



ผู้เรียบเรียง
ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ม.4

เล่ม 2

แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ม.4

เล่ม 2



แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2

จัดทำโดย

MACIMACEDUCATION

ส่งเสริมนิสัยรักการเรียนรู้

ในนาม บริษัท แม็คเอดูเคชั่น จำกัด

9/9 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว

แขวงจันทระเกษม เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

โทร. 0-2512-0661, 0-2938-2022-7 แฟกซ์ 0-2938-2028

www.MACeducation.com

พิมพ์ที่ : ห้างหุ้นส่วนจำกัด ที.เอส.บี โปรดักส์



คำนำ

แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษา ขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มุ่งพัฒนาการคิดวิเคราะห์ ความคิดสร้างสรรค์คิดอย่างมีเหตุผลเป็น ระบบ มีแบบแผน แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างครบถ้วนตามทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ จากการเรียนรู้สาระสำคัญ ความคิดรวบยอด ฝึกทักษะในกิจกรรมที่หลากหลายอย่างต่อเนื่อง บทสรุปมีเครื่องมือวัดผลและตรวจสอบความรู้ที่คงทนของผู้เรียน ผู้เรียนได้เรียนรู้ครบตามมาตรฐาน และตัวชี้วัดได้ครบถ้วนและประเมินผู้เรียนได้สอดคล้องกับมาตรฐานและตัวชี้วัด

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาทักษะการคิดของผู้เรียนได้เป็นอย่างดี

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

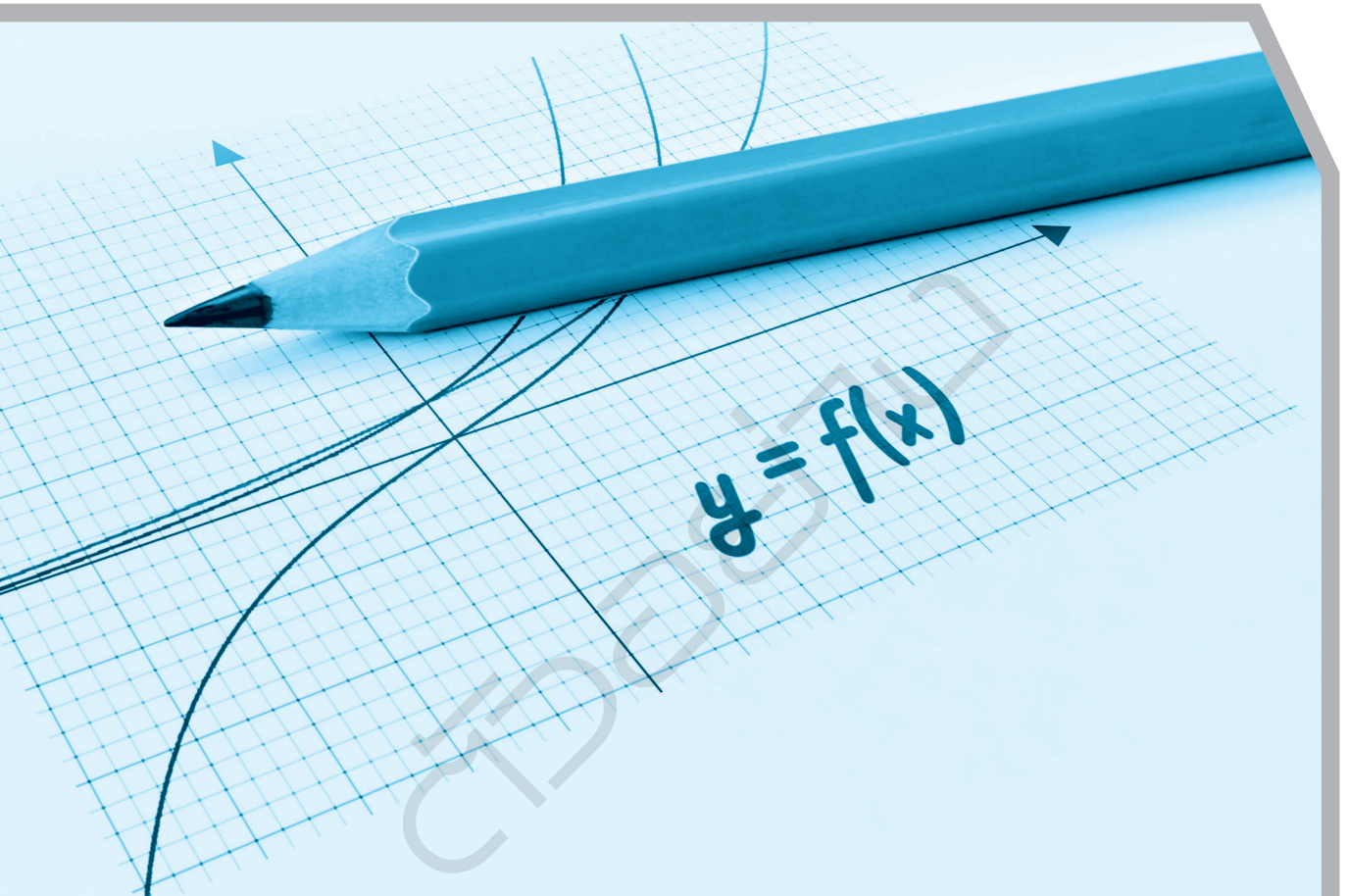


สารบัญ

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	1
1. ความสัมพันธ์	2
2. ฟังก์ชัน	15
3. การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง	32
4. กราฟของฟังก์ชัน	42
5. การดำเนินการของฟังก์ชัน	52
6. ฟังก์ชันผกผัน	68
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	78
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	83
1. เลขยกกำลัง	84
2. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	108
3. ฟังก์ชันลอการิทึม	118
4. การหาค่าลอการิทึม	124
5. การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม	128
6. สมการและอสมการลอการิทึม	130
7. การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	142
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	150
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์	152
1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์	153
2. ภาคตัดกรวย	187
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	229
บรรณานุกรม	233
ภาคผนวก	234



ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน



สาระและผลการเรียนรู้

สาระจำนวนและพีชคณิต

เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม และนำไปใช้

ผลการเรียนรู้

1. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน หาฟังก์ชันประกอบ และฟังก์ชันผกผัน
2. ใช้สมบัติของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา

ในชีวิตประจำวันเราจะพบกับความสัมพันธ์อยู่ตลอดเวลา ซึ่งอาจเป็นความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งสองสิ่ง เช่น การเป็นพ่อกับลูก การเรียนอยู่ในห้องเดียวกัน บุคคลกับเลขประจำตัวประชาชน จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่าความสัมพันธ์ คือ การจับคู่ระหว่างสิ่งแรกกับสิ่งที่สอง บางความสัมพันธ์เป็นการจับคู่ระหว่างสิ่งแรกตัวเดียวกับสิ่งที่สองหลายตัว หรือการจับคู่ระหว่างสิ่งแรกหลายตัวกับสิ่งที่สองเพียงตัวเดียว แต่บางความสัมพันธ์เป็นการจับคู่ระหว่างสิ่งแรกเพียงตัวเดียวกับสิ่งที่สองเพียงตัวเดียว ในทางคณิตศาสตร์จะเรียกความสัมพันธ์สองแบบหลังนี้ว่า ฟังก์ชัน

1. ความสัมพันธ์

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถหาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง

คู่อันดับ (a, b) มี a เป็นสมาชิกตัวหน้า และ b เป็นสมาชิกตัวหลัง

การเป็นคู่อันดับ คือ จะต้องเป็นคู่และมีอันดับ

$(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

เรียกเซตของคู่อันดับ (a, b) โดย a และ b มีความเกี่ยวข้องกันว่า **ความสัมพันธ์**

ผลการเรียนรู้

บทนิยาม

ผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian product) ของเซต A และเซต B คือเซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$

$A \times B$ อ่านว่า เอคูณบี

$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ และ } b \in B\}$

ถ้าเซต A มีจำนวนสมาชิกเป็น m

เซต B มีจำนวนสมาชิกเป็น n

$A \times B$ จะมีจำนวนสมาชิกเป็น $m \times n$





1.1 ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์ (relation) เป็นความเกี่ยวข้องของสิ่งสองสิ่งภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง



บทนิยาม

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

ถ้า $r \subset A \times B$ จะเรียก r ว่า **ความสัมพันธ์จาก A ไป B**

ถ้า $r \subset A \times A$ จะเรียก r ว่า **ความสัมพันธ์บนเซต A**

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ อาจเขียนแทน $(x, y) \in r$ ด้วย “ $x r y$ ” อ่านว่า x มีความสัมพันธ์ r กับ y ถ้า $(x, y) \notin r$ เขียนแทนด้วย $x \not r y$ อ่านว่า x ไม่มีความสัมพันธ์ r กับ y



1.2 กราฟของความสัมพันธ์

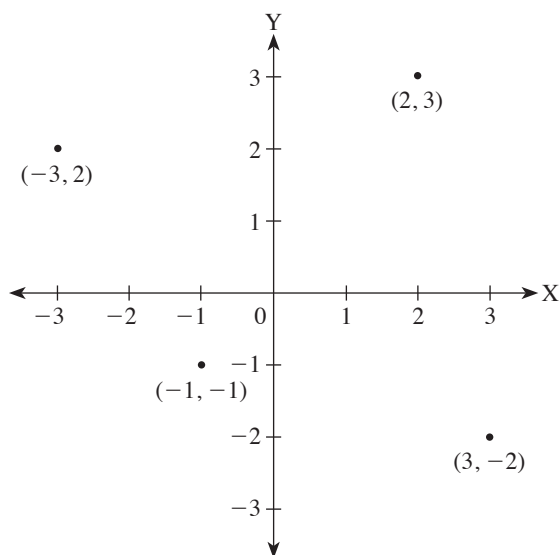


บทนิยาม

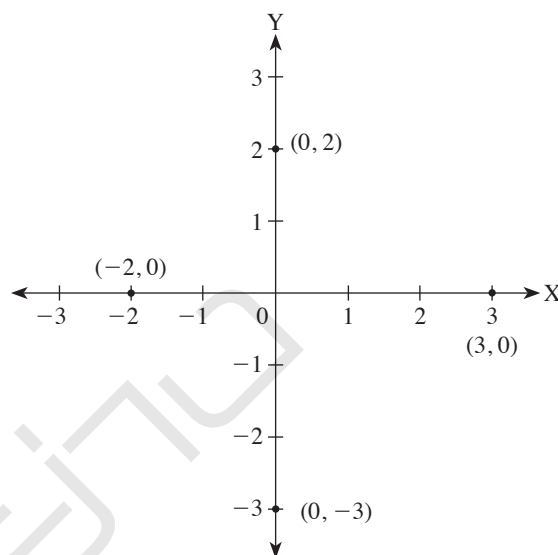
กำหนด r เป็นสับเซตของ $R \times R$ กราฟของความสัมพันธ์ r คือเซตของจุดในระนาบที่แสดงคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r

