วิธีทำ

$$(1) B \cup C = \{\phi, 3, 7\}$$

$$A \times (B \cup C) = \{(-1, \phi), (-1, 3), (-1, 7), (0, \phi), (0, 3), (0, 7), (1, \phi), (1, 3), (1, 7)\}$$

ตอบ

$$(2) A \times B = \{(-1, 3), (-1, 7), (0, 3), (0, 7), (1, 3), (1, 7)\}$$

$$A \times C = \{(-1, \phi), (0, \phi), (1, \phi)\}$$

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(-1, \phi), (-1, 3), (-1, 7), (0, \phi), (0, 3), (0, 7), (1, \phi), (1, 3), (1, 7)\}$$

ตอบ

1.2 ความสัมพันธ์

ในวิชาคณิตศาสตร์ ความสัมพันธ์เป็นความเกี่ยวข้องกันของสิ่งสองสิ่งภายใต้กฎเกณฑ์บางอย่างใดอย่างหนึ่ง และสามารถเขียนสิ่งที่สัมพันธ์กันในรูปของคู่อันดับได้

จากเซต $A \times B$ บางครั้งต้องการคู่อันดับในเซต $A \times B$ เฉพาะที่อยู่ในความสนใจเท่านั้น ซึ่งคู่อันดับที่สนใจนี้จะจับคู่กันตามเงื่อนไขหรือความสัมพันธ์ที่เรากำหนดขึ้น เช่น

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 5, 7\}$$

จะได้จำนวนสมาชิกของเซต $A \times B$ ทั้งหมด 12 คู่อันดับ

ถ้าให้ r เป็นเซตของคู่อันดับที่สนใจโดยกำหนด $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$ จะได้ว่า $r = \{(2, 2), (3, 3)\}$ ในกรณีเช่นนี้จะเรียกเซต r ว่า ความสัมพันธ์จาก A ไป B

นอกจากนี้ยังอาจจะกำหนดเงื่อนไขหรือความสัมพันธ์ในลักษณะอื่นได้อีกมากมาย แต่ไม่ว่าจะกำหนดอย่างไรก็จะได้เซตของคู่อันดับที่เรียกว่า ความสัมพันธ์จาก A ไป B เป็นสับเซตของเซต $A \times B$ เสมอ ดังนั้น จึงเขียนบทนิยามของความสัมพันธ์จาก A ไป B ได้ดังนี้

บทนิยาม เรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ และ $r = \{(a, b) \in A \times B \mid b = 2a\}$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จงเขียนเซต r แบบแจกแจงสมาชิก

วิธีทำ กำหนดให้ $(a, b) \in A \times B$ จึงได้ว่า

$$a \in A \text{ และ } b \in B \text{ โดยที่ } b = 2a$$

$$\text{เมื่อ } a = 1 \text{ จะได้ } b = 2(1) = 2$$

$$a = 2 \text{ จะได้ } b = 2(2) = 4$$

$$a = 3 \text{ จะได้ } b = 2(3) = 6$$

$$\text{ดังนั้น } r = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$$

ตอบ

ข้อตกลง

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A จะเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์ในเซต A

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก R ไป R จะเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์ในเซต R

และเมื่อกล่าวถึงความสัมพันธ์ในเซต R อาจจะไว้ในฐานที่เข้าใจว่า r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริงได้ เช่น $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$ อาจจะเขียนแทนด้วย $r = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2x - 1\}$ เป็นความสัมพันธ์ในเซต A จงเขียนเซต r แบบแจกแจงสมาชิก

วิธีทำ จากเซต r จะได้ว่า $(x, y) \in A \times A$ โดยที่ $y = 2x - 1$

$$\text{เนื่องจาก } y = 2x - 1 \text{ โดยที่ } x \in A \text{ และ } y \in A$$

$$\text{เมื่อ } x = 1 \text{ จะได้ } y = 2(1) - 1 = 1 \text{ โดยที่ } 1 \in A$$

$$\text{ดังนั้น } (1, 1) \in r$$

เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = 2(2) - 1 = 3$ โดยที่ $2 \in A$ และ $3 \in A$

