



เฉลยข้อสอบ วิชาคณิตศาสตร์ ส่วน.

พ.ศ.2561 ถึง พ.ศ.2565

ธีรพร ทองศิริ

คำนำ

หนังสือเล่มนี้ ผู้แต่งได้จัดทำขึ้นมาเพื่อช่วยให้นักเรียนที่กำลังจะเข้าสอบคัดเลือกในโครงการโอลิมปิกวิชาการ สอวน. วิชาคณิตศาสตร์ ให้อ่านแล้วเข้าใจมากขึ้นและสอนให้รู้จักวิธีการเขียนการคิดอย่างเป็นระบบโดยนำทฤษฎีต่าง ๆ ที่ไม่เกินเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษามาใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างดี

หนังสือประกอบได้ว่า 2 บทโดยที่บทที่ 1 จะกล่าวถึงโจทย์ข้อสอบคัดเลือกในโครงการโอลิมปิกวิชาการสอวน. ที่สอบในปีพ.ศ. 2561 ถึง พ.ศ.2565 ซึ่งรวมทั้งหมด 150 ข้อและในบทที่ 2 จะกล่าวถึงเฉลยอย่างละเอียดทั้ง 150 ข้อนั้น

หนังสือเล่มนี้ หากมีข้อผิดพลาดประการใดๆ ขออภัยใน ณ ที่นี้ และหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เตรียมสอบหรือผู้ที่หาความรู้ทางคณิตศาสตร์ไม่มากนักน้อย

ธีรพร ทองศิริ

Contents

1	ข้อสอบการแข่งขันคณิตศาสตร์ สอน.	4
1.1	ข้อสอบปีพ.ศ. 2561	5
1.2	ข้อสอบปีพ.ศ. 2562	11
1.3	ข้อสอบปีพ.ศ. 2563	15
1.4	ข้อสอบปีพ.ศ. 2564	21
1.5	ข้อสอบปีพ.ศ. 2565	27
2	เฉลยข้อสอบการแข่งขันคณิตศาสตร์ สอน.	33
2.1	ข้อสอบปีพ.ศ. 2561	34
2.2	ข้อสอบปีพ.ศ. 2562	58
2.3	ข้อสอบปีพ.ศ. 2563	79
2.4	ข้อสอบปีพ.ศ. 2564	102
2.5	ข้อสอบปีพ.ศ. 2565	125

Chapter 1

ข้อสอบการแข่งขันคณิตศาสตร์ สอวน.

ข้อสอบปีพ.ศ. 2561

ข้อที่ 1. (สอวน 61) คุณครูคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาถามนักเรียนชายในชั้นเรียน 5 คนถึงการบ้านที่ให้ไว้ว่า “คาบที่แล้ว ครูให้การบ้านไว้กี่ข้อคะ” นักเรียนทั้ง 5 คนจึงตอบครูดังนี้

นาย ก บอกว่า “ครูให้การบ้าน 8 ข้อครับ”

นาย ข บอกว่า “เยอะไปครับครู ครูให้การบ้านไม่ถึง 5 ข้อครับ”

นาย ค บอกว่า “ครูให้การบ้าน 8 ข้อ หรือ 9 ข้อนี้แหละครับ”

นาย ง บอกว่า “นาย ค จำผิดแล้วแหละ ครูให้การบ้านไม่เกิน 7 ข้อครับ”

นาย จ บอกว่า “ครูครับ ผมจำได้ว่าครูให้การบ้านมากกว่า 6 ข้อครับ”

หลังจากที่ครูยังไม่ได้ข้อสรุป จึงได้สอบถามนักเรียนแต่ละคนอีกครั้งหนึ่ง จนได้ใจความดังนี้

นาย ก บอกว่า “นาย ข และ นาย ง พูดโกหกครับ”

นาย ข บอกว่า “นาย จ พูดโกหกครับ”

นาย ค บอกว่า “นาย ก และ นาย ง พูดจริงครับ”

นาย ง บอกว่า “นาย ข พูดโกหกครับ”

นาย จ บอกว่า “นาย ค พูดโกหกครับ”

จากบทสนทนาดังกล่าว สรุปว่าคาบที่แล้วครูให้การบ้านกี่ข้อ หากกำหนดเงื่อนไขว่านักเรียนแต่ละคนพูดจริงเท่านั้นหรือพูดโกหกเท่านั้น

ข้อที่ 2. (สอวน 61) 7^m มีเลขหลักหน่วยเป็นเลขใด เมื่อ m คือจำนวนหลักของ $25^{25} \times 8^{20}$

ข้อที่ 3. (สอวน 61) จงหาจำนวนนับที่น้อยที่สุดที่มีตัวประกอบทั้งหมด 60 จำนวนและเป็นตัวประกอบเฉพาะที่แตกต่างกันเพียงสามจำนวน

ข้อที่ 4. (สอวน 61) จงหาค่า $m + n$ ที่น้อยที่สุด เมื่อกำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนนับที่มี ห.ร.ม. และ ค.ร.น. เป็น 30 และ 5400 ตามลำดับ

ข้อที่ 5. (สอวน 61) มีจำนวนเต็มบวก n ตั้งแต่ 1 ถึง 200 ทั้งหมดกี่จำนวน ที่ $n^2 + 9$ หารด้วย 5 ลงตัว

ข้อที่ 6. (สอวน 61) กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 350 จงหา n ที่น้อยที่สุดที่มีสมบัติว่า

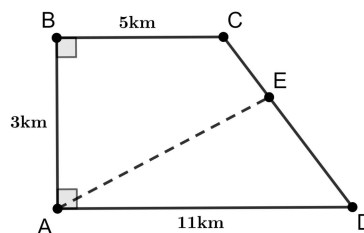
- n เป็นผลบวกของจำนวนเต็มบวกที่เรียงกัน 3 จำนวน
- n เป็นผลบวกของจำนวนเต็มบวกที่เรียงกัน 4 จำนวน
- n เป็นผลบวกของจำนวนเต็มบวกที่เรียงกัน 5 จำนวน

