



คณิตศาสตร์

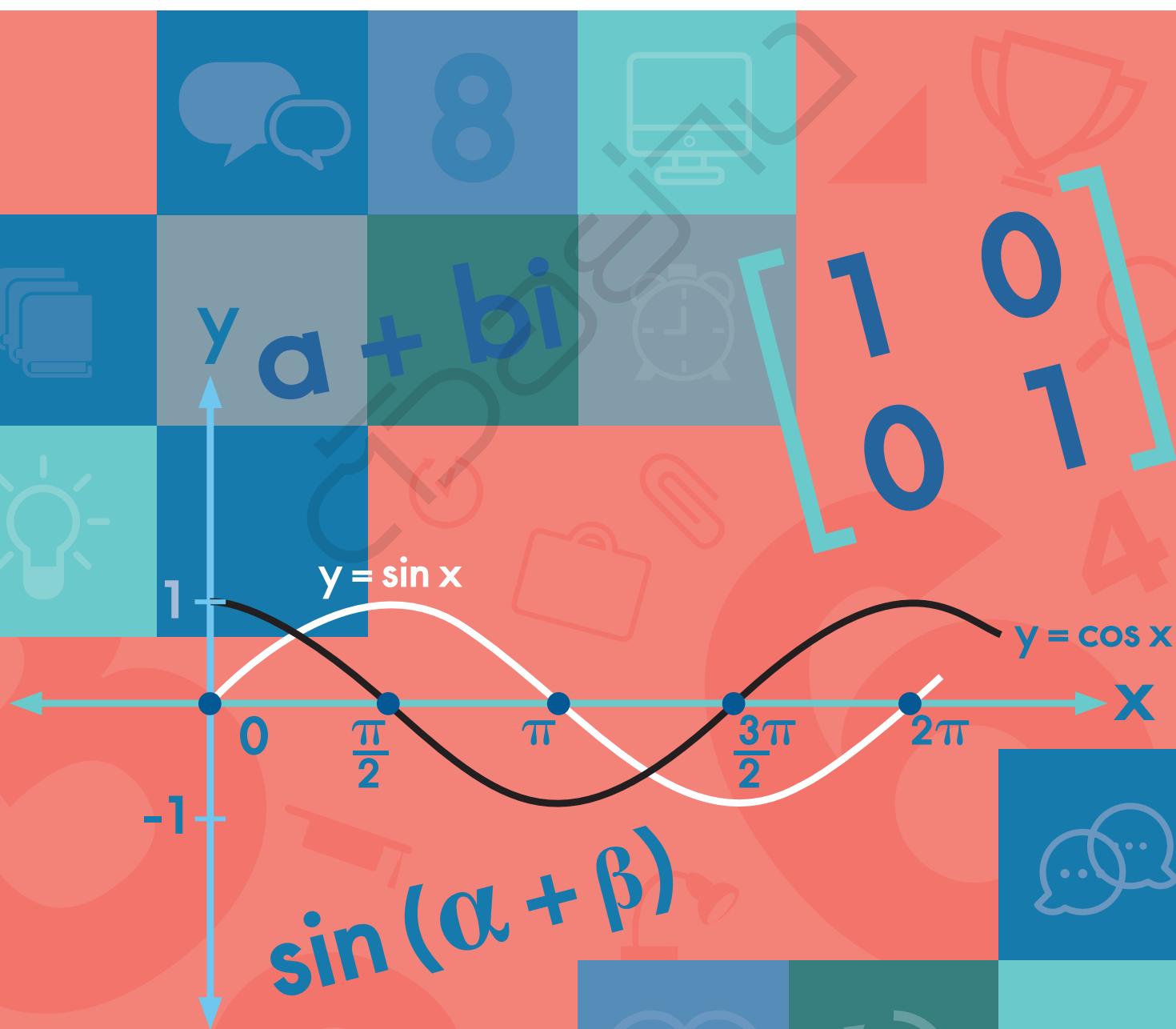
ม.5

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

เล่ม 1



ผู้เรียบเรียง

สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

75.-

คำอธิบายรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เวลา 100 ชั่วโมง จำนวน 2.5 หน่วยกิต

ศึกษาฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน เอกลักษณะและสมการตรีโกณมิติ กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ จำนวนเชิงซ้อนและสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1 สมการพหุนามตัวแปรเดียว เมทริกซ์และเมทริกซ์สลับเปลี่ยน การบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ เมทริกซ์ผกผัน การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์

โดยจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหา ให้เหตุผล สื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ มีความคิดสร้างสรรค์ นำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน ควบคู่ไปกับคุณธรรมและจริยธรรม และมีคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ได้แก่ การทำงานอย่างมีระบบ มีระเบียบ มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ พร้อมทั้งตระหนักในคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
2. แก่สมการตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
3. ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา
4. เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา
5. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
6. แก่สมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
7. เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม
8. หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2×2
9. แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว

รวมทั้งหมด 9 ผลการเรียนรู้

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง

ดร.สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

ผู้ตรวจ

รศ.นงนุช สุขวาริ

ผศ. ดร.สุชัย ตันยอชัยวัฒน์

ยุพดี มงคลจินดาวงศ์

บรรณาธิการ

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง ดร.สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

ผู้ตรวจ รศ.นงนุช สุขวารี
ผศ. ดร.สุชัย ตันยัชฌาวัฒม
ยุพดี มงคลจินดาวงศ์

บรรณาธิการ ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย.

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
เล่ม 1.-กรุงเทพฯ : แม็คเอ็ดดูเคชั่น, 2562.

232 หน้า.

1. คณิตศาสตร์--การศึกษาและการสอน (มัธยมศึกษา). I. ชื่อเรื่อง.

510.7

ISBN 978-616-274-974-2

พิมพ์ครั้งที่ : 1

จำนวนเล่ม : 22,000 เล่ม

สงวนลิขสิทธิ์ : มกราคม 2562

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย ห้ามลอกเลียน ไม่ว่าจะเป็นส่วนหนึ่งส่วนใด
ของหนังสือเล่มนี้ นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษร

จัดทำโดย

MAC EDUCATION

ส่งชานาณัติส่งจ่าย ไปรษณีย์ลาดพร้าว

ในนาม บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด

9/99 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว

แขวงจันทระเกษม เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

โทร. 0-2512-0661, 0-2938-2022-7 แฟกซ์ 0-2938-2028

www.MACeducation.com

พิมพ์ที่ : บริษัท พี อาร์ คัลเลอร์พริ้นท์ จำกัด

คำชี้แจง

ตามที่กระทรวงศึกษาธิการโดยสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้ดำเนินการทบทวนหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยในระยะแรกให้ปรับปรุงมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และสารภูมิศาสตร์ในกลุ่มสาระการเรียนรู้สังคมศึกษา ศาสนา และวัฒนธรรม สำหรับใช้ในปีการศึกษา 2561 ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 และ 4 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 4 ปีการศึกษา 2562 ให้ใช้ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1, 2, 4 และ 5 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1, 2, 4 และ 5 และตั้งแต่ปีการศึกษา 2563 เป็นต้นไปให้ใช้ในทุกชั้นเรียน ซึ่งการปรับหลักสูตรครั้งนี้มีเป้าหมายสำคัญเพื่อให้โรงเรียนสามารถจัดกระบวนการเรียนรู้ที่จะช่วยให้ผู้เรียนมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบสามารถใช้เทคโนโลยีที่เหมาะสมในการบูรณาการกับความรู้ทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์เพื่อแก้ปัญหาหรือพัฒนาด้านกระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรมที่นำไปสู่การคิดค้นสิ่งประดิษฐ์หรือสร้างสรรค์นวัตกรรม นอกจากนี้ยังให้เกิดการเรียนรู้เรื่องภูมิศาสตร์ (Geo-literacy) ทั้งด้านความสามารถทางภูมิศาสตร์ กระบวนการทางภูมิศาสตร์ และทักษะทางภูมิศาสตร์ เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจได้อย่างถูกต้องและนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการดำเนินชีวิต

ด้วยตระหนักถึงความสำคัญของการปรับเปลี่ยนข้างต้น บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด จึงได้มอบหมายให้ผู้เชี่ยวชาญด้านหลักสูตร ด้านการพัฒนาสื่อการเรียนรู้ และด้านการวัดและประเมินผลได้ปรับปรุงพัฒนาหนังสือเรียนให้สอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัดของหลักสูตรในกลุ่มสาระการเรียนรู้ที่มีการเปลี่ยนแปลง และให้สอดคล้องกับการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ที่กำหนดไว้ในแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 12 แผนการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2560-2579 และยุทธศาสตร์ชาติ 20 ปี

โดยหนังสือเรียนแต่ละหน่วยการเรียนรู้จะให้ผู้ใช้หนังสือเรียนได้ทราบเป้าหมายการเรียนรู้ในตอนต้นหน่วยการเรียนรู้ จากสาระการเรียนรู้และตัวชี้วัดชั้นปี และทุกหัวข้อหลักจะนำเสนอแนวคิดสำคัญเพื่อให้ทราบถึงสิ่งที่เป็นความรู้ ความคิดที่เป็นแก่นสำคัญที่ต้องเรียนรู้ให้ลึกซึ้ง และการเรียนรู้ที่ดี ผู้เรียนควรได้ตรวจสอบความรู้ความเข้าใจเป็นระยะ ๆ ก่อนเรียนเรื่องใหม่ ดังนั้น ในหนังสือเรียนจะมีการสอดแทรกกิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่สัมพันธ์กับเรื่องที่ได้เรียนผ่านมา เพื่อให้ผู้เรียนได้ตรวจสอบ

ตนเอง หรือบางหัวข้ออาจเป็นการฝึกทักษะให้ชำนาญก่อน สิ่งที่เพิ่มเติมในหนังสือเรียนเล่มนี้ คือ กิจกรรมบูรณาการวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี วิศวกรรมศาสตร์ และคณิตศาสตร์ (STEM) ตามเป้าหมาย สำคัญของการปรับหลักสูตรครั้งนี้ ซึ่งผู้เรียนและครูสามารถนำไปประยุกต์หรือดัดแปลงให้เหมาะสม กับบริบทของโรงเรียนและผู้เรียน การศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมโดยใช้เทคโนโลยีการสื่อสารและสารสนเทศ (ICT) เป็นสิ่งจำเป็นที่ต้องค้นคว้าเพิ่มเติม ดังนั้นในหนังสือเรียนเล่มนี้จึงได้มีการเสริมเนื้อหาเพิ่มเติมที่ได้ ผ่านการคัดกรองมาแล้วว่าเหมาะสมกับการเรียนรู้ แทรกไว้ในเนื้อหาบางหน่วย โดยใช้สัญลักษณ์



ผู้เรียนสามารถใช้สมาร์ทโฟนสแกน QR Code หรือเปิดเว็บไซต์ MACeducation.com เพื่อเข้าเมนู การศึกษาขั้นพื้นฐาน >>> MAC iLink และเลือกเปิดดูส่วนเสริมของบทเรียนในหนังสือแต่ละเล่มได้ ท้ายหน่วยการเรียนรู้ทุกหน่วยจะมีการสรุปบทเรียนสำหรับผู้เรียนได้ใช้เป็นข้อมูลสำคัญในการตรวจสอบ องค์ความรู้ที่ควรได้รับการพัฒนาหลังจากเสร็จสิ้นการเรียนรู้ หรือเป็นสาระสำคัญที่ควรจดจำและทำความเข้าใจให้ถ่องแท้ ซึ่งนับว่าเป็นส่วนสำคัญอีกส่วนหนึ่งในการปรับปรุงหนังสือเรียนครั้งนี้ที่ได้พัฒนาให้ ชัดเจนยิ่งขึ้น

บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนเล่มนี้จะมีคุณค่า มีประโยชน์ และช่วยส่งเสริมการปฏิรูปการศึกษา เพื่อเป็นรากฐานสำคัญที่จะช่วยทำให้ประเทศไทยก้าวสู่ประเทศที่มี การพัฒนาอย่างยั่งยืน ด้วยการมีพลเมืองที่มีคุณภาพ มีความคิดสร้างสรรค์ ตามเจตนารมณ์ของ การปรับปรุงหลักสูตรครั้งนี้และนโยบายประเทศไทย 4.0

บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด

คำนำ

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ได้เรียบเรียงขึ้นใหม่ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กิจกรรมการเรียนการสอนในหนังสือเล่มนี้ได้บูรณาการสาระต่างๆ เข้าด้วยกันไว้ในหน่วยการเรียนรู้ซึ่งสอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ในหลักสูตร

วัตถุประสงค์ของการเขียนหนังสือเล่มนี้ เพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามผลการเรียนรู้ เน้นการเชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการทักษะการเรียนรู้ใน ศตวรรษที่ 21 ฝึกทักษะตามสาระเพื่อวัดผลประเมินผลตนเอง มีกิจกรรมส่งเสริมให้เกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ ให้เกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์และมีความเชื่อมั่นในตนเอง และมีส่วนร่วมในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตลอดจนการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ของผู้เรียน

หนังสือเรียนเล่มนี้ประกอบด้วย 3 หน่วยการเรียนรู้ แต่ละหน่วยการเรียนรู้ได้มีสาระการเรียนรู้ ระบุผลการเรียนรู้ มีภาพและคำถามเข้าสู่บทเรียน แนวคิดสำคัญของแต่ละเรื่อง กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ กิจกรรมสะเต็มศึกษา/กิจกรรมบูรณาการ บทสรุปเนื้อหาและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์เพื่อเป็นการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ของผู้เรียน