ตัวอย่างกราฟของความสัมพันธ์ r

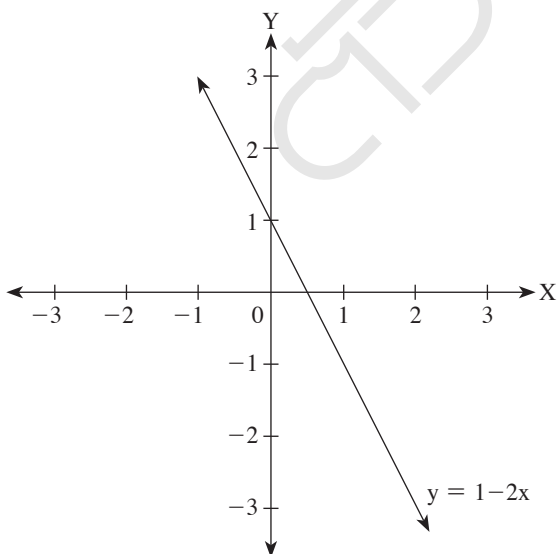
$$r_1 = \{(2, 3), (-3, 2), (-1, -1), (3, -2)\}$$



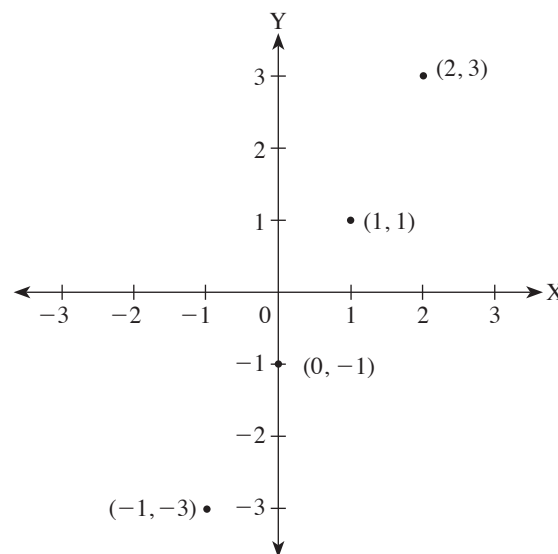
$$r_2 = \{(3, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -3)\}$$



$$r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 1 - 2x\}$$

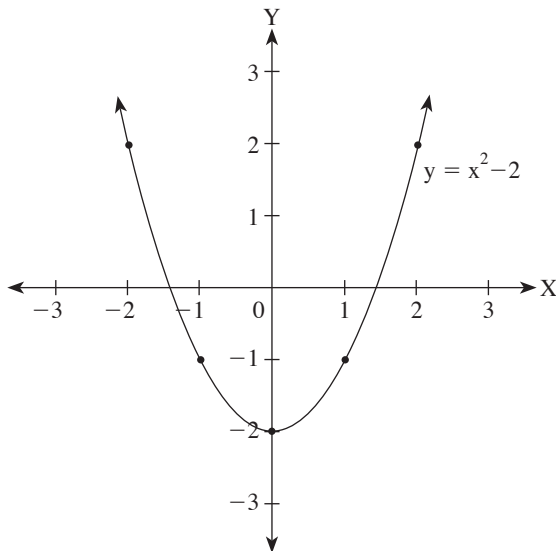


$$r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid y = 2x - 1\}$$

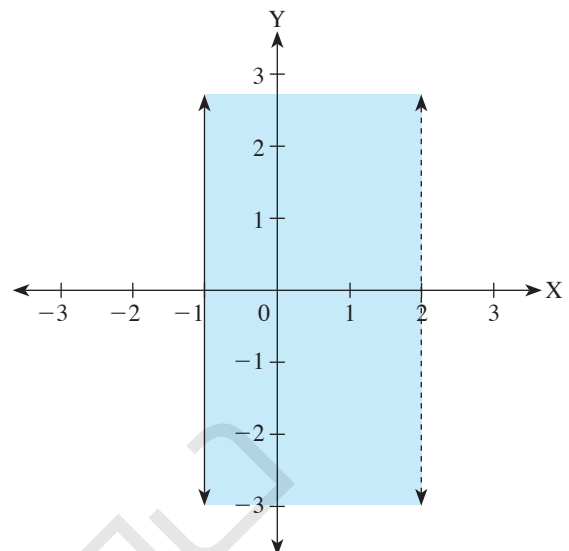




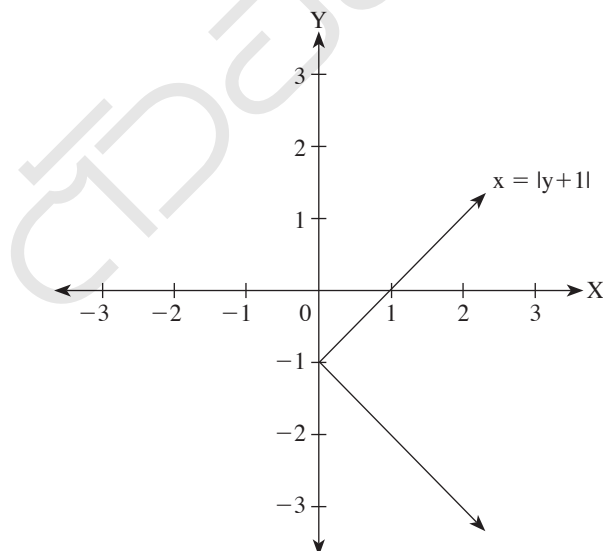
$$r_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = x^2 - 2\}$$



$$r_6 = \{(x, y) | -1 \leq x < 2\}$$



$$r_7 = \{(x, y) | x = |y + 1|\}$$





1.3 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์



บทนิยาม

ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

โดเมน (domain) ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน r เขียนแทนด้วย D_r