ข้อที่ 7. (สอวน 61) กำหนดให้ $N = 737373 \dots 73$ เป็นจำนวนเต็มที่มี 2560 หลัก ประกอบไปด้วยเลขโดด 7 และ 3 สลับกันอย่างละ 1280 ตัว จงหาเศษจากการหาร N ด้วย 37

ข้อที่ 8. (สอวน 61) กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 22\}$ จงหาจำนวนสับเซต S ของ A ซึ่งผลบวกของสมาชิกที่น้อยที่สุดของ S กับสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดของ S เท่ากับ 23

ข้อที่ 9. (สอวน 61) เกาะแห่งหนึ่งมีรูปร่างและขนาดดังรูป (มุม BAD และ มุม ABC เป็นมุมฉาก) เจ้าของต้องการแบ่งเขตกลางเกาะเป็นเกาะฝั่งเหนือและเกาะฝั่งใต้ จากจุด A ไปถึงจุด E บนด้าน CD เพื่อให้ความยาวรอบเกาะที่ติดทะเลของฝั่งเหนือเท่ากับความยาวรอบเกาะที่ติดทะเลของฝั่งใต้

หากผู้รับเหมาเสนอราคาถมดินตามแนวรอบเกาะที่ติดทะเลด้านฝั่งเหนือกิโลเมตรละ 5 ล้านบาท ฝั่งใต้กิโลเมตรละ 10 ล้านบาทและขายเหมาเป็นหน่วยเต็มกิโลเมตร เจ้าของเกาะจะใช้งบประมาณกี่ล้านบาทในการถมดินตามแนวชายฝั่งรอบเกาะนี้ตาม เงื่อนไขข้างต้น



ข้อที่ 10. (สอวน 61) ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ โดยที่ $3x^2 + 3x^2 = 7$ และ $x^3 + y^3 = 3$ จงหาค่า $x + y$ ที่มากที่สุด

ข้อที่ 11. (สอวน 61) ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องสมการ

$$y^2 + 2x^2y^2 = 96x^2 + 864$$

จงหา $x^2 + y^2$

ข้อที่ 12. (สอวน 61) ให้ $x_i \in \mathbb{R}$ โดยที่ $|x_i| < 1$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ และ

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + 2561$$

จงหาค่า n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้สมการเป็นจริง

ข้อที่ 13. (สอวน 61) จงหารากที่สามของ $3^7(9 - 5^5) + 5^{10}(81 - 5^5)$

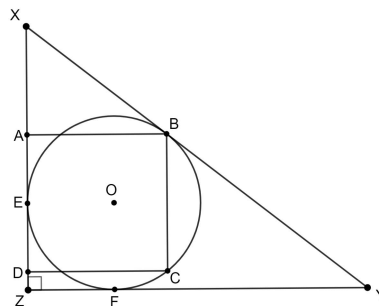
ข้อที่ 14. (สอวน 61) สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ นิยามฟังก์ชัน $P(n)$ เป็นผลคูณของเลขโดด ที่ไม่เป็นศูนย์ของ n ในระบบฐานสิบ (ตัวอย่างเช่น $P(1023) = 1 \times 2 \times 3 = 6$) จงหาค่าของ

$$\sum_{n=1}^{99} P(n)$$

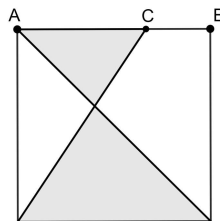
ข้อที่ 15. (สอวน 61) กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามโดยที่ $P(x-1) + P(x+1) = x^3$ สำหรับทุกจำนวนจริง x จงหาผลบวกของสัมประสิทธิ์ของ $P(x)$

ข้อที่ 16. (สอวน 61) กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามที่หารด้วย $x-2$ และ $x+3$ แล้วเหลือเศษ 5 และ -7 ตามลำดับ จงหาเศษเหลือจากการหารของ $P(x)$ ด้วย $x^2 + x - 6$

ข้อที่ 17. (สอวน 61) สามเหลี่ยมมุมฉาก XYZ มีด้าน XZ ยาว 3 หน่วยและด้าน ZY ยาว 4 หน่วย วงกลมวงหนึ่งแนบใน รูปสามเหลี่ยมนี้โดยเส้นรอบวงสัมผัสด้าน XZ ที่จุด E สี่เหลี่ยมจัตุรัส $ABCD$ มีมุม B และ C อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมและด้าน AD อยู่บนด้าน XZ ของสามเหลี่ยมโดยที่จุด E แบ่งครึ่งด้าน AD ดังรูป จงหาพื้นที่สี่เหลี่ยม $ABCD$



ข้อที่ 18. (สอวน 61) จากรูป สี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปนี้มี $AC : BC = 2 : 1$ จงหาสัดส่วนของพื้นที่ที่แรเงาต่อพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้

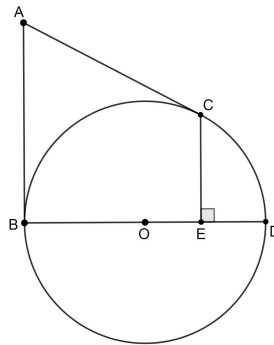


ข้อที่ 19. (สอวน 61) กำหนดสามเหลี่ยม ABC มีฐานยาว 20 เซนติเมตร หากลากเส้นจากจุดยอดมาตั้งฉากกับฐานจะพบว่า

- เส้นนี้มีความยาว 8 เซนติเมตร
- เส้นนี้แบ่งครึ่งมุมยอด
- เส้นนี้แบ่งสามเหลี่ยมออกเป็นสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน

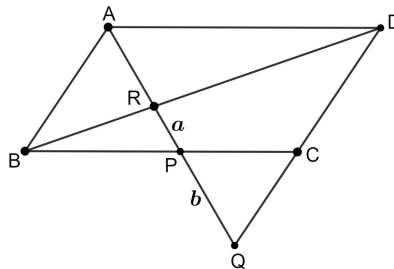
จงหาความยาวรอบรูปของสามเหลี่ยม ABC นี้

ข้อที่ 20. (สอวน 61) จากจุด A ลากเส้นสัมผัสวงกลมรัศมี 5 หน่วยที่จุด B และ C กำหนดให้ BD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมและ CE ตั้งฉากกับ BD ดังรูป ถ้าให้ CE ยาว 4 หน่วย จงหาความยาว AB