ผู้เรียบเรียงขอขอบคุณเป็นอย่างสูงที่ท่านได้เลือกใช้หนังสือเรียนเล่มนี้เป็นสื่อการเรียนรู้ ผู้เรียบเรียงหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อครู นักเรียน และผู้สนใจโดยส่งผลต่อการพัฒนาทั้งด้านความรู้ ทักษะ ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ตามเจตนารมณ์ที่กำหนดไว้ในหลักสูตร

ดร.สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

สารบัญ

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ตรีโกณมิติ	1
1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	3
1.1 วงกลมหนึ่งหน่วย	3
1.2 ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์	6
1.3 ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์	8
1.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ	20
1.5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม	26
1.6 การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ	34
1.7 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	37
1.8 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม	50
2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	63
2.1 ตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์	63
2.2 ตัวผกผันของฟังก์ชันโคไซน์	65
2.3 ตัวผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์	66
3. เอกลักษณะและสมการตรีโกณมิติ	72
3.1 เอกลักษณะ	72
3.2 สมการตรีโกณมิติ	76
4. กฎของโคไซน์และกฎของไซน์	79
4.1 กฎของโคไซน์	79
4.2 กฎของไซน์	81
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	89

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 จำนวนเชิงซ้อน

90

1. จำนวนเชิงซ้อนและสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน 92
 - 1.1 จำนวนจินตภาพ 92
 - 1.2 จำนวนเชิงซ้อน 93
 - 1.3 สมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน 95
 - 1.4 สังยุคของจำนวนเชิงซ้อนและการหารจำนวนเชิงซ้อน 100
 - 1.5 รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน 102
 - 1.6 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน 105
2. จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว 111
3. รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1 118
4. สมการพหุนามตัวแปรเดียว 122
- แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ 131

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เมทริกซ์

132

1. เมทริกซ์และเมทริกซ์สลับเปลี่ยน 134
 - 1.1 เมทริกซ์ 134
 - 1.2 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน 140
 - 1.3 การเท่ากันของเมทริกซ์ 141
2. การบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ 146
 - 2.1 การบวกเมทริกซ์ 146
 - 2.2 การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง 152
 - 2.3 การคูณระหว่างเมทริกซ์ 155
3. ดีเทอร์มิแนนต์ 171
 - 3.1 ดีเทอร์มิแนนต์ของ 1×1 เมทริกซ์ 171
 - 3.2 ดีเทอร์มิแนนต์ของ 2×2 เมทริกซ์ 171
 - 3.3 ดีเทอร์มิแนนต์ของ $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 2 172

4. เมทริกซ์ผกผัน	187
4.1 การหาเมทริกซ์ผกผันของ 2×2 เมทริกซ์	187
4.2 การหาเมทริกซ์ผกผันของ $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 2	189
5. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์	200
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	213
ภาคผนวก	214
บรรณานุกรม	220
อภิธานศัพท์	221



หน่วยการเรียนรู้ที่

1



ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระการเรียนรู้

- 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
- 3 เอกลักษณะและสมการตรีโกณมิติ
- 4 กฎของโคไซน์และกฎของไซน์

ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
2. แก้สมการตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
3. ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา



พลอยยืนอยู่บนหอคอยสูง 60 เมตร ใช้กล้องส่องทางไกล
ส่องไปยังจุด ก ทำมุมก้ม 30 องศา กับเส้นแนวนระดับสายตา
พลอยจะหาระยะทางจากฐานของหอคอยไปยังจุด ก ได้หรือไม่
อย่างไร



1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ



แนวคิดสำคัญ

การกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทำได้โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย ฟังก์ชันตรีโกณมิติประกอบด้วย ฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ ฟังก์ชันแทนเจนต์ ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคเซแคนต์ ซึ่งกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติมีลักษณะเป็นคาบ

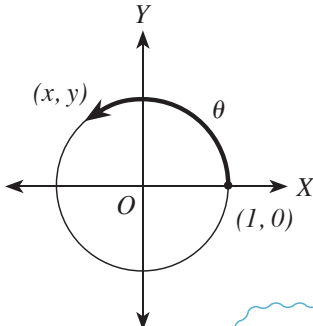
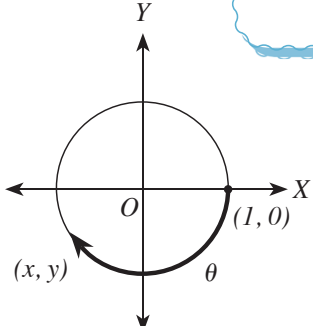
ฟังก์ชันตรีโกณมิติถูกนำไปใช้อย่างกว้างขวางในคณิตศาสตร์ชั้นสูง วิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์แขนงต่างๆ



1.1 วงกลมหนึ่งหน่วย

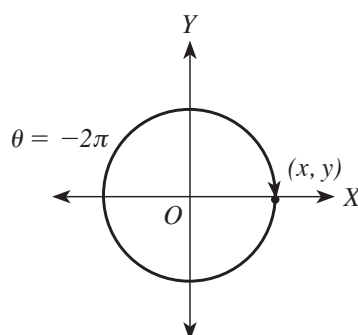
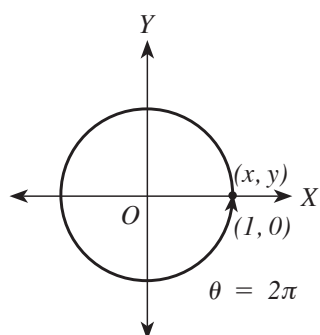
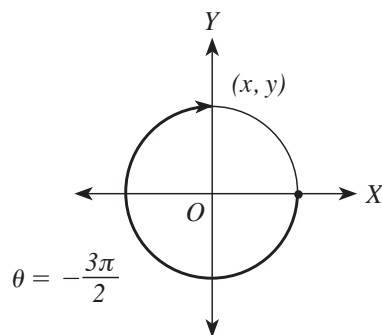
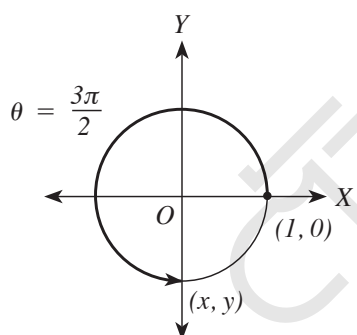
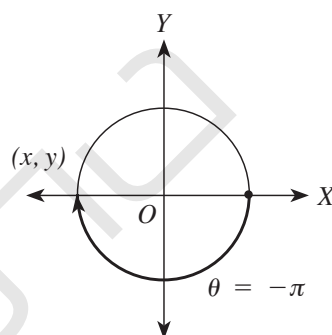
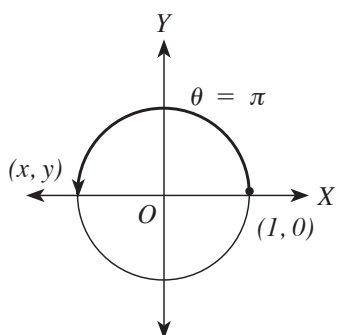
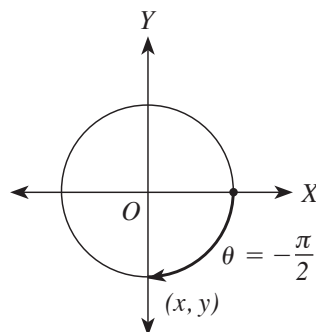
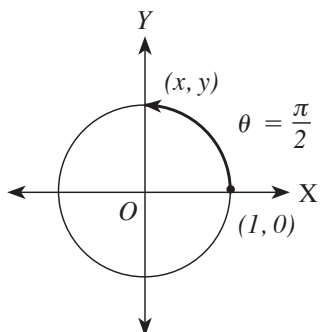
วงกลมหนึ่งหน่วย หมายถึง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ และรัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งวงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 + y^2 = 1\}$