เรนจ์ (range) ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน r เขียนแทนด้วย R_r

ถ้าเซต r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

$$D_r = \{x \in A \mid \text{มี } y \in B \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$$

$$R_r = \{y \in B \mid \text{มี } x \in A \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$$



แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	A	B	$A \times B$
(1)	{a}	{b, c}	
(2)	{1, 2}	{3, 4}	
(3)	{-1, 0, 1}	{0}	
(4)	{-1, 0, 1}	{-1, 0, 1}	
(5)	{-3, -2}	{1, 2, 3}	
(6)	{a, b, c}	{2, 3}	
(7)	{0}	{1, 2, 3, 4}	
(8)	{1, 2, 3, 4}	{0}	
(9)	{a, b, c}	{d, e}	

2. กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ จงหา $A \times B$ และ $B \times A$ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

$$A \times B = \dots\dots\dots$$

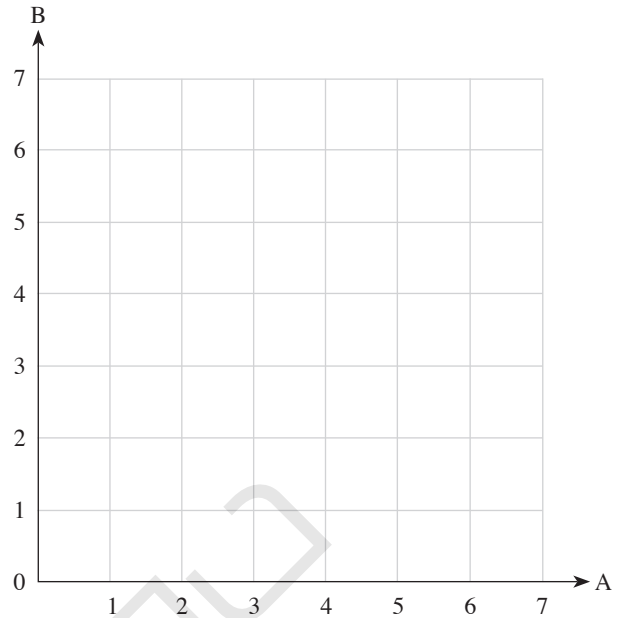
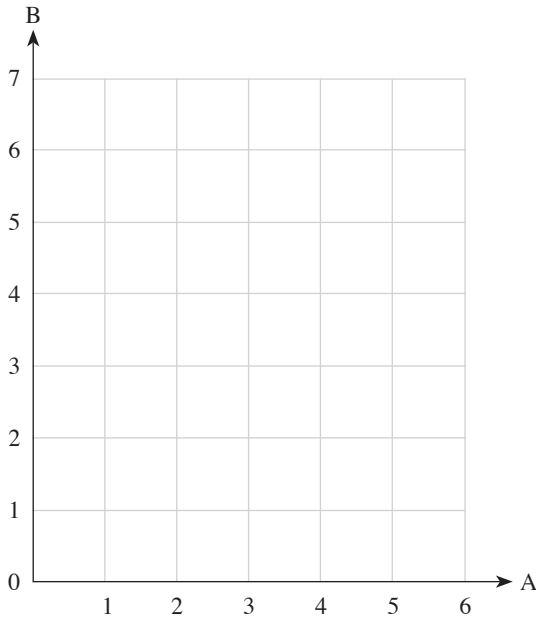
$$B \times A = \dots\dots\dots$$

.....

.....

.....

.....



3. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และ $B = \{x, y, z\}$ จงหาจำนวนสมาชิกใน $A \times B, B \times A, A \times A$ และ $B \times B$

วิธีทำ จาก $A = \{a, b, c, d\}$ $n(A) = \dots\dots\dots$
 $B = \{x, y, z\}$ $n(B) = \dots\dots\dots$
 $n(A \times B) = 4 \times 3 = \dots\dots\dots$
 $n(B \times A) = \dots\dots\dots$
 $n(A \times A) = \dots\dots\dots$
 $n(B \times B) = \dots\dots\dots$

4. ถ้า A เป็นเซตจำกัด จงหาจำนวนสมาชิก m ของความสัมพันธ์บน A ซึ่ง

- (1) A มี 3 สมาชิก (2) A มี n สมาชิก

วิธีทำ (1) จากกำหนด $n(A) = \dots\dots\dots$
 $n(A \times A) = \dots\dots\dots$
 ดังนั้น จำนวนสับเซตของ $A \times A = \dots\dots\dots$
 จำนวนความสัมพันธ์บน A คือ.....
 นั่นคือ $m = \dots\dots\dots$
 (2) จากกำหนด $n(A) = \dots\dots\dots$
 $n(A \times A) = \dots\dots\dots$
 ดังนั้น $m = \dots\dots\dots$