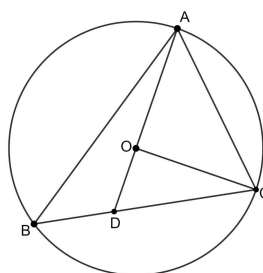


ข้อที่ 21. (สอวน 61) ทรงกระบอกปิดอันหนึ่งมีปริมาตรเท่ากับพื้นที่ผิว หากเพิ่มความสูงขึ้น 50% และลดรัศมีลง 25% พบว่า ทรงกระบอกปิดอันใหม่ที่ได้ยังคงมีปริมาตรเท่ากับพื้นที่ผิว จงหาปริมาตรของทรงกระบอกปิดอันเริ่มต้น

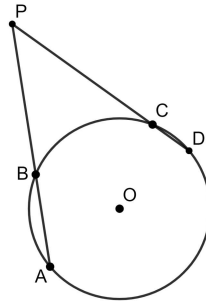
ข้อที่ 22. (สอวน 61) ให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ $AB \parallel DC$ และ $AD \parallel BC$ ซึ่งเมื่อลากส่วนของเส้นตรงจากจุด A ไปตัดกับเส้นทแยงมุม BD ที่จุด R ไปตัดกับด้าน BC ที่จุด P และไปตัดกับส่วนต่อของด้าน DC ที่จุด Q แล้วจะได้ความยาวด้าน PR เท่ากับ a หน่วย และความยาวด้าน PQ เท่ากับ b หน่วยดังรูป จงหาความยาวด้าน AR



ข้อที่ 23. (สอวน 61) ให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมที่แนบในวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลางซึ่งเมื่อลากส่วนของเส้นตรงจากจุด A ผ่านจุดศูนย์กลาง O ไปตัดกับด้าน BC ที่จุด D และลากส่วนของเส้นตรง CO แล้วจะได้ $\angle BAO = 15^\circ$ และ $\angle ACO = 45^\circ$ จงหาอัตราส่วน $CD : BD$



ข้อที่ 24. (สอวน 61) จากรูป วงกลมรัศมียาว r หน่วย $AB = 8$ หน่วย $CD = 5$ หน่วย $BP = 6$ หน่วย และ $\hat{APD} = 60^\circ$ จงหาค่าของ r^2



ข้อที่ 25. (สอวน 61) ในการพยากรณ์อากาศช่วงฤดูฝนของเมืองหนึ่งพบว่า

- หากในวันหนึ่งฝนตกแล้วความน่าจะเป็นที่ฝนไม่ตกในวันถัดไปเป็น $\frac{5}{6}$
- หากในวันหนึ่งฝนไม่ตกแล้วความน่าจะเป็นที่ฝนไม่ตกในวันถัดไปเป็น $\frac{1}{2}$

ถ้าในสัปดาห์นี้ฝนไม่ตกในวันอังคาร จงหาความน่าจะเป็นที่ในสัปดาห์นี้ฝนไม่ตกทั้งในวันพฤหัสบดีและวันศุกร์

ข้อที่ 26. (สอวน 61) จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมดในการวางลูกบอลที่เหมือนกันทั้งหมด 8 ลูกไว้บนด้านทั้งสี่ของโต๊ะสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เหมือนกันทุกด้าน โดยแต่ละด้านต้องมีลูกบอลวางอย่างน้อย 1 ลูกและลูกบอลแต่ละลูกจะถูกนับว่าวางอยู่บนด้านใดด้านหนึ่งของโต๊ะเท่านั้น

ข้อที่ 27. (สอวน 61) กำหนดให้ $A(n)$ แทนเซตของเลขโดดที่เขียนแทนจำนวนนับ n เช่น $A(191) = 1, 9$ และ $A(2018) = 0, 1, 2, 8$ จงหา $|P|$ เมื่อ

$$P = \{n \in \mathbb{N} | A(n) = 0, 4, 7 \text{ และ } n \leq 10,000\}$$

ข้อที่ 28. (สอวน 61) มีกบตัวหนึ่งอยู่ที่จุด $x = 0$ บนเส้นจำนวนโดยในการกระโดดแต่ละครั้ง มันจะกระโดดได้ไกลหนึ่งหน่วยไปทางซ้ายหรือทางขวาด้วยความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่หลังจากการกระโดดครั้งที่ 2561 กบตัวนี้จะมาอยู่ที่จุด $x = 2018$ บนเส้นจำนวนนี้

ข้อที่ 29. (สอน 61) เด็กชายพลทอดลูกเต๋าเที่ยงตรงลูกหนึ่งในเกมการแข่งขันซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้

- ถ้าลูกเต๋ารั้งขึ้นแต้มมากกว่า 2 เขาจะชนะ
- ไม่เช่นนั้นเขาจะได้ทอดลูกอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งถ้าขึ้นแต้มมากกว่า 3 เขาจะชนะ
- ไม่เช่นนั้นเขาจะได้ทอดลูกอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งถ้าขึ้นแต้มมากกว่า 4 เขาจะชนะ
- ถ้าไม่ได้ตามนี้ถือว่าแพ้

จงหาว่าเด็กชายพลมีความน่าจะเป็นที่จะชนะการแข่งขันนี้เป็นเท่าใด

ข้อที่ 30. (สอน 61) จงหาตัวหารบวกทั้งหมดของ $2^3 3^5 5^7 7^2$ ที่เป็นจำนวนกำลังสอง

