

พิมพ์ครั้งที่ 2

แคลคูลัส

CALCULUS 1-1

- ◆ เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น
- ◆ พังก์ชัน (พังก์ชันเส้นตรง พังก์ชันกำลังสอง พังก์ชันชี้กำลัง พังก์ชันลอการิทึม)
- ◆ ลิมิตและความต่อเนื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์อนุพันธ์
- ◆ เทคนิคการอินทิเกรตและการประยุกต์

ตรงตามหลักสูตร
ระบบการศึกษา
แผนใหม่

- ✓ ฉบับมาตรฐานตรงตามหลักสูตร
- ✓ มัธยมศึกษาตอนปลาย
- ✓ อุดมศึกษา



พิมพ์ครั้งที่ 2

แคลคูลัส

CALCULUS 1-1

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ลำดวน ยอดยิ่ง

- แคลคูลัส 1-1 ฉบับมาตรฐานตรงตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลายและระดับอุดมศึกษา
- เนื้อหาประกอบด้วย

- ◀ เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น
- ◀ ภาคตัดกรวย
- ◀ ฟังก์ชัน
- ◀ ลิมิตและความต่อเนื่อง
- ◀อนุพันธ์
- ◀ การประยุกต์อนุพันธ์
- ◀ การอินทิเกรต
- ◀ อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์

- เนื้อหาเข้มข้นครอบคลุมหลักสูตรและเป็นหลักสูตรสำหรับเข้ามหาวิทยาลัยใช้ทฤษฎีพื้นฐานเพื่อให้รู้จัก คิดเป็น ทำเป็น และแก้ปัญหาเป็น เพื่อจะได้นำไปวิเคราะห์โจทย์ข้อสอบได้อย่างถูกต้องและแม่นยำ
- สะดวกในการศึกษาด้วยตนเอง
- มีแบบฝึกหัดหลากหลาย ใช้หลักการคิดเข้าใจง่าย
- เหมาะสำหรับนักเรียนที่เรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่เตรียมสอบเข้ามหาวิทยาลัย
- นักเรียนที่เตรียมสอบเข้าพยาบาล, เตรียมทหาร และสอบเทียบม.6
- นิสิตนักศึกษา ระดับอุดมศึกษา ครู-อาจารย์ และผู้สนใจคณิตศาสตร์ทั่วไป

บทที่ 1

เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น

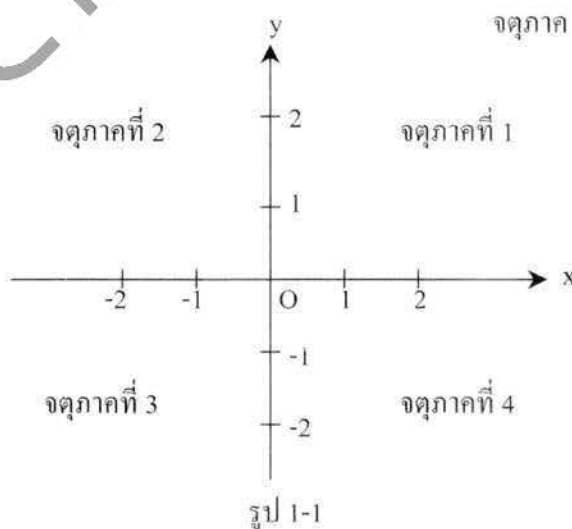
(Fundamental Analytic Geometry)

ในบทนี้จะศึกษาถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ จะกล่าวถึง แกนอ้างอิงใน ระบบพิกัดฉาก จุดบนระนาบ และสมการเส้นตรง ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญมากในวิชาแคลคูลัส

1.1 ระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System)