5. กำหนดให้ $A = \{2, 3, 5, 7\}$ จงเขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้

วิธีทำ

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$A \times A = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(1) \quad r_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y > 7\}$$

$$r_1 = \dots\dots\dots$$

$$D_{r_1} = \dots\dots\dots \quad R_{r_1} = \dots\dots\dots$$

$$(2) \quad r_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid x = 2 \text{ และ } y < 5\}$$

$$r_2 = \dots\dots\dots$$

$$D_{r_2} = \dots\dots\dots \quad R_{r_2} = \dots\dots\dots$$

$$(3) \quad r_3 = \{(x, y) \in A \times A \mid x - y = 2\}$$

$$r_3 = \dots\dots\dots$$

$$D_{r_3} = \dots\dots\dots \quad R_{r_3} = \dots\dots\dots$$

$$(4) \quad r_4 = \{(x, y) \in A \times A \mid xy > 2(x + y)\}$$

$$r_4 = \dots\dots\dots$$

$$D_{r_4} = \dots\dots\dots \quad R_{r_4} = \dots\dots\dots$$

☑ ข้อสังเกต

เมื่อ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

$$D_r \subset A \text{ และ } R_r \subset B$$



6. กำหนดให้ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

จงเขียนความสัมพันธ์ใน A แบบแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งเขียนโดเมนและเรนจ์จากเงื่อนไขที่กำหนด

$A \times A =$

เงื่อนไข	ความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก	โดเมน	เรนจ์
(1) $y = 2x$	$\{(-1, -2), (0, 0), (1, 2)\}$	$\{-1, 0, 1\}$	$\{-2, 0, 2\}$
(2) $3x + y = 4$			
(3) $y = 1 - x^2$			
(4) $y = x^3 - 4$			
(5) $xy = 4$			
(6) $y = 2x + 1$			
(7) $y = 3x - 1$			
(8) $x^2 + y^2 > 0$			

7. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in I \times I \mid x^2 + y^2 = 25\}$

เขียน r แบบแจกแจงสมาชิกจะได้ $r =$

โดเมน (D_r) คือ

เรนจ์ (R_r) คือ

☑หมายเหตุ

$$\text{จาก } x^2 + y^2 = 25$$

$$y^2 = 25 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

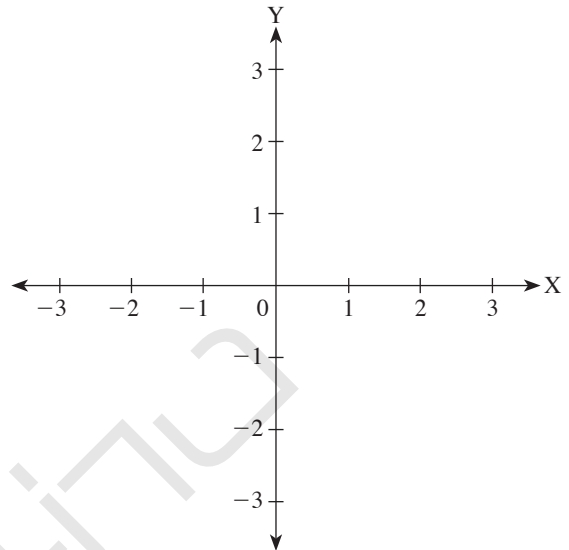
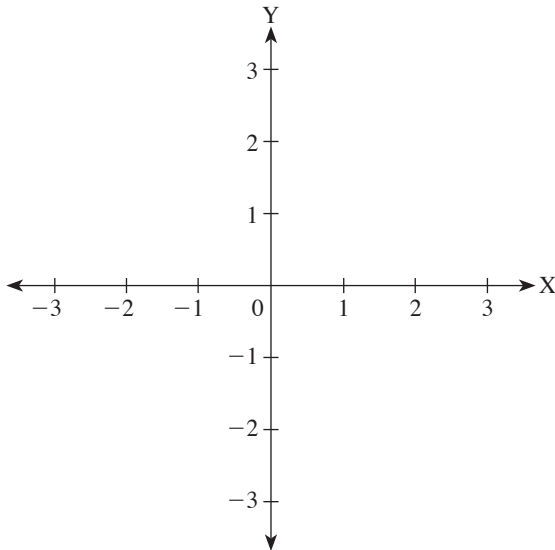
$$\text{หรือ } x^2 = 25 - y^2$$