ข้อสอบปีพ.ศ. 2562

ข้อที่ 1. (سوال 62) ถ้า $a^{3n} = 5$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงและ n เป็นจำนวนเต็มแล้ว

$$\frac{a^{4n} + a^{7n} + a^{-5n}}{a^{-2n} + a^n}$$

มีค่าเท่าใด

ข้อที่ 2. (سوال 62) ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มี ห.ร.ม. และ ค.ร.น. เป็น 20 และ 50400 ตามลำดับ จงหาค่าที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ของ $m + n$

ข้อที่ 3. (سوال 62) จงหาผลบวกของรากทั้งหมดของสมการ

$$2x^2 - 10x + 7 + 4\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 31$$

ข้อที่ 4. (سوال 62) ครอบครัวหนึ่งมีสมาชิกทั้งหมด 5 คน ประกอบด้วย พ่อ แม่ และ ลูกสาว 3 คน โดยที่ลูกสาวคนโตเป็นฝาแฝดกัน ถ้าผลคูณของอายุของลูกสาวทั้งสามคนเท่ากับ 48 แล้วผลบวกของอายุของลูกสาวทั้งสามคนมีค่าเท่าใด (อายุคิดเป็นจำนวนเต็มปี)

ข้อที่ 5. (سوال 62) กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใบหนึ่งบรรจุแนบในทรงกลมที่มีรัศมี r หน่วย ถ้ากล่องใบนี้มีพื้นที่ผิวทั้ง 6 ด้านรวมกันเท่ากับ 384 ตารางหน่วย และผลรวมของความยาวสันกล่องทั้ง 12 สันเท่ากับ 112 หน่วย จงหาความยาวรัศมี r

ข้อที่ 6. (سوال 62) กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด C ไปตั้งฉากกับด้าน AB ที่จุด D ถ้า $AD = 2$ และ $BD = 3$ จงหาความยาวของ CD

ข้อที่ 7. (سوال 62) ชาวบ้านคนหนึ่งเลี้ยงหมูและเป็ดไว้ทั้งหมด 9 คอก ในแต่ละคอกต้องประกอบด้วยทั้งหมูและเป็ด โดยที่แต่ละคอกมีจำนวนรวมของสัตว์ทั้งสองชนิดแตกต่างกันทั้งหมดแต่มีจำนวนรวมกัน 40 ขาเท่ากันทุกคอก หากสุ่มเลือกมาคอกหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนรวมของสัตว์คอกนั้นเป็นจำนวนเฉพาะ

ข้อที่ 8. (سوال 62) การแข่งขันวิ่ง 200 เมตร รายการหนึ่งมีผู้เข้าแข่งขัน 5 คน ได้แก่ นักเรียน A, B, C, D และ E การแข่งขันนี้มีเงินรางวัลให้กับผู้ชนะเลิศ 7,000 บาท รางวัลที่สอง 5,000 บาท รางวัลที่สาม 2,500 บาท รางวัลที่สี่ 1,500 บาท และรางวัลที่ห้า 500 บาท เมื่อแข่งขันเสร็จ A, B และ C ให้ข้อมูลดังนี้

นักเรียน A : คนที่ถึงก่อนผมมีไม่น้อยกว่า 2 คนแต่ผมเข้าเส้นชัยก่อนนาย D

นักเรียน B : ผมถึงเส้นชัยตามหลังนาย E เลย

นักเรียน C : คนที่ถึงเส้นชัยหลังผมมีเพียง 2 คนเท่านั้น

นักเรียน A, B และ C ได้เงินรางวัลรวมกันเป็นเงินทั้งหมดกี่บาท

ข้อที่ 9. (สอวน 62) น้องมิวและน้องแบ้มแข่งเล่นเกมหมากฮอสกัน โดยในแต่ละเกม

ผู้ชนะจะได้ 4 คะแนน

ผู้แพ้จะได้ 0 คะแนนและ

ถ้าเสมอจะได้คนละ 1 คะแนน

จงหาว่าเมื่อเล่นกันไปจนครบ 10 เกมแล้วผลรวมของคะแนนทั้งหมดของทั้งคู่ที่มีค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ต่างจากค่าน้อยที่สุดที่เป็นไปได้อยู่เท่าใด

ข้อที่ 10. (สอวน 62) กำหนดให้ $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ m, n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $f(x)$ หารด้วย $x - 1$ แล้วเหลือเศษ 4 แต่หารด้วย $x + 3$ ลงตัว จงหาค่าของ mn

ข้อที่ 11. (สอวน 62) ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่เศษเหลือจากการหาร 555 และ 670 ด้วย m มีค่าเท่ากันคือ p ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะบวก จงหาค่าของ $m + p$

ข้อที่ 12. (สอวน 62) จงหาเศษจากการหาร $\left((2^{2562} \cdot 3^{2019})^{2020}\right)^{2563}$ ด้วย 10

ข้อที่ 13. (สอวน 62) ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a^2 + b^2 = 425$ ถ้า ห.ร.ม. ของ a และ b มีค่าเท่ากับ 5 จงหา ค.ร.น. ของ a และ b

ข้อที่ 14. (สอวน 62) ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่ไม่ทราบค่า และ $p(x) = ax^2 + bx + c$ ถ้า $(p(x))^3 - x$ มี $x^3 - 13x^2 + 44x - 32$ เป็นตัวประกอบ แล้ว $a - 7b - 2c$ มีค่าเท่าไร

ข้อที่ 15. (สอวน 62) ให้ A และ B เป็นจุดบนพาราโบลา $y = 4x^2 + 7x - 1$ ที่มีจุด $(0, 0)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างสองจุดนี้ จงหาระยะห่างระหว่างจุด A และจุด B

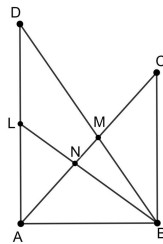
ข้อที่ 16. (สอวน 62) ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $ab \neq 1$ ถ้า $a^2 + 12a + 3 = 0$ และ $3b^2 + 12b + 1 = 0$ จงหาค่าของ $\frac{ab + a + 1}{b}$