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ (ทีตา) ให้นักเรียนสังเกตผลที่ได้จากการปฏิบัติกิจกรรมต่อไปนี้

กิจกรรม	ผลที่ได้จากการปฏิบัติกิจกรรม
จากจุด $(1, 0)$ วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $ \theta $ หน่วย ในทิศทวนเข็มนาฬิกา จะถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย	 ถ้า $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งคือจุด $(1, 0)$
จากจุด $(1, 0)$ วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $ \theta $ หน่วย ในทิศตามเข็มนาฬิกา จะถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย	



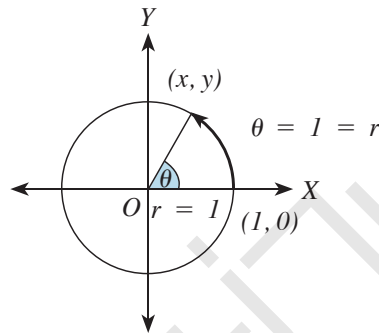
รูปต่อไปนี้แสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยเมื่อกำหนดให้ θ มีค่าต่างกัน



หมายเหตุ

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ จะสามารถหาจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ได้เสมอ (ไม่ว่า θ จะเป็นจำนวนเท่าไร) ได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น และถ้า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่า วัดส่วนโค้งเกิน 1 รอบ เพราะเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π เรเดียน

มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น เป็นมุมที่มีขนาดเท่ากับ 1 เรเดียน ดังรูป



จากรูป วงกลมมีรัศมียาว r หน่วย ความยาวส่วนโค้งยาว r หน่วย จะเรียก θ ว่ามุมที่มีขนาด 1 เรเดียน

หมายเหตุ

ถ้าให้จุด (x, y) ใดๆ ในวงกลมหนึ่งหน่วยแทนด้วย $P(\theta)$ แล้ว $P(\theta) = P(\theta + 2n\pi)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n

**แบบฝึกหัดที่ 1**

จงเขียนวงกลมหนึ่งหน่วยและเขียนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย พร้อมทั้งบอกว่าจุดปลายส่วนโค้งในแต่ละข้ออยู่ในจุดภาคใด

1. $\theta = \frac{\pi}{6}$

2. $\theta = \frac{\pi}{4}$

3. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

4. $\theta = \frac{7\pi}{6}$

5. $\theta = \frac{7\pi}{4}$

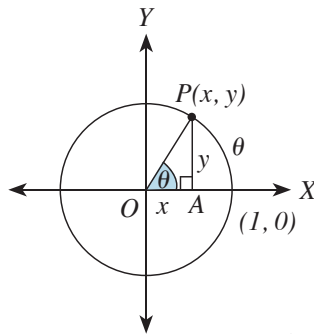
6. $\theta = \frac{17\pi}{6}$

7. $\theta = -\frac{2\pi}{3}$

8. $\theta = -\frac{9\pi}{4}$

1.2 ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

ให้นักเรียนพิจารณาวงกลมหนึ่งหน่วย โดยที่ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใดๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย ลาก $\overline{PA}$ ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด A ดังรูป



จากรูป จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OAP ซึ่งเมื่อนำมาเขียนเป็นอัตราส่วนตรีโกณมิติจะได้ดังนี้

$$\sin \theta = \frac{PA}{OP} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{1} = x$$

นั่นคือ

$$x = \cos \theta \text{ และ } y = \sin \theta$$

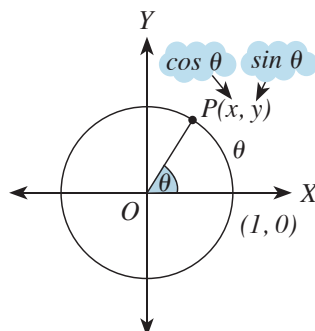
$\sin \theta$ อ่านว่า ไซน์ทีตา
 $\cos \theta$ อ่านว่า คอสมทีตา

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

ตัวหน้าของคู่อันดับ (x) คือ ค่า $\cos \theta$

ตัวหลังของคู่อันดับ (y) คือ ค่า $\sin \theta$

กล่าวคือ จุดบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยเป็นค่าของ $\cos \theta$ กับ $\sin \theta$ ดังรูป



จากลักษณะการกำหนดจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย พบว่าทุกครั้งที่มีการกำหนดค่า θ จะหาจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายของส่วนโค้งที่วัดตามแนวเส้นรอบวงโดยมีจุดเริ่มต้นที่จุด $(1, 0)$ ให้ยาว θ หน่วย ได้เพียงจุดเดียวเสมอ กล่าวคือ แต่ละค่าของ θ จะทำให้เกิดค่า x เพียง 1 ค่า และค่า y เพียง 1 ค่า จากความรู้ดังกล่าวสามารถนำมาสร้างฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์ได้ตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ฟังก์ชันไซน์ หมายถึง ฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งนิยามว่า

$$\text{sine} = \{(\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(\theta) = y\}$$

ถ้า $(\theta, y) \in \text{sine}$ แล้วจะเขียนว่า $y = \text{sine}(\theta)$ หรือ $y = \sin \theta$



จากบทนิยามอาจกล่าวได้ว่า ถ้า $f(\theta) = (x, y)$ แล้ว $\sin \theta = y$ เนื่องจาก $f(\theta) = (x, y)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น $-1 \leq y \leq 1$ นั่นคือ ถ้า $\theta \in \mathbb{R}$ แล้ว $-1 \leq \sin \theta \leq 1$