ดังนั้น $(2, 3) \in r$

เมื่อ $x = 3$ จะได้ $y = 2(3) - 1 = 5$ โดยที่ $3 \in A$ และ $5 \in A$

ดังนั้น $(3, 5) \in r$

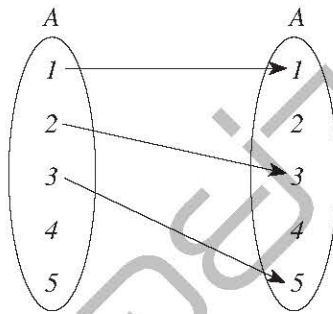
เมื่อ $x = 4$ จะได้ $y = 2(4) - 1 = 7$ โดยที่ $4 \in A$ แต่ $7 \notin A$

ดังนั้น $(4, 7) \notin r$

เมื่อ $x = 5$ จะได้ $y = 2(5) - 1 = 9$ โดยที่ $5 \in A$ แต่ $9 \notin A$

ดังนั้น $(5, 9) \notin r$

เขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้ได้ดังนี้



ดังนั้น เขียนเซต r แบบแจกแจงสมาชิกได้เป็น $r = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5)\}$

ตอบ



แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาค่าของตัวแปร x และ y

(1) $(4, x) = (y, -5)$

(2) $(x+4, 3y-1) = \left(\frac{1}{2}, 11\right)$

2. ถ้า $(x-1, 3y) = (8, x)$ แล้ว $x^3 + y^3$ เท่ากับเท่าไร

3. ถ้า $(-2x, 2y-1) = (1+x^2, 2|y|-1)$ แล้ว x และ y มีค่าเท่ากับเท่าไร

4. กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{a, b, c\}$ จงหา

(1) $A \times A$

(2) $A \times B$

(3) $B \times A$

(4) $B \times B$

5. กำหนดให้ $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ และ $C = \{3, 4, 7\}$ จงหา

(1) $(A \cap B) \times C$

(2) $A \times (B \cap C)$

(3) $(A \cup B) \times (B \cap C)$

6. กำหนดให้ $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ และ $C = \{a, f\}$ จงหา

(1) $(C-A) \times B$

(2) $[(B-A) \cup C] \times (A \cap C)$

7. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

(1) ความสัมพันธ์ “เท่ากับ” จาก A ไป B

(2) ความสัมพันธ์ “มากกว่าหรือเท่ากับ” จาก A ไป B

(3) ความสัมพันธ์ “รากที่สาม” จาก A ไป B

(4) ความสัมพันธ์ “ยกกำลังสอง” จาก A ไป B

8. กำหนดให้ $A = \{x \in I \mid -4 < x < 4\}$ โดยที่ I คือเซตของจำนวนเต็ม r_1, r_2, r_3, r_4 เป็นความสัมพันธ์ใน A จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

(1) $r_1 = \{(x, y) \mid x - y = 0\}$

(2) $r_2 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

(3) $r_3 = \{(x, y) \mid y = 3x\}$

(4) $r_4 = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x}\}$

9. ถ้า $A = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x^y = 1\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของความสัมพันธ์ r เท่ากับเท่าไร

10. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 3, 5\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของความสัมพันธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจาก A ไป $A \cap B$

1.3 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

ในหัวข้อที่ผ่านมานักเรียนทราบแล้วว่า ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จะได้ว่า $r \subset A \times B$ นั่นคือ

$$r = \{(x, y) \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$$

จะเห็นว่าความสัมพันธ์ r เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ (x, y) ซึ่งสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับคือ x เป็นสมาชิกที่อยู่ในเซต A และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับคือ y เป็นสมาชิกที่อยู่ในเซต B

ในหัวข้อนี้จะแยกพิจารณาสมาชิกของความสัมพันธ์ r ที่เป็นคู่อันดับดังกล่าว นำมาสร้างเซตขึ้นใหม่อีกสองเซต โดยเซตแรกมีสมาชิกที่เป็นสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับคือ x เรียกเซตนี้ว่า **โดเมนของความสัมพันธ์** และเซตที่สองมีสมาชิกที่เป็นสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับคือ y เรียกเซตนี้ว่า **เรนจ์ของความสัมพันธ์** ดังจะกล่าวในบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B นั่นคือ $r = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$

โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับของความสัมพันธ์ r

เขียนแทนด้วย D_r นั่นคือ $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$

เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับของความสัมพันธ์ r

เขียนแทนด้วย R_r นั่นคือ $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$

$$r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$$

$$r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x + 1\}$$

(1) จงเขียน r_1 และ r_2 แบบแจกแจงสมาชิก

(2) จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r_1 และ r_2

วิธีทำ (1) $r_1 = \{(1, 2), (2, 4)\}$

$$r_2 = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$$

ตอบ

(2) $D_{r_1} = \{1, 2\}$, $R_{r_1} = \{2, 4\}$

$$D_{r_2} = \{1, 2, 3\}$$

ตอบ

วิธีหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

วิธีที่ 1 ถ้าความสัมพันธ์ r เป็นเซตที่เขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้ จะหาโดเมนและเรนจ์ได้โดยวิธีแจกแจงสมาชิก