ข้อที่ 17. (สอวน 62) มีกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองกล่อง กล่องแรกมีพื้นที่ผิวทั้งหกด้านรวมกันเท่ากับ 2 เท่าของปริมาตร กล่องที่สองมีความสูงเป็นครึ่งหนึ่งและมีความยาวฐานเป็นสองเท่าของกล่องแรก และมีพื้นที่ผิวทั้งหกด้านของกล่องนี้รวมกันเท่ากับ 3 เท่าของปริมาตร จงหาปริมาตรของกล่องแรก

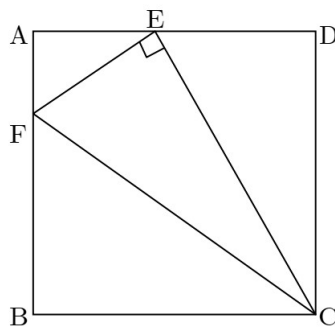
ข้อที่ 18. (สอวน 62) กรวยตรงอันหนึ่งมีฐานเป็นรูปวงกลมรัศมี 1 หน่วยและความสูง 3 หน่วยวัดจากยอดกรวยถึงจุดศูนย์กลางของฐาน กำหนดให้รูปทรงสี่เหลี่ยมลูกบาศก์รูปหนึ่งถูกแนบอยู่ภายในกรวยตรงอันนี้พอดี (จุดมุมสี่มุมล่างของสี่เหลี่ยมลูกบาศก์อยู่บนฐานกรวยและจุดมุมสี่มุมบนของสี่เหลี่ยมลูกบาศก์นี้อยู่บน ผิวข้างของกรวย) จงหาความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปทรงสี่เหลี่ยมลูกบาศก์นี้

ข้อที่ 19. (สอวน 62) กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ $AB = AC$ ให้ D และ E เป็นจุดบนด้าน AB และ AC ตามลำดับโดยที่ DE สัมผัสวงกลมแนบในสามเหลี่ยม ABC และขนานกับด้าน BC ถ้า $DE = 20$ หน่วย และ $BC = 52$ หน่วย จงหารัศมีของวงกลมที่แนบในสามเหลี่ยม

ข้อที่ 20. (สอวน 62) กำหนดให้ ABC และ ABD เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยมี $\hat{A}BC$ และ $\hat{B}AD$ เป็นมุมฉาก ดังรูป โดยมี $AB = 4$, $BC = 6$ และ $AD = 8$ หน่วย ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด B ไปแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง AD ที่จุด L ถ้า AC ตัดกับ BD และ BL ที่จุด M และ N ตามลำดับ แล้วจงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม BMN



ข้อที่ 21. (สอวน 62) กำหนด $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังรูป โดยมี E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD และ $\hat{C}EF = 90^\circ$ ให้ $\hat{B}CF = \alpha$ จงหาขนาดของ $\hat{D}CE$ ในพจน์ของ α (คำตอบต้องไม่อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ)



ข้อที่ 22. (สอวน 62) กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่ง $\hat{B} = 2\hat{C}$ และ $BC = 2AB$ จงหา $\hat{A} + \hat{C}$

ข้อที่ 23. (สอวน 62) ณ งานเลี้ยงหนึ่งมีผู้ร่วมงานทั้งหมด 50 คน แต่ละคนได้รับหมายเลขตามลำดับ การเข้างานตั้งแต่ 1 ถึง 50 ผู้ร่วมงานทักทายจับมือกันทั้งหมด 2 รอบ ดังนี้

รอบที่ 1 คนที่มีหมายเลข i จับมือกับคนที่มีหมายเลข $i + 1$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 49$ และคนที่ 50 จับกับคนที่ 1

รอบที่ 2 คนที่มีหมายเลขคู่จับมือกับคนที่มีหมายเลขมากกว่าตัวเองทั้งหมดที่ยังไม่เคยจับมือกัน
 อยากทราบว่าในงานนี้จะมีการจับมือทักทายกันทั้งหมดกี่ครั้ง

ข้อที่ 24. (สอวน 62) พิจารณาทารางขนาด 4×5 ซึ่งมีทั้งหมด 20 ช่อง จงหาจำนวนวิธีในการเลือกช่อง 3 ช่องจากตารางโดยที่แต่ละช่องที่เลือกมาอยู่ต่างแถวและต่างหลักกันทั้งหมด

ข้อที่ 25. (สอวน 62) กำหนดให้ a, b, c เป็นเลขโดด และจำนวน $20ab13c$ เป็นจำนวนเต็ม 7 หลักที่หารด้วย 792 ลงตัว จงหาค่าของ $a + b + c$

ข้อที่ 26. (สอวน 62) กำหนดให้ p เป็นจำนวนจริง และ r_1, r_2 เป็นรากทั้งสองของสมการ

$$x^2 - 17x - 632 = p$$

แล้วรากที่มีค่ามากที่สุดของสมการ $(x - r_1)(x - r_2) + p + 2 = 0$ มีค่าเท่าใด

ข้อที่ 27. (สอวน 62) สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ ใดๆ

นิยาม $f(n)$ เป็นตัวประกอบที่ใหญ่ที่สุดของ n ที่ไม่ใช่ตัวมันเอง

กำหนดให้ $a_1 = 2019^{2562}$ และสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ซึ่ง $a_n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวก นิยาม $a_{n+1} = a_n - f(a_n)$ ถ้า a_k คือพจน์แรกของลำดับนี้ที่มีค่าน้อยกว่า 2 แล้ว k มีค่าเท่าใด (Hint: 673 เป็นจำนวนเฉพาะ)

ข้อที่ 28. (สอวน 62) กบตัวหนึ่งต้องการกระโดดขึ้นบันไดโดยกบสามารถกระโดดขึ้นบันไดครั้งละ 1, 2 หรือ 3 ขั้นเท่านั้น (เช่นหากมีบันได 3 ขั้น กบตัวนี้จะมีวิธีการกระโดดขึ้นบันไดทั้งหมด 4 วิธี) ถ้าบันไดมี 7 ขั้น จงหาความน่าจะเป็นที่กบตัวนี้ไม่มีการกระโดดขึ้นบันไดครั้งละ 3 ขั้นเลย