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ $\mathbb{R}$

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ $[-1, 1]$

บทนิยาม ฟังก์ชันโคไซน์ หมายถึง ฟังก์ชัน $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{ซึ่งนิยามว่า } \text{cosine} = \{(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid g(\theta) = x\}$$

ถ้า $(\theta, x) \in \text{cosine}$ แล้วจะเขียนว่า $x = \text{cosine}(\theta)$ หรือ $x = \cos \theta$



จากบทนิยามอาจกล่าวได้ว่า ถ้า $g(\theta) = (x, y)$ แล้ว $\cos \theta = x$ เนื่องจาก $g(\theta) = (x, y)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น $-1 \leq x \leq 1$ นั่นคือ ถ้า $\theta \in \mathbb{R}$ แล้ว $-1 \leq \cos \theta \leq 1$

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ $\mathbb{R}$

เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์ คือ $[-1, 1]$

เนื่องจาก $P(\theta) = P(\theta + 2n\pi)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม แสดงว่ามีจำนวนจริงมากมายที่ไม่เท่ากัน แต่ให้จุดปลายส่วนโค้งเป็นจุดเดียวกัน ดังนั้นฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์จึงไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เช่น ให้ $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ และ $\theta_2 = \frac{5\pi}{2}$
จะได้ว่า $P(\theta_1) = P(\theta_2) = (0, 1)$

ดังนั้น

$$\sin \theta_1 = 1 \text{ และ } \sin \theta_2 = 1$$

$$\cos \theta_1 = 0 \text{ และ } \cos \theta_2 = 0$$

และจากสมการของวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sin \theta$, $x = \cos \theta$ จะได้ความสัมพันธ์ของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ดังนี้

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

ดังนั้น

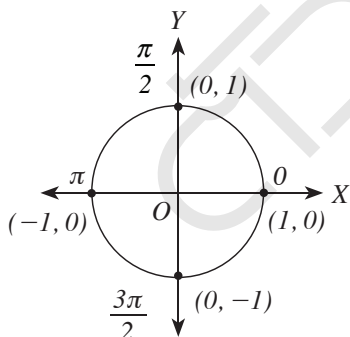
$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ เมื่อ } \theta \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

$\cos^2 \theta$ หมายถึง $(\cos \theta)(\cos \theta)$
 $\cos \theta^2$ หมายถึง $\cos$ ของจำนวนจริง θ^2
 ซึ่ง $\cos^2 \theta \neq \cos \theta^2$
 ความหมายของ $\sin^2 \theta$ และ $\sin \theta^2$
 มีความหมายในทำนองเดียวกัน



1.3 ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน



จากวงกลมหนึ่งหน่วย
นำมาเขียนในรูปตารางได้ดังนี้



จำนวนจริง (θ)	ตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้ง	
	x	y
0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1

จากบทนิยามของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์จึงหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงในตารางได้ดังนี้

$$\begin{array}{ll} \sin 0 = 0 & \cos 0 = 1 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1 & \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \pi = 0 & \cos \pi = -1 \\ \sin \frac{3\pi}{2} = -1 & \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \end{array}$$

ในทำนองเดียวกันจะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของ $-\frac{\pi}{2}$, $-\pi$ และ $-\frac{3\pi}{2}$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ll} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin(-\pi) = 0 & \cos(-\pi) = -1 \\ \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1 & \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \end{array}$$

สังเกตได้ว่า ค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม หาได้จากพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\left|\frac{n\pi}{2}\right|$ หน่วย โดยการวัดในทิศทางที่สอดคล้องกับ θ ดังกล่าว จุดปลายจะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดได้แก่ $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ และ $(0, -1)$

ต่อไปจะพิจารณาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ โดยแบ่งเป็นกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมี O เป็นจุดกำเนิด

สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก PAO โดยมี A เป็นมุมฉาก และ $m(\widehat{AOP}) = \frac{\pi}{4}$

แสดงว่า $\triangle PAO$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น

$$OA = PA$$

นั่นคือ

$$x = y$$

จาก

$$OA^2 + PA^2 = OP^2$$

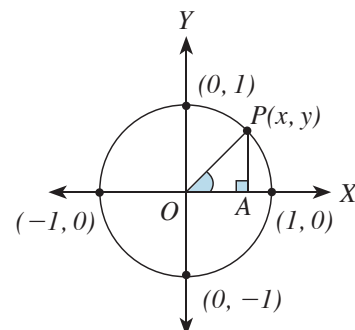
$$x^2 + y^2 = 1^2$$

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$



แต่ (x, y) เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 จะได้ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{ดังนั้น } x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

จะได้ว่า จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\text{นั่นคือ } \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$$

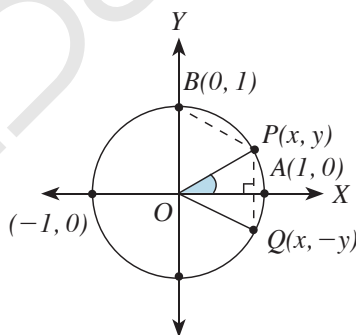
หมายเหตุ

ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots, \frac{(2n+1)\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จะหาได้โดยอาศัยวงกลมหนึ่งหน่วยเช่นกัน

กรณีที่ 2 ค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$ และ $\cos \frac{\pi}{6}$

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมี O เป็นจุดกำเนิด และ $A(1, 0)$ เป็นจุดบนเส้นรอบวงที่อยู่บนแกน X โดย $\angle AOP = \frac{\pi}{6}$

และให้ $B(0, 1)$ เป็นจุดบนเส้นรอบวงที่อยู่บนแกน Y



เนื่องจาก

$$\angle AOB = \frac{\pi}{2}$$

จะได้

$$\angle POB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

ให้ Q เป็นจุดในจุดภาคที่ 4 โดยที่จุด Q สมมาตรกับจุด P เมื่อมีแกน X เป็นแกนสมมาตร

$$\text{ดังนั้น จุด } Q \text{ คือ } (x, -y) \text{ และ } \angle AOQ = \angle AOP = \frac{\pi}{6}$$

ลากเส้น PB และ PQ จะพบว่า

$$\triangle POB \cong \triangle POQ$$

ดังนั้น

$$PB = PQ$$

นั่นคือ

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+y)^2}$$

$$\begin{aligned}x^2 + (y-1)^2 &= (2y)^2 \\x^2 + y^2 - 2y + 1 &= 4y^2\end{aligned}\quad \dots(1)$$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น $x^2 + y^2 = 1$ นำไปแทนค่าใน (1) จะได้

$$\begin{aligned}1 - 2y + 1 &= 4y^2 \\4y^2 + 2y - 2 &= 0 \\2y^2 + y - 1 &= 0 \\(2y-1)(y+1) &= 0\end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{2}, -1$$

แต่ (x, y) เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 จะได้ $y = \frac{1}{2}$