$$\text{หรือ } x = \pm\sqrt{25 - y^2}$$

8. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

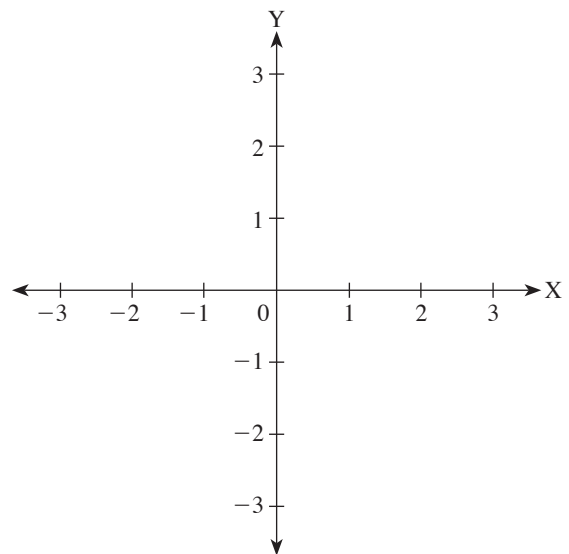
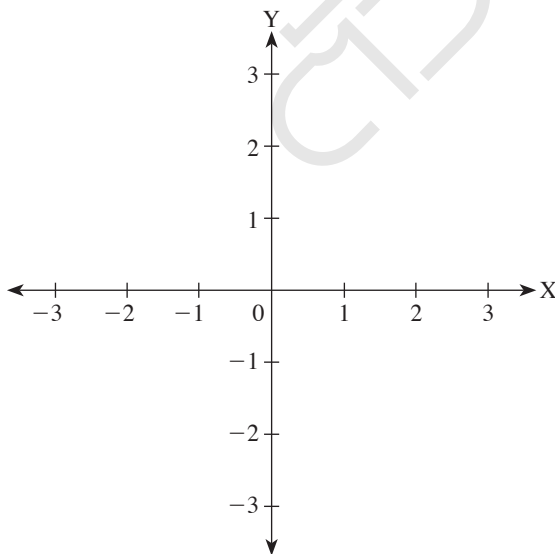
(1) $r_1 = \{(x, y) | y = 2 - x\}$

(2) $r_2 = \{(x, y) \in I \times I | x = 2 - y^2\}$



(3) $r_3 = \{(x, y) | -2 < y \leq 1\}$

(4) $r_4 = \{(x, y) | y \geq |x| - 1\}$





9. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4x^2 + 9y^2 = 36\}$

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r

หาโดเมน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

หาเรนจ์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r

(1) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy - y - 2x = 0\}$

(2) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}\}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

วิธีทำ

วิธีทำ



1.4 ตัวผกผันของความสัมพันธ์

บทนิยาม

ตัวผกผัน (inverse) ของความสัมพันธ์ r คือ ความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r

ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

$$r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in r\}$$

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว r^{-1} จะเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A



- เช่น
1. $r_1 = \{(a, b), (c, d), (e, f)\}$
 $r_1^{-1} = \{(b, a), (d, c), (f, e)\}$
 2. $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = ax + b\}$
 $r_2^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = ax + b\}$
 หรือ $r_2^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \frac{y-b}{a}, a \neq 0\}$
 หรือ $r_2^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x-b}{a}, a \neq 0\}$

✓ ข้อสังเกต

1. กราฟของความสัมพันธ์ใดๆ กับกราฟของตัวผกผันของความสัมพันธ์นั้นจะมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร กล่าวคือ ถ้าพับรูปตามแนวเส้นตรง $y = x$ แล้วกราฟของความสัมพันธ์ r และ r^{-1} จะทับกันพอดี
2. โดเมนของ r^{-1} เท่ากับเรนจ์ของ r และเรนจ์ของ r^{-1} เท่ากับโดเมนของ r



แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาตัวผกผันของความสัมพันธ์พร้อมทั้งบอกโดเมนและเรนจ์ของตัวผกผันของความสัมพันธ์

(1) $r = \{(-1, -2), (0, 0), (1, 2)\}$

$r^{-1} = \dots\dots\dots$

$D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$

$R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$

(2) $r = \{(-2, 4), (2, -4), (4, -8), (5, -10)\}$

$r^{-1} = \dots\dots\dots$

$D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$

$R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$

(3) $r = \{(2, 1), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (5, 2)\}$

$r^{-1} = \dots\dots\dots$

$D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$

$R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$

(4) $r = \{(x, y) \in N \times N | 2x + y = 10\}$ เมื่อ N เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

$r = \dots\dots\dots$

$r^{-1} = \dots\dots\dots$

$D_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$

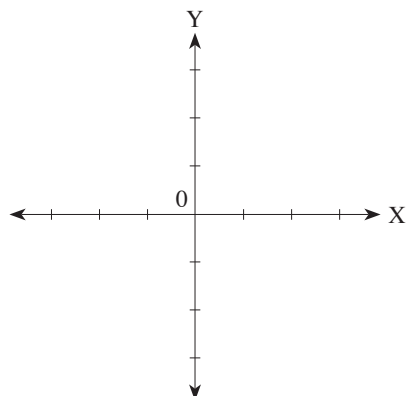
$R_{r^{-1}} = \dots\dots\dots$

2. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r และตัวผกผันของความสัมพันธ์ r หรือ r^{-1} บนแกนคู่เดียวกัน

(1) $r = \{(x, y) \in R \times R | y = 3 - 2x\}$

$r^{-1} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

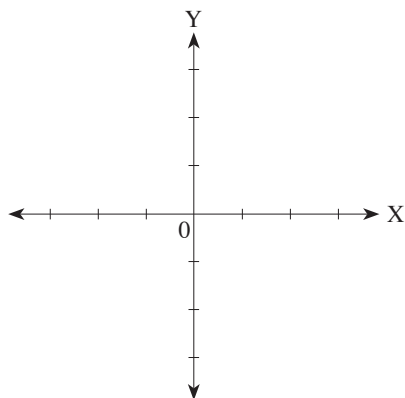




$$(2) \quad r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 - 2x = 0\}$$

$$r^{-1} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$



2. ฟังก์ชัน

จุดประสงค์

1. นักเรียนสามารถจำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชันได้
2. นักเรียนสามารถหาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชันได้
3. นักเรียนสามารถตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดได้