ข้อที่ 29. (สอวน 62) ในห้องประชุมแห่งหนึ่งมีหลอดไฟ 2562 ดวงซึ่งแต่ละดวงติดหมายเลข 1 ถึง 2562 และมีนักเรียน 2562 คนเข้าไปเปลี่ยนสถานะของหลอดไฟ (ปิดหรือเปิด) ที่ละคนตามลำดับ โดยนักเรียนแต่ละคนจะเปลี่ยนสถานะของหลอดไฟทุกดวงที่ลำดับการเข้าของตนเอง หมาเลขของหลอดไฟดวงนั้นลงตัว (เช่นนักเรียนลำดับที่ 2 จะเปลี่ยนสถานะของหลอดไฟทุกดวงที่เป็นหมายเลขคู่)

ถ้าในตอนเริ่มต้นหลอดไฟทุกดวงมีสถานะเป็นปิด จงหาจำนวนหลอดไฟที่เปิดอยู่หลังจากนักเรียนคนที่ 2562 เข้าไปเปลี่ยนสถานะของหลอดไฟเสร็จแล้ว

ข้อที่ 30. (สอวน 62) ฟ้าเล่นเกมทายวันเกิดของส้มในเดือนกันยายนซึ่งเป็นเดือนเกิดของส้มพอดี ถ้าฟ้าทายวันที่เกิดของส้มถูก ส้มจะให้ของขวัญกับฟ้า ซึ่งในเดือนกันยายน ส้มจะพูดจริงในวันที่ตรงกับเลขที่วันเกิดของเธอเท่านั้นและ โกหกในวันอื่น ๆ ทั้งหมด โดยส้มพูดกับฟ้า ในช่วง 3 วันที่ติดต่อกันในเดือนกันยายนดังนี้

วันแรก ส้มพูดว่า “ฉันพูดโกหกในวันที่ 7, 11, 14, 18, 20, 23, 26 และ 29”

วันต่อมา ส้มพูดว่า “วันนี้เป็นวันที่ 6, 10, 11, 13, 14, 17, 18, 22, 23, 25, 26, 28 หรือ 29”

และวันสุดท้าย ส้มพูดว่า “ฉันพูดโกหกในวันที่ 5, 10, 13, 16, 17, 22, 25 และ 28”

จากข้อมูลที่ให้มา วันเกิดของส้มคือวันที่เท่าไรในเดือนกันยายน

ข้อสอบปีพ.ศ. 2563

ข้อที่ 1. (สอวน 63) กำหนดให้ k เป็นจำนวนนับ ถ้า

$$\underbrace{3^{k+1} + 3^{k+1} + \dots + 3^{k+1}}_{3^k \text{ พจน์}} = 3645$$

แล้วจงหาค่าของ

$$\underbrace{\frac{1}{9^k} + \frac{1}{9^k} + \dots + \frac{1}{9^k}}_{243 \text{ พจน์}} = 3645$$

ข้อที่ 2. (สอวน 63) กำหนดเซต A และ B โดย $n(A) + n(B) = 30$, $n(A \cap B) = 6$ และ $n(A' \cap B') = 7$ จงหาจำนวนสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์

ข้อที่ 3. (สอวน 63) กำหนดให้ $f\left(\frac{x}{2}\right) = 2x^2 - x + 3$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ จงหาผลคูณของค่า y ทั้งหมดที่ทำให้ $f(3y) = 10$

ข้อที่ 4. (สอวน 63) ด.ช.กรซื้อส้มและมังคุดมาจำนวนหนึ่ง โดยอัตราส่วนของจำนวนส้ม และ มังคุดเป็น $3 : 5$ หลังจากนั้น ด.ช.กรได้แบ่งส้มจำนวน $\frac{1}{3}$ ของจำนวนส้มที่มีอยู่ให้กับน้องสาว และแบ่งมังคุดจำนวน 21 ผลให้กับน้องชายของเขา เมื่อพิจารณาส้มและมังคุดที่เหลืออยู่พบว่า อัตราส่วนของจำนวนส้มและมังคุดเป็น $3 : 4$ จงหาว่า ด.ช.กรซื้อส้มและมังคุดมารวมกันกี่ ผล

ข้อที่ 5. (สอวน 63) กำหนดให้ p, q, r, s เป็นประพจน์

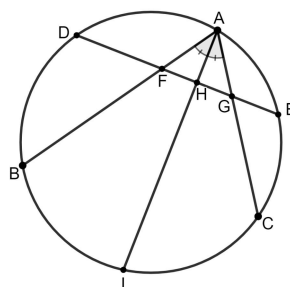
โดยที่ $(p \vee \sim q) \rightarrow (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

และ w แทนข้อความ $\forall x \in \mathbb{R} [4x^2 - 12x + 11 \geq 2]$

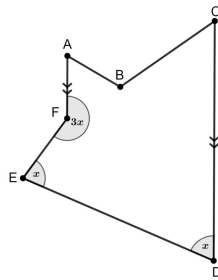
จงหาค่าความจริงของ r, w และ $\sim [w \wedge (q \rightarrow p)]$ ตามลำดับ

ข้อที่ 6. (สอวน 63) จงหาอัตราส่วนของพื้นที่ของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าต่อพื้นที่ของ รูป สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แนบในวงกลมเดียวกัน

ข้อที่ 7. (สอวน 63) กำหนดจุด A, B และ C บนวงกลมดังรูป จุด D และ E เป็นจุดกึ่งกลาง ของส่วนโค้ง AB และ AC ตามลำดับ เส้นตรง AI เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม BAC ถ้า $AF = 3$, $AH = 2$ แล้ว จงหาความยาว FG