จากสมการ

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1 \\x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 1\end{aligned}$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = 1$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

แต่ (x, y) เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 จะได้ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

นั่นคือ

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

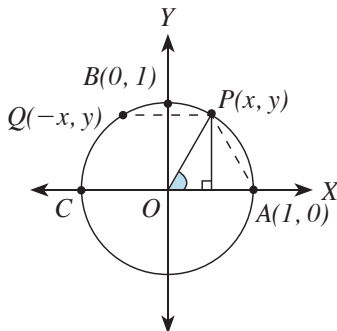
$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$$

หมายเหตุ

ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงในรูป $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, 2n\pi \pm \frac{7\pi}{6}$ และ $2n\pi \pm \frac{11\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จะหาได้โดยอาศัยวงกลมหนึ่งหน่วยเช่นกัน

กรณีที่ 3 ค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$

ให้จุด $P(x, y)$ เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย ให้จุด Q เป็นภาพสะท้อนของจุด $P(x, y)$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน ดังรูป



จากรูปจะได้ว่า พิกัดของจุด Q คือ $(-x, y)$ และส่วนโค้ง CQ ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย
เนื่องจากส่วนโค้งของครึ่งวงกลมนี้ยาว π หน่วย

ดังนั้นส่วนโค้ง PQ ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วยด้วย

จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุด PQ ยาวเท่ากับระยะทางระหว่างจุด PA นั่นคือ

$$\begin{aligned} PQ &= PA \\ \sqrt{(x+x)^2 + (y-y)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} \\ \sqrt{(x+x)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ 4x^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \\ 4x^2 + 2x - 2 &= 0 \quad (\text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1) \\ 2(2x-1)(x+1) &= 0 \\ x &= \frac{1}{2}, -1 \end{aligned}$$

แต่ (x, y) เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 จะได้ $x = \frac{1}{2}$

จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{1}{4} + y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{3}{4}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

แต่ (x, y) เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 จะได้ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$$

หมายเหตุ

ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงในรูป $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{4\pi}{3}$ และ $2n\pi \pm \frac{5\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จะหาได้โดยอาศัยวงกลมหนึ่งหน่วยเช่นกัน

ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ

พิจารณาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยแบ่งเป็นกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 การหาค่าของ $\sin(-\theta)$ และ $\cos(-\theta)$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงบวก

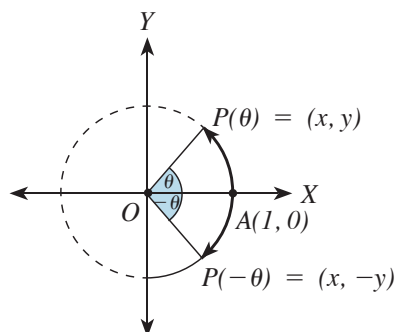
ถ้ากำหนดให้ θ เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว $-\theta$ จะเป็นจำนวนจริงลบ การหาค่าของ $\sin(-\theta)$ และ $\cos(-\theta)$ หาได้จาก $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ซึ่งมีความสัมพันธ์กันด้วยความสัมพันธ์ที่จะกล่าวต่อไปนี้

สมมติให้จุด $P(\theta) = (x, y)$

เนื่องจาก $P(\theta)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งวัดจากจุด $A(1, 0)$ ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วยความยาว $|\theta|$ หน่วย

และ $P(-\theta)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งวัดจากจุด $A(1, 0)$ ไปในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยความยาว $|\theta|$ หน่วย เช่นกัน

ดังนั้น จุด $P(\theta)$ และจุด $P(-\theta)$ จะสมมาตรกันโดยมีแกน X เป็นแกนสมมาตร แสดงว่าจุด $P(-\theta) = (x, -y)$ ดังรูป



จากบทนิยามของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ จะได้ว่า

$$\sin \theta = y \quad \text{และ} \quad \sin(-\theta) = -y$$

$$\cos \theta = x \quad \text{และ} \quad \cos(-\theta) = x$$

ดังนั้น จึงสรุปความสัมพันธ์ระหว่าง $\sin \theta$ กับ $\sin(-\theta)$ และ $\cos \theta$ กับ $\cos(-\theta)$ ได้ดังนี้

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

ตัวอย่างที่ 1

จงหาค่าของ $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ และ $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

และ

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

ตอบ

กรณีที่ 2 การหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta > 2\pi$

ถ้า $\theta > 2\pi$ และหาร θ ด้วย 2π แล้วได้ n เหลือเศษ α (แอลฟา) นั่นคือ $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \leq \alpha < 2\pi$

เนื่องจาก

$$P(2n\pi + \alpha) = P(\alpha)$$

ดังนั้น

$$P(\theta) = P(\alpha)$$

จึงสรุปความสัมพันธ์ในการหา $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta > 2\pi$ ได้ดังนี้

$$\sin \theta = \sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos \theta = \cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

สังเกตได้ว่า ถ้าหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้ว จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบวกทุกจำนวนได้ด้วย ซึ่งจะทำให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงลบทุกจำนวนได้เสมอ



ตัวอย่างที่ 2

จงหาค่าของ $\sin \frac{37\pi}{6}$ และ $\cos \left(\frac{-13\pi}{4} \right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{37\pi}{6} = 6\pi + \frac{\pi}{6} = (3 \times 2\pi) + \frac{\pi}{6}$

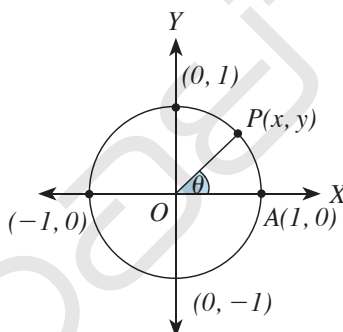
ดังนั้น $\sin \frac{37\pi}{6} = \sin \left((3 \times 2\pi) + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

และ $\cos \left(\frac{-13\pi}{4} \right) = \cos \frac{13\pi}{4} = \cos \left(2\pi + \frac{5\pi}{4} \right) = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

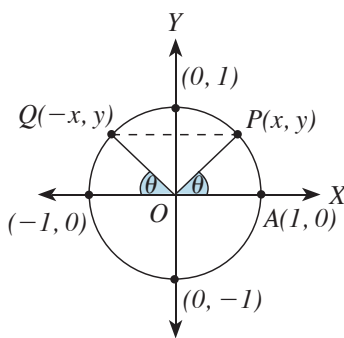
ตอบ

กรณีที่ 3 การหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

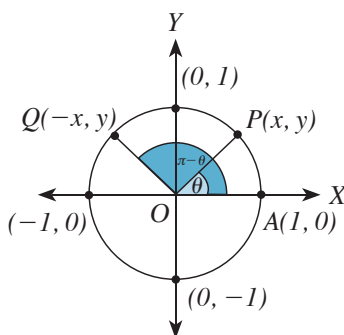
ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมี O เป็นจุดกำเนิด และ $A(1, 0)$ เป็นจุดบนเส้นรอบวงที่อยู่บนแกน X ทางด้านบวก พิจารณารูปของมุม θ ต่อไปนี้