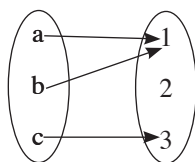
ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง

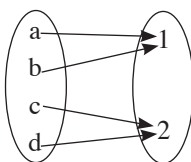
บทนิยาม

ฟังก์ชัน (function) คือ ความสัมพันธ์ซึ่งสำหรับคู่อันดับสองคู่ใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้าสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน สมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกัน

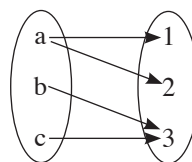
ฟังก์ชัน f คือความสัมพันธ์ซึ่งสำหรับ x, y และ z ใด ๆ ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$ ถ้ามี x, y และ z โดยที่ $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แต่ $y \neq z$ แล้ว f ไม่เป็นฟังก์ชัน



r_1



r_2



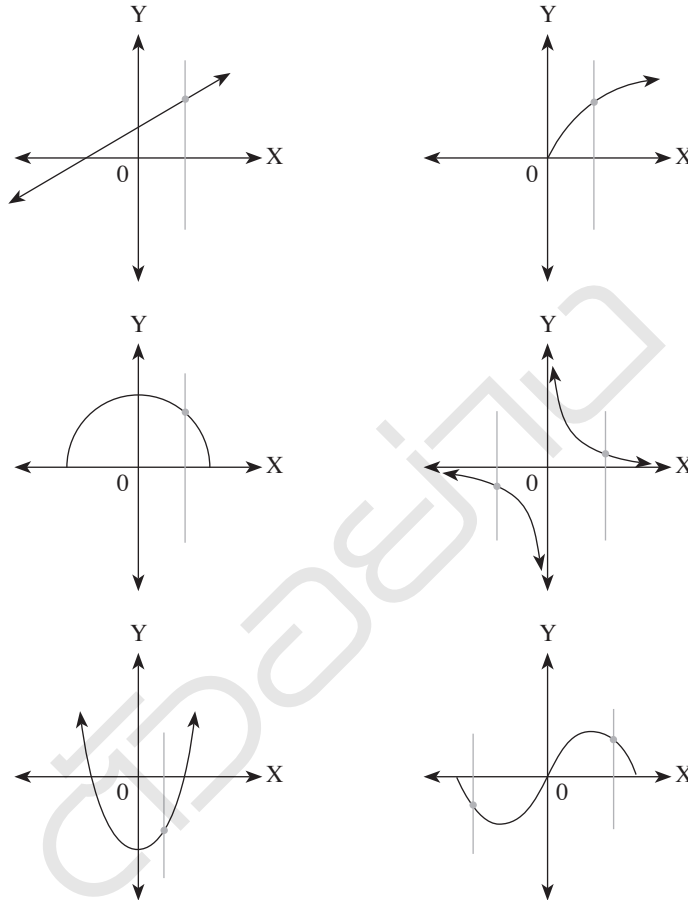
r_3

จากรูป จะเห็นว่าสมาชิกตัวแรกของคู่อันดับใน r_1 และ r_2 จะจับคู่กับสมาชิกตัวที่สองเพียงตัวเดียว ดังนั้น r_1 และ r_2 เป็นฟังก์ชัน

r_3 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีสมาชิกตัวแรกของคู่อันดับใน r_3 คือ a จับคู่กับสมาชิกตัวที่สอง 2 ตัว คือ $(a, 1), (a, 2) \in r_3$

การพิจารณาว่ากราฟใดเป็นกราฟของฟังก์ชันหรือไม่ ให้ลากเส้นตั้งฉากกับแกน X ถ้าเส้นตรงนั้นตัดกราฟเพียงหนึ่งจุด กราฟนั้นจะเป็นกราฟของฟังก์ชัน

ลักษณะกราฟของฟังก์ชัน



ในกรณีที่ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชัน และ $(x, y) \in f$ เขียนในรูป $y = f(x)$ จะเรียก $f(x)$ ว่าเป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x อ่านว่า เอฟของเอกซ์ หรือเอฟเอกซ์



2.1 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แล้วเซต A จะเป็นโดเมนของฟังก์ชัน f เรียกเซต B ว่า **เซตฝ่ายรับ (codomain)** ของฟังก์ชัน f เซตของสมาชิกซึ่งอยู่ใน B จะเป็นเรนจ์ของฟังก์ชัน f

เราจะเขียน D_f แทนโดเมนของฟังก์ชัน f ซึ่ง $D_f = \{x | (x, y) \in f\}$

และ R_f แทนเรนจ์ของฟังก์ชัน f ซึ่ง $R_f = \{y | (x, y) \in f\}$



หมายเหตุ

1. ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชัน จะเรียกโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์นั้นว่าโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน ตามลำดับ
2. เมื่อ f เป็นฟังก์ชัน หมายถึง ฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง R

ฟังก์ชันจาก A ไป B (function from A into B)

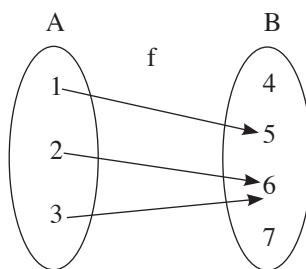


บทนิยาม

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มี A เป็นโดเมน และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนด้วย $f: A \rightarrow B$