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(a, b) \in A \times B \mid b = 2a + 1\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $(a, b) \in A \times B$ จึงได้ว่า

$$a \in A, b \in B \text{ และ } a \text{ กับ } b \text{ จับคู่กันโดยมีเงื่อนไขว่า } b = 2a + 1$$

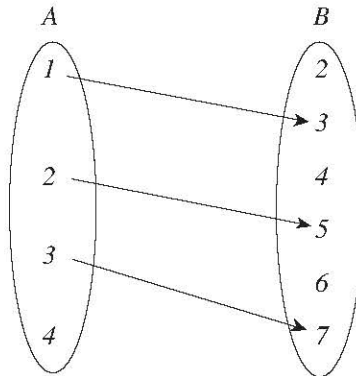
เมื่อ $a = 1$ จะได้ $b = 2(1) + 1 = 3$ โดยที่ $1 \in A$ และ $3 \in B$ ดังนั้น $(1, 3) \in r$

เมื่อ $a = 2$ จะได้ $b = 2(2) + 1 = 5$ โดยที่ $2 \in A$ และ $5 \in B$ ดังนั้น $(2, 5) \in r$

เมื่อ $a = 3$ จะได้ $b = 2(3) + 1 = 7$ โดยที่ $3 \in A$ และ $7 \in B$ ดังนั้น $(3, 7) \in r$

เมื่อ $a = 4$ จะได้ $b = 2(4) + 1 = 9$ โดยที่ $4 \in A$ แต่ $9 \notin B$ ดังนั้น $(4, 9) \notin r$

เขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้ได้ดังนี้



นั่นคือ

$$r = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$$

ดังนั้น

$$D_r = \{1, 2, 3\}$$

$$R_r = \{3, 5, 7\}$$

ตอบ

วิธีที่ 2 ถ้าความสัมพันธ์ r เป็นเซตที่เขียนบอกเงื่อนไข และ $r \subset R \times R$ จะหาโดเมนและเรนจ์แบบบอกเงื่อนไข ซึ่งทั้งสองเซตเป็นเซตย่อยของจำนวนจริง โดยมีหลักในการหาดังนี้

การหาโดเมนของความสัมพันธ์ r

1. ให้เขียนค่า y อยู่ในเทอมของ x
2. หาค่าของ x ที่ทำให้ y มีค่าเป็นจำนวนจริง จะได้ว่า x ที่หาได้เป็นสมาชิกในเซตของโดเมนของ r หรืออาจหาโดเมนของ r โดยหาจากคอมพลิเมนต์ของเซตแทน นั่นคือ จะหาเซต C ที่เซตของค่า x ทำให้ได้ค่า y ไม่เป็นจำนวนจริง แล้วจึงสรุปว่า $D_r = R - C$

การหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ r

1. ให้เขียนค่า x อยู่ในเทอมของ y
2. หาค่าของ y ที่ทำให้ x มีค่าเป็นจำนวนจริง จะได้ว่า y ที่หาได้เป็นสมาชิกในเซตของเรนจ์ของ r หรืออาจหาเรนจ์ของ r โดยหาจากจากคอมพลิเมนต์ของเซตแทน นั่นคือ จะหาเซต D ที่เซตของค่า y ทำให้ได้ค่า x ไม่เป็นจำนวนจริง แล้วจึงสรุปว่า $R_r = R - D$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy - x - 3y = 2\}$

วิธีทำ หาโดเมน จาก $xy - x - 3y = 2$
 จะได้ $xy - 3y = x + 2$
 $(x - 3)y = x + 2$
 $y = \frac{x+2}{x-3} ; x \neq 3$

จะเห็นว่าไม่มีจำนวนจริง $x = 3$ เพียงค่าเดียวที่ทำให้ $y \notin \mathbb{R}$

ดังนั้น $D_r = \mathbb{R} - \{3\}$

หาเรนจ์ จาก $xy - x - 3y = 2$
 จะได้ $xy - x = 3y + 2$
 $x(y - 1) = 3y + 2$
 $x = \frac{3y+2}{y-1} ; y \neq 1$