จากรูป ถ้าให้แกน Y เป็นแกนสมมาตร จะได้ว่า จุด $Q(-x, y)$ จะเป็นจุดที่สมมาตรกับจุด $P(x, y)$ ดังรูป



เนื่องจากต้องการหามุมที่มี OA เป็นด้านเริ่มต้น และ OQ เป็นด้านสิ้นสุด ดังนั้นขนาดของมุมดังกล่าวเท่ากับ $\pi - \theta$ เรเดียน ดังรูป



เพราะว่า Q เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีพิกัดตัวหน้าเป็น $-x$ และพิกัดตัวหลังเป็น y จะได้ว่า

$$\cos(\pi - \theta) = -x$$

$$\sin(\pi - \theta) = y$$

แต่ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$

ดังนั้น

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta \quad \text{เมื่อ } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \quad \text{เมื่อ } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{9} = 0.34$ และ $\cos \frac{\pi}{9} = 0.94$

จงหาค่าของ $\sin \frac{8\pi}{9}$ และ $\cos \frac{8\pi}{9}$

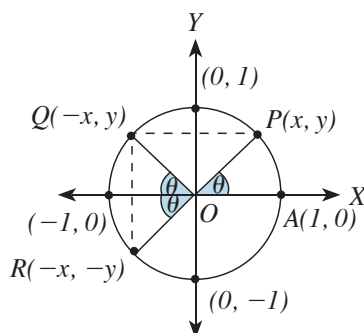
วิธีทำ $\sin \frac{8\pi}{9} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) = \sin \frac{\pi}{9} = 0.34$

$$\cos \frac{8\pi}{9} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) = -\cos \frac{\pi}{9} = -0.94$$

ตอบ

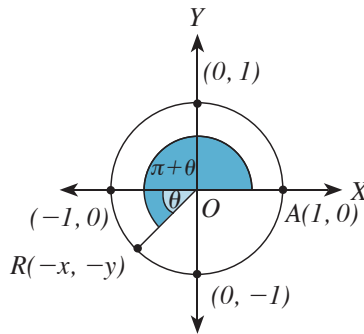
กรณีที่ 4 การหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

ให้ $P(x, y)$ และ $Q(-x, y)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมี O เป็นจุดกำเนิด และ $A(1, 0)$ เป็นจุดบนเส้นรอบวงที่อยู่บนแกน X ทางด้านบวก โดยที่จุด $Q(-x, y)$ เป็นจุดที่สมมาตรกับจุด $P(x, y)$ จากรูปข้างล่าง ถ้าใช้แกน X เป็นแกนสมมาตร และหาจุดที่สมมาตรกับจุด Q จะได้ $R(-x, -y)$ เป็นจุดที่สมมาตรกับจุด Q ดังรูป



จากรูป พบว่าจุด P และจุด R อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

แต่เนื่องจากต้องการหามุมที่มี OA เป็นด้านเริ่มต้น และ OR เป็นด้านสิ้นสุด ดังนั้นขนาดของมุมดังกล่าวเท่ากับ $\pi + \theta$ เรเดียน ดังรูป



เพราะว่า R เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีพิกัดตัวหน้าเป็น $-x$ และพิกัดตัวหลังเป็น $-y$ จะได้ว่า

$$\cos(\pi + \theta) = -x$$

$$\sin(\pi + \theta) = -y$$

แต่ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$

ดังนั้น

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta \quad \text{เมื่อ } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta \quad \text{เมื่อ } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 4

กำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{9} = 0.34$ และ $\cos \frac{\pi}{9} = 0.94$

จงหาค่าของ $\sin \frac{10\pi}{9}$ และ $\cos \frac{10\pi}{9}$

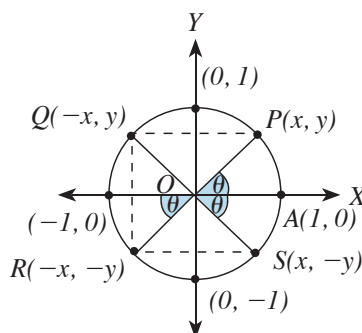
วิธีทำ $\sin \frac{10\pi}{9} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{9} \right) = -\sin \frac{\pi}{9} = -0.34$

$$\cos \frac{10\pi}{9} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{9} \right) = -\cos \frac{\pi}{9} = -0.94$$

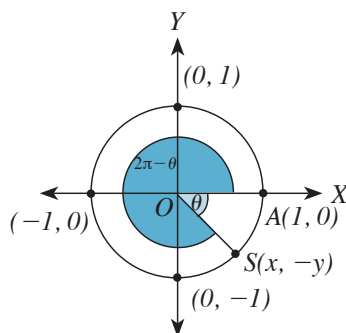
ตอบ

กรณีที่ 5 การหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

ในทำนองเดียวกัน สามารถทำต่อเนื่องจากกรณีที่ 4 โดยใช้แกน Y เป็นแกนสมมาตร หาจุดที่สมมาตรกับจุด R จะได้จุด $S(x, -y)$ เป็นจุดที่สมมาตรกับจุด R ดังรูป



เนื่องจากต้องการหามุมที่มี OA เป็นด้านเริ่มต้น และ OS เป็นด้านสิ้นสุด ดังนั้นขนาดของมุมดังกล่าวเท่ากับ $2\pi - \theta$ เรเดียน ดังรูป



เพราะว่า S เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีพิกัดตัวหน้าเป็น x และพิกัดตัวหลังเป็น -y
จะได้ว่า

$$\cos(2\pi - \theta) = x$$

$$\sin(2\pi - \theta) = -y$$

แต่ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$

ดังนั้น

$$\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta \quad \text{เมื่อ } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta \quad \text{เมื่อ } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 5

กำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{9} = 0.34$ และ $\cos \frac{\pi}{9} = 0.94$

จงหาค่าของ $\sin \frac{17\pi}{9}$ และ $\cos \frac{17\pi}{9}$

วิธีทำ $\sin \frac{17\pi}{9} = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{9} \right) = -\sin \frac{\pi}{9} = -0.34$

$$\cos \frac{17\pi}{9} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{9} \right) = \cos \frac{\pi}{9} = 0.94$$