ข้อที่ 8. (สอวน 63) จากรูป กำหนดให้ AF ขนานกับ CD จงหาค่าของ x



ข้อที่ 9. (สอวน 63) จากสถานการณ์น้ำท่วมทุ่งบางเขนครั้งหนึ่ง กรุงเทพมหานครติดตั้ง เครื่องสูบน้ำ 3 เครื่อง ซึ่งเมื่อทำงานพร้อมกันสามารถสูบน้ำหมดทุ่งบางเขนได้ใน h ชั่วโมง เป็นที่ทราบว่า ถ้าใช้เครื่องที่หนึ่งเพียงเครื่องเดียวจะสูบน้ำออกจากทุ่งบางเขนทั้งหมดจะต้องใช้เวลาเพิ่มขึ้น 4 ชั่วโมง ถ้าใช้เครื่องที่สองเพียงเครื่องเดียวจะสูบน้ำออกจากทุ่งบางเขนทั้งหมดจะต้องใช้เวลาเพิ่มขึ้น 10 ชั่วโมง ถ้าใช้เครื่องที่สามเพียงเครื่องเดียวจะสูบน้ำออกจากทุ่งบางเขนทั้งหมดต้องใช้เวลาเพิ่มขึ้น h ชั่วโมง จงหาค่า h

ข้อที่ 10. (สอวน 63) ให้ $B(n)$ แทนจำนวนของคู่เลขโดดที่อยู่ติดกันแต่ไม่เหมือนกัน เมื่อ n เป็นจำนวนที่เขียนในระบบตัวเลขฐานสอง เช่น

$$B(14) = B(1110_2) = 1$$

$$B(17) = B(10001_2) = 2$$

$$B(20) = B(10100_2) = 3$$

$$B(45) = B(101101_2) = 4 \text{ สำหรับ } 1 \leq n \leq 64 \text{ มีจำนวนเต็ม } n \text{ ทั้งหมดกี่ตัว ที่ } B(n) = 2$$

ข้อที่ 11. (สอวน 63) ระบบเลขฐานสิบหกประกอบไปด้วยเลขโดดจำนวน 16 ตัว ได้แก่ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E$ และ F

โดยที่ $A_{\text{สิบหก}} = 10, B_{\text{สิบหก}} = 11, C_{\text{สิบหก}} = 12, D_{\text{สิบหก}} = 13, E_{\text{สิบหก}} = 14, F_{\text{สิบหก}} = 15$ ยกตัวอย่างเช่น $1E_{\text{สิบหก}} = 30$

จงหาว่ามีจำนวนนับที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 2563 ทั้งหมดกี่จำนวนที่เมื่อเขียนอยู่ในระบบเลขฐานสิบหก แล้วจะมีทั้งตัวเลขและตัวอักษรภาษาอังกฤษ

ข้อที่ 12. (สอวน 63) ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ โดยที่ $a + b + c = 0$ ถ้า

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 2563$$

จงหาค่าของ $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

ข้อที่ 13. (สอวน 63) กล้องทีปใบหนึ่งบรรจุลูกบอลขนาดเดียวกันจำนวนหนึ่ง โดยมีลูกบอลสีเขียว 2563 ลูก และลูกบอลที่เหลือเป็นสีส้ม

กำหนดให้ n เป็นจำนวนลูกบอลที่น้อยสุดที่หยิบออกมาเพื่อการันตีให้ได้ลูกบอลสีเขียวอย่างน้อย 15 ลูก และ m เป็นจำนวนลูกบอลที่น้อยสุดที่หยิบออกมาเพื่อการันตีให้ได้ลูกบอลสีส้มอย่างน้อย 16 ลูก ถ้า $n = m$ แล้วกล่องใบนี้มีลูกบอลทั้งหมดกี่ลูก

ข้อที่ 14. (สอวน 63) จงหาจำนวนคู่อันดับ (m, n) ทั้งหมดที่ m, n เป็นจำนวนนับและ

$$m^3 n^2 = 210^{21} \times 25^{64}$$

ข้อที่ 15. (สอวน 63) พิจารณาลูกเต๋าลูกหนึ่งซึ่งโอกาสในการออกแต้มเป็นเลขคู่เป็นสองเท่าของแต้มเลขคี่ สมมติโยนลูกเต๋าสองครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ค่ามัธยฐานของแต้มจากการโยน ลูกเต๋านี้สามครั้ง เท่ากับ 6

ข้อที่ 16. (สอวน 63) เหรียญหนึ่งเมื่อโยนจะมีโอกาสออกหัวมากกว่าออกก้อย โดยความน่าจะเป็น ที่เมื่อโยนเหรียญนี้ 4 ครั้ง แล้วออกหัว 2 ครั้งและออกก้อย 2 ครั้ง มีค่าเท่ากับ $\frac{2}{27}$ จงหาความน่าจะเป็นที่เมื่อโยนเหรียญนี้ 1 ครั้ง แล้วออกหัว

ข้อที่ 17. (สอวน 63) ระบบสมการต่อไปนี้ มีอยู่หนึ่งสมการที่ทำให้ระบบสมการไม่มีผลเฉลย

$$(1) 2x - 2y + z = 3$$

$$(2) 2x - y + z = 5$$

$$(3) 3x - y + z = 8$$

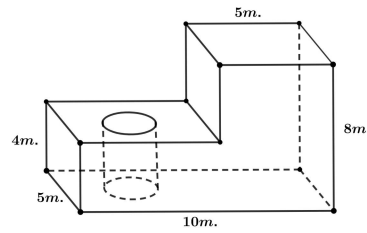
$$(4) 2x - 2y - z = -3$$

$$(5) 3x + y - z = 5$$

จงระบุว่าสมการใดที่ทำให้ระบบสมการนี้ไม่มีผลเฉลยและหากนำสมการนั้นออกจากระบบ จงหาผลเฉลยของระบบสมการที่เหลือ

ข้อที่ 18. (สอวน 63) กำหนดให้ $OABC$ เป็นพีระมิดฐานสามเหลี่ยมซึ่งมีด้าน OA, OB, OC ตั้งฉากซึ่งกันและกัน และด้าน AB, BC, AC มีความยาว 7, 8 และ 9 หน่วยตามลำดับ จงหาปริมาตรของพีระมิด $OABC$