จะเห็นว่าไม่มีจำนวนจริง $y = 1$ เพียงค่าเดียวที่ทำให้ $x \notin \mathbb{R}$

ดังนั้น $R_r = \mathbb{R} - \{1\}$

ตอบ

การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r และ $r \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ บางครั้งอาจต้องพิจารณาเงื่อนไขของเซต r ด้วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 9 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4-x}\}$

วิธีทำ ต้องการหาโดเมนของ r โดยหาค่า x ซึ่งทำให้ได้ค่า y ที่เป็นจำนวนจริง

พิจารณาสมการ $y = \sqrt{4-x}$

จะต้องมีเงื่อนไขว่า $4-x \geq 0$

$$x \leq 4$$

ดังนั้น $D_r = (-\infty, 4]$

ต่อไปต้องการหาเรนจ์ของ r โดยหาค่า y ซึ่งทำให้ได้ค่า x ที่อยู่ใน D_r

เนื่องจาก $4-x \geq 0$ และ $y = \sqrt{4-x}$

จะเห็นได้ว่า ทุกๆ ค่าของ x ที่ $x \leq 4$ จะทำให้ $y \geq 0$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ถ้า $x = 4$ จะได้ $y = 0$

ถ้า $x = 3$ จะได้ $y = 1$

ถ้า $x = 2$ จะได้ $y = \sqrt{2}$

ถ้า $x = 1$ จะได้ $y = \sqrt{3}$

⋮

ถ้า x น้อยลงเรื่อยๆ จะทำให้ได้ค่า y เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ดังตาราง

x	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	...
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	...

ดังนั้น $R_r = [0, \infty)$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 10 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{|x-2|}{x-2} \right\}$

วิธีทำ ต้องการหาโดเมนของ r โดยหาค่า y ที่เป็นจำนวนจริง

จากสมการ $y = \frac{|x-2|}{x-2}$ พิจารณาแทนค่า x ดังนี้

จากบทนิยามของค่าสัมบูรณ์ $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$

ถ้า $x > 2$ จะได้ว่า $x-2 > 0$ ดังนั้น $y = \frac{|x-2|}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} = 1$

ถ้า $x = 2$ จะได้ว่า $x-2 = 0$ ดังนั้น y หาค่าไม่ได้

ถ้า $x < 2$ จะได้ว่า $x-2 < 0$ ดังนั้น $y = \frac{|x-2|}{x-2} = \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$

ดังนั้น จึงได้ว่า $D_r = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

ต่อไปต้องการหาเรนจ์ของ r โดยหาค่า y ซึ่งทำให้ได้ค่า x ที่อยู่ใน D_r

จากการหาค่า x ข้างบน จะพบว่า y มีสองค่า คือ $y = -1, 1$

ดังนั้น จึงได้ว่า $R_r = \{-1, 1\}$

ตอบ



ใบอนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

เลขที่ ๑๐๐/๒๕๖๑

วันที่ ๑ พฤษภาคม ๒๕๖๑

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒
ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ของ บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด
เรียบเรียงโดย นางสาวสุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้พิจารณาแล้ว อนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษา
๕ ปี นับตั้งแต่ปีการศึกษา ๒๕๖๑ ถึงปีการศึกษา ๒๕๖๕

(นายบุญรักษ์ ยอดเพชร)

เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

หมายเหตุ

- หลังจากได้รับใบอนุญาตแล้ว หากตรวจพบเหตุที่ทำให้หนังสือที่ได้รับใบอนุญาตนี้มีคุณภาพต่ำกว่ามาตรฐาน ขอสงวนสิทธิ์ให้ผู้ออกใบอนุญาตแจ้งเตือนผู้รับใบอนุญาตปรับปรุงแก้ไขภายใน ๙๐ วัน นับตั้งแต่วันที่ได้รับแจ้ง หากผู้รับใบอนุญาตไม่ดำเนินการให้แล้วเสร็จด้วยเหตุใดก็ตามในระยะเวลาที่กำหนดให้นี้ ให้ถือว่าใบอนุญาตนี้สิ้นสุด
- ใบอนุญาตฉบับนี้ใช้ได้เฉพาะหนังสือเท่านั้น และไม่ให้นำใบอนุญาตนี้ไปพิมพ์ในหนังสือเรื่องอื่นที่มีได้รับอนุญาตเป็นอันขาด

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2



2522302100

MAC EDUCATION

www.MACeducation.com



9 786162 749278

ราคา 65 บาท