1.1.1 แกนพิกัด

บนระนาบ กำหนดให้มีเส้นตรงสองเส้น เส้นหนึ่งอยู่ในแนวนอนและอีกเส้นหนึ่งอยู่ในแนวตั้ง ตั้งฉากกันที่จุด O เส้นในแนวนอนให้ชื่อว่า แกน x (x -axis) และเส้นในแนวตั้งมีชื่อว่า แกน y (y -axis) ให้เส้นตรงทั้งสองเป็นเส้นจำนวนโดยที่จุด O แทนจำนวนศูนย์เรียกว่า จุดกำเนิด (Origin) ทิศทางบนแกน x ไปทางขวามือเป็นบวก ไปทางซ้ายมือเป็นลบ และทิศทางบนแกน y ขึ้นข้างบนเป็นบวก ลงข้างล่างเป็นลบ เส้นทั้งสองเรียกว่า แกนพิกัด (Coordinate axis) จะแบ่งระนาบเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า จตุภาค (Quadrant)

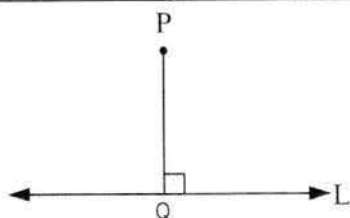


แกนพิกัดเป็นแกนที่จะใช้อ้างอิง เพื่อที่จะทราบว่า จุดบนระนาบอยู่ที่ใดดังรูป 1-1

1.1.2 โพรเจกชัน (Projection)

1. โพรเจกชันของจุดบนเส้นตรง

นิยาม 1 โพรเจกชันของจุด P บนเส้นตรง L หมายถึงจุดบนเส้นตรง L ที่เกิดจากการตัดกันของส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุด P ไปตั้งฉากกับเส้นตรง L ดังรูป 1-2

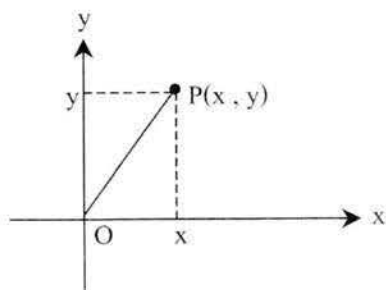


รูป 1-2

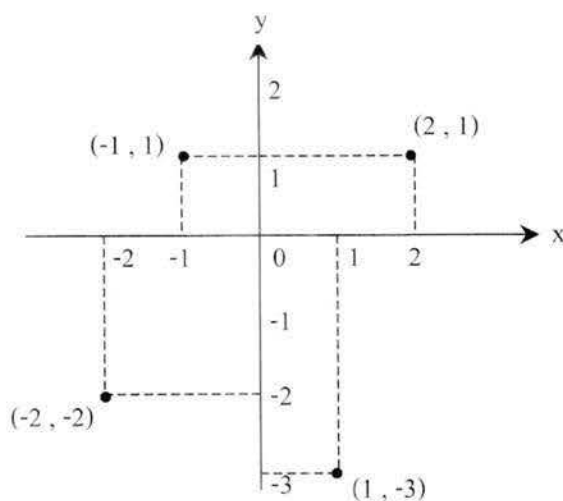
จะได้จุด Q เป็น โพรเจกชัน ของจุด P บนเส้นตรง L

ถ้า P เป็นจุดบนระนาบ เราบอกตำแหน่งของจุด P ได้โดยบอกระยะที่จุดห่างจากแกน y และแกน x โดยเขียนในรูปคู่อันดับ (Ordered pair) เรียกว่า พิกัด (Coordinate) ของจุด P ถ้าโพรเจกชันของจุด P บนแกน x เป็นจุดที่ตรงกับจำนวนจริง x และโพรเจกชันของจุด P บนแกน y เป็นจุดที่ตรงกับจำนวนจริง y เรากล่าวว่าจุด P มีพิกัด (x, y) และเขียนสัญลักษณ์ว่า $P(x, y)$ ถ้า x เรียกว่า พิกัด x หรือพิกัดที่ 1 (Abscissa) และถ้า y เรียกว่า พิกัด y หรือพิกัดที่ 2 (Ordinate) เรียก ระนาบที่มีแกนพิกัด x และ y ว่าระนาบ xy