ตอบ

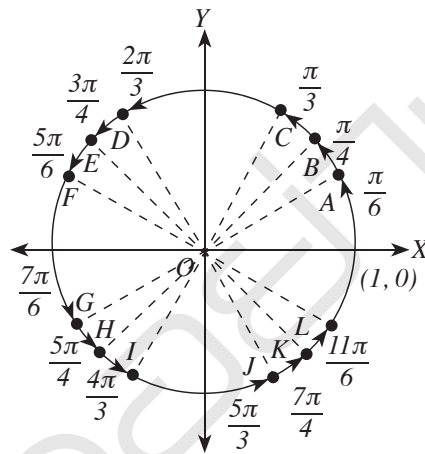


แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงพิจารณาว่าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจุดภาคใด

- | | |
|---|---|
| (1) $\sin \theta > 0$ | (2) $\sin \theta > 0$ และ $\cos \theta < 0$ |
| (3) $\sin \theta < 0$ และ $\cos \theta > 0$ | (4) $\sin \theta < 0$ และ $\cos \theta < 0$ |
| (5) $\cos \theta > 0$ | (6) $\sin \theta \cos \theta > 0$ |
| (7) $\cos \theta < 0$ | (8) $\sin \theta \cos \theta < 0$ |

2. จงหาพิกัดของจุดปลายของส่วนโค้งแต่ละจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยต่อไปนี้



3. จงหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

- | | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| (1) 5π | (2) -3π | (3) $\frac{9\pi}{2}$ | (4) $-\frac{7\pi}{2}$ | (5) 64π |
| (6) -47π | (7) $\frac{27\pi}{2}$ | (8) $-\frac{13\pi}{2}$ | (9) 31π | (10) -66π |
| (11) $\frac{9\pi}{4}$ | (12) $\frac{13\pi}{3}$ | (13) $\frac{19\pi}{6}$ | (14) $\frac{21\pi}{4}$ | (15) $-\frac{23\pi}{6}$ |
| (16) $-\frac{29\pi}{3}$ | (17) $-\frac{17\pi}{6}$ | (18) $\frac{100\pi}{3}$ | (19) $-\frac{201\pi}{4}$ | (20) $-\frac{95\pi}{6}$ |

4. ถ้า $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1}{2}$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ จงหาค่าของ $\sin \theta$

5. จงพิจารณาแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ

- (1) ค่าของ $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ มีค่าเท่ากับ $\sin \frac{\pi}{2}$
- (2) ถ้า $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ แล้ว $\cos \theta \leq \sin \theta$

- (3) ค่า $\cos \theta$ เพิ่มขึ้นเมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$
- (4) ถ้า $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ แล้ว $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ และ $-1 \leq \sin \theta \leq 0$
- (5) มีจำนวนจริง θ ที่ทำให้สมการ $\cos \theta = 3$ เป็นจริง
6. กำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{12} = 0.26$ และ $\cos \frac{\pi}{12} = 0.97$ จงหาค่าของ
- (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ (2) $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$
- (3) $\cos \frac{11\pi}{12}$ (4) $\sin \frac{13\pi}{12}$
- (5) $\sin \frac{23\pi}{12}$ (6) $\cos \frac{25\pi}{12}$
7. กำหนดให้ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ และ $\sin \theta = 0.42$ จงหาค่าของ
- (1) $\cos \theta$ (2) $\sin(\pi - \theta)$
- (3) $\cos(\pi - \theta)$ (4) $\cos(\theta - 2\pi)$
- (5) $\sin(2\pi - \theta)$ (6) $\cos(\pi + \theta)$

1.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

นอกจากฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ที่กล่าวมาแล้ว ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญอีก 4 ฟังก์ชันต่อไปนี้

บทนิยาม กำหนดให้ θ เป็นจำนวนจริง

1. ฟังก์ชันแทนเจนต์ คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{tangent } \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

2. ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{cotangent } \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

3. ฟังก์ชันเซแคนต์ คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{secant } \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

4. ฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{cosecant } \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

ใบประกันคุณภาพสื่อการเรียนรู้รายวิชาเพิ่มเติม

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เล่มนี้ บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด เป็นผู้จัดพิมพ์เผยแพร่ และจำหน่าย โดยได้จัดทำคำอธิบายรายวิชาเพิ่มเติมที่มีทั้งผลการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้เพิ่มเติมและองค์ประกอบสำคัญอื่นที่บริษัทฯ จัดทำขึ้น เพื่อให้สถานศึกษาได้เทียบเคียงกับหลักสูตรของสถานศึกษา และพิจารณาเลือกใช้หนังสือนี้ประกอบการจัดการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับหลักสูตรสถานศึกษาของตนได้ตามความเหมาะสม

ผู้เรียบเรียง ดร.สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

ผู้ตรวจ 1. รศ.นงนุช สุขวาริ
 2. ผศ. ดร.สุชัย ตันยัชฌมาวุฒ
 3. นางยุพดี มงคลจินดาวงศ์

บรรณาธิการ นายทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด ขอรับรองว่า ผู้เรียบเรียง ผู้ตรวจ และบรรณาธิการ ดังกล่าว เป็นผู้ที่มีความรู้ความสามารถในการจัดทำหนังสือนี้ให้มีความถูกต้องและมีคุณภาพในการจัดการเรียนรู้ตามวัตถุประสงค์ของรายวิชาเพิ่มเติมที่กำหนด

หากผู้ใช้หนังสือหรือสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานพบว่า หนังสือเล่มนี้มีข้อบกพร่อง เนื้อหาไม่ถูกต้อง เกิดผลเสียหายต่อการเรียนรู้ ส่งผลกระทบต่อด้านคุณธรรม จริยธรรม และความมั่นคงของชาติ เมื่อบริษัทฯ ได้ทราบแล้ว บริษัทฯ ยินดีงดการจำหน่ายทันที และเรียกเก็บหนังสือที่จำหน่ายทั้งหมดเพื่อแก้ไขให้ถูกต้อง ตลอดจนชดเชยค่าเสียหายที่เกิดขึ้นจริงให้กับผู้ที่ได้รับความเสียหายนั้น ทั้งนี้ให้เป็นไปตามพระราชบัญญัติคุ้มครองผู้บริโภค พ.ศ. 2522 พระราชบัญญัติคุ้มครองผู้บริโภค (ฉบับที่ 2) พ.ศ. 2541 และพระราชบัญญัติคุ้มครองผู้บริโภค (ฉบับที่ 3) พ.ศ. 2556 รวมทั้งยินยอมให้สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานถอดถอนรายชื่อหนังสือนี้ออกจากบัญชีกำหนดสื่อการเรียนรู้สำหรับเลือกใช้ในสถานศึกษาไปก่อนจนกว่าจะได้รับแจ้งว่ามีการแก้ไขแล้ว พร้อมทั้งการแจ้งประชาสัมพันธ์ให้สถานศึกษาทราบ

(ลงชื่อ).....ผู้รับรอง

(นายคมพิชญ์ พนาสุกน)

กรรมการผู้จัดการ

บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1



2532301100

MAC | MACEDUCATION

www.MACeducation.com



9 786162 749742

ราคา 75 บาท