ข้อที่ 19. (สอวน 63) ทรงตันมุมฉากมีโพรงทรงกระบอกที่ทะลุจากผิวด้านหนึ่งไปยังผิว อีกด้านหนึ่ง ดังรูป ถ้าค่าพื้นที่ผิวของทรงตันมากกว่าค่าปริมาตรของทรงตันอยู่ 24 π จงหาความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของโพรงทรงกระบอก



ข้อที่ 20. (สอวน 63) จงหาค่าของ $\frac{\text{ค.ร.น.}(1^1, 2^2, 3^3, \dots, 2020^{2020})}{\text{ค.ร.น.}(1^1, 2^2, 3^3, \dots, 2019^{2019})}$

ข้อที่ 21. (สอวน 63) จงหาผลบวกของจำนวนสี่หลักทั้งหมดที่มีเลขประจำหลักเป็นสมาชิก ที่แตกต่างกันจากเซต $\{1, 2, 4, 5, 8\}$

ข้อที่ 22. (สอวน 63) ให้ a, b, c เป็นจำนวนนับซึ่ง $a < b < c$ และมีสมบัติว่า $c^2 = 2a + 4b$ จงหาค่าของ $a^3 + b^2 + c$

ข้อที่ 23. (สอวน 63) ให้ S เป็นสับเซตของ $\{0, 1, 2, \dots, 99\}$ จงหา $n(S)$ ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ที่ทำให้ 9 พหุคูณ $x + y$ ไม่ลงตัว สำหรับทุกคู่ x, y ใน S ที่แตกต่างกัน

ข้อที่ 24. (สอวน 63) ณ ห้องซึ่งที่มีประตูสามชั้น เขียนแทนด้วย $D1, D2$ และ $D3$ จากบรรดานักโทษ 20 คน พบว่า

มีนักโทษ 1 คนที่ไม่ทราบวิธีเปิดประตูใดเลย

มีนักโทษ 2 คนที่ทราบวิธีเปิดทั้งสามประตู

มีนักโทษ 9 คนไม่ทราบวิธีเปิด $D1$

มีนักโทษ 10 คนไม่ทราบวิธีเปิด $D2$

มีนักโทษ 4 คนทราบวิธีเปิด $D1$ และ $D3$

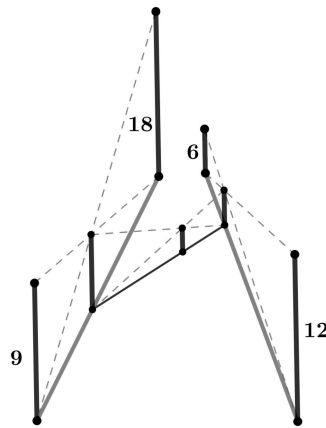
มีนักโทษ 6 คนทราบวิธีเปิด $D1$ แต่ไม่ทราบวิธีเปิด $D2$

มีนักโทษ 9 คนเปิดได้อย่างน้อยสองประตู

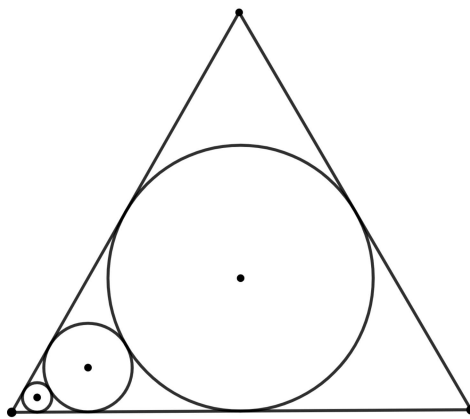
จำนวนนักโทษที่เปิดทั้ง $D1$ และ $D3$ ได้เท่ากับ จำนวนนักโทษที่เปิดทั้ง $D2$ และ $D3$ ได้

จงหาความน่าจะเป็นที่จากการสุ่มนักโทษ 2 คนจาก 20 คนนี้ นักโทษจะสามารถช่วยกันหนีออกจากห้องซึ่งได้

ข้อที่ 25. (สอวน 63) สนามหญ้าแห่งหนึ่งมีเสา 7 ต้น และลวดสลิง 6 เส้น โดยเสาแบ่งเป็นเสาด้านใหญ่ 4 ต้น และเสาด้านเล็ก 3 ต้น กำหนดความสูงของเสาด้านใหญ่ทั้ง 4 ต้น เป็นดังรูป จงหาความสูงของเสาด้าน ที่เตี้ยที่สุด

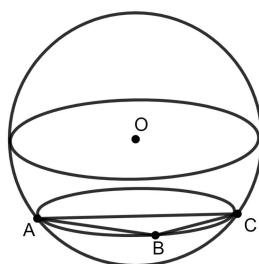


ข้อที่ 26. (สอวน 63) วงกลม 3 วงสัมผัสกันและแนบในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จงหาว่าวงกลมวงใหญ่สุดมีพื้นที่เป็นกี่เท่าของวงกลมวงเล็กสุด



ข้อที่ 27. (สอวน 63) ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามที่มีดีกรีน้อยสุดซึ่ง $p(n) = n^{100}$ สำหรับแต่ละ $n = 1, 2, 3, \dots, 100$ (อาจมีพหุนามที่สอดคล้องหลายพหุนาม) จงหาค่าของ $p(0)$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ข้อที่ 28. (สอวน 63) กำหนดสามเหลี่ยม ABC มีจุดยอดอยู่บนพื้นผิวของทรงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมียาว 5 หน่วย ถ้า $AC = 6, AB = BC$ และ $\hat{ABC} = 90^\circ$ จงหาปริมาตรของพีระมิด $ABCO$



ข้อที่ 29. (สอวน 63) ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนนับซึ่ง $a + b + c + d = 2020$ จงหาค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของ $ab + bc + cd$

ข้อที่ 30. (สอวน 63) กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ ดังรูป โดยที่ $\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ เส้นตรง GH ขนานกับ AD และ $\hat{CBF} = \hat{BAE} + \hat{EHG}$ ถ้า $BC = CE = FG = 4$, $EF = 2$ และ $GH = 8$ แล้ว จงหาความยาว GD