เช่น ให้ $A = \{1, 2, 3\}$
 $B = \{4, 5, 6, 7\}$



จะได้ว่า

$$D_f = \{1, 2, 3\}$$

$$R_f = \{5, 6\} \text{ หรือ } R_f \subset B \text{ และ } R_f \neq B$$

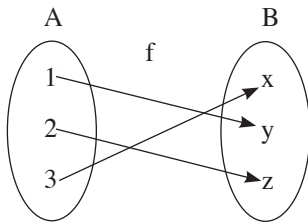
ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (function from A onto B)

📖 บทนิยาม

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มี A เป็นโดเมน และ B เป็นเรนจ์
 f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$

เช่น (1) ให้ $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{x, y, z\}$

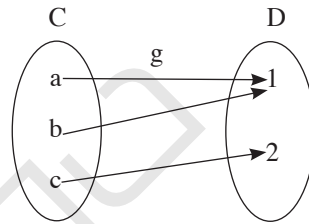


จะได้ว่า $D_f = A$

$R_f = B$

(2) ให้ $C = \{a, b, c\}$

$D = \{1, 2\}$



จะได้ว่า $D_g = C$

$R_g = D$

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one function)

📖 บทนิยาม

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B สำหรับ x_1, x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

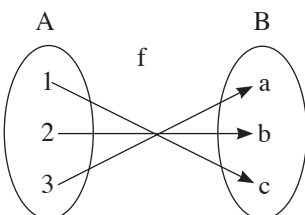
f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{1-1} B$

จากบทนิยาม $f: A \rightarrow B$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ x_1, x_2 ใน A ที่ $x_1 \neq x_2$ และ $f(x_1) = f(x_2)$

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B (one-to-one function from A onto B หรือ one-to-one correspondence) เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{1-1 \text{ ทั่วถึง}} B$

เช่น (1) ให้ $A = \{1, 2, 3\}$

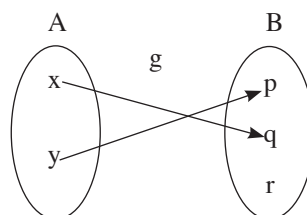
$B = \{a, b, c\}$



จะได้ว่า A เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
จาก A ไปทั่วถึง B

(2) ให้ $C = \{x, y\}$

$D = \{p, q, r\}$



จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก
A ไป B ($R_g \neq B$)



การตรวจสอบว่าฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ อาจใช้บทนิยามดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1

$$(1) f(x) = 5 - 2x$$

$$(2) g(x) = x^2 + 2x$$

วิธีทำ

$$(1) \text{ จาก } f(x) = 5 - 2x$$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\text{สมมติ } f(x_1) = f(x_2)$$

$$\text{จะได้ } 5 - 2x_1 = 5 - 2x_2$$

$$-2x_1 = -2x_2$$

$$x_1 = x_2$$

นั่นคือถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตอบ

$$(2) \text{ จาก } g(x) = x^2 + 2x$$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\text{สมมติ } g(x_1) = g(x_2)$$

$$\text{จะได้ } x_1^2 + 2x_1 = x_2^2 + 2x_2$$

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) = 0$$

$$\text{นั่นคือ } x_1 - x_2 = 0 \text{ หรือ } x_1 + x_2 + 2 = 0$$

$$x_1 = x_2 \text{ หรือ } x_1 = -x_2 - 2$$

จะเห็นว่ากรณี $x_1 \neq x_2$ แต่ $f(x_1) = f(x_2)$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตอบ

ทฤษฎีบท

สำหรับเซต A และเซต B ถ้า $f: A \rightarrow B$ แล้วจะได้ว่า

$$1. A \subset B \rightarrow f(A) \subset f(B)$$

$$2. f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$3. f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

$$4. f(A) - f(B) \subset f(A - B)$$

ทฤษฎีบท

ถ้า $f: A \rightarrow B$ และ $g: A \rightarrow B$ แล้ว $f = g$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = g(x)$ สำหรับทุกสมาชิก

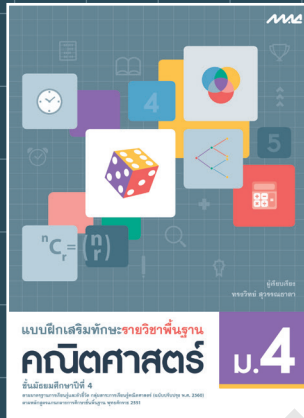
$$x \in A$$



แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะเหตุใด

ความสัมพันธ์	เป็น ฟังก์ชัน	ไม่เป็น ฟังก์ชัน	เหตุผล
(1) $\{(-2, 6), (-3, 5), (-2, 4)\}$			
(2) $\{(-3, 7), (-4, 7), (3, 7), (4, -4), (-4, 4)\}$			
(3) $\{(-3, -4), (1, 0), (5, 4)\}$			
(4) $\{(2, -1), (-2, -5), (3, 0)\}$			
(5) $\{(1, 1), (2, 3), (50, 99), (-1, -3)\}$			
(6) $\{(x, y) \in A \times A \mid y \leq 2x - 1\}$ $A = \{-1, 0, 1\}$			
(7) $\{(x, y) \in A \times A \mid x = y^2 - 1\}$ $A = \{-1, 0, 1\}$			
(8) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 5x - 2\}$			
(9) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 7\}$			
(10) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x-1}\}$			



แบบฝึกเสริมทักษะ
รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2



2522304100

MME | MACEDUCATION
www.MACeducation.com



8 858700 711670

ราคา 70 บาท