รูป 1-3 แสดงการกำหนดจุด $P(x, y)$ และตัวอย่างของจุด $(2, 1)$, $(-1, 1)$, $(-2, -2)$ และ $(1, -3)$ แสดงดังรูป 1-4



รูป 1-3



รูป 1-4

ในส่วนต่าง ๆ ของระนาบพิกัด x และ พิกัด y มีเครื่องหมายต่างกันดังนี้

ส่วนที่ 1 ค่า x เป็นบวก และ y เป็นบวก

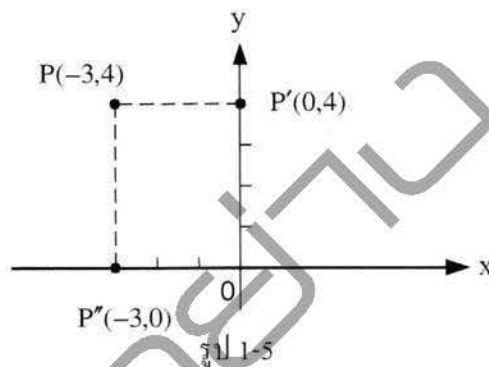
ส่วนที่ 2 ค่า x เป็นลบ และ y เป็นบวก

ส่วนที่ 3 ค่า x เป็นลบ และ y เป็นลบ

ส่วนที่ 4 ค่า x เป็นบวก และ y เป็นลบ

ตัวอย่าง 1 จงหาโปรเจกชันของจุด $P(-3,4)$ บนแกน x และแกน y

วิธีทำ



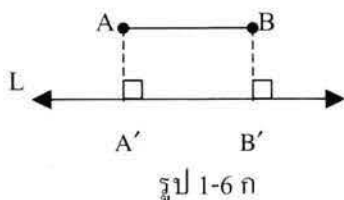
โปรเจกชันของจุด $P(-3,4)$ บนแกน x คือ $P'(-3,0)$ #

โปรเจกชันของจุด $P(-3,4)$ บนแกน y คือ $P'(0,4)$ #

2. โปรเจกชันของส่วนของเส้นตรงบนเส้นตรง

นิยาม 2 โปรเจกชันของ $\overline{AB}$ บนเส้นตรง L หมายถึงส่วนของเส้นตรงบนเส้นตรง L ที่อยู่ระหว่าง โปรเจกชัน ของจุดปลาย A และ B บนเส้นตรง L

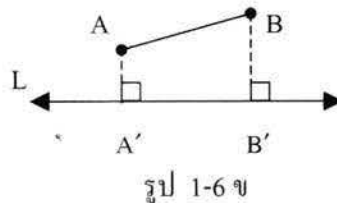
1. เมื่อ $\overline{AB} \parallel L$



รูป 1-6 ก

จะได้ $\overline{A'B'}$ เป็น โปรเจกชัน
 $\overline{AB}$ บนเส้นตรง L และ
 $\overline{A'B'}$ จะยาวเท่ากับ $\overline{AB}$

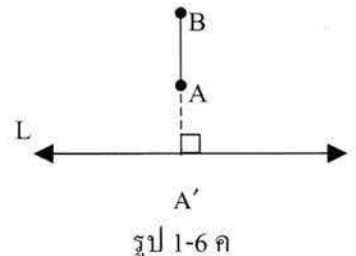
2. เมื่อ $\overline{AB} \nparallel L$



รูป 1-6 ข

จะได้ $\overline{A'B'}$ เป็น โปรเจกชัน
 $\overline{AB}$ บนเส้นตรง L และ
 $\overline{A'B'}$ จะสั้นกว่า $\overline{AB}$

3. เมื่อ $\overline{AB} \perp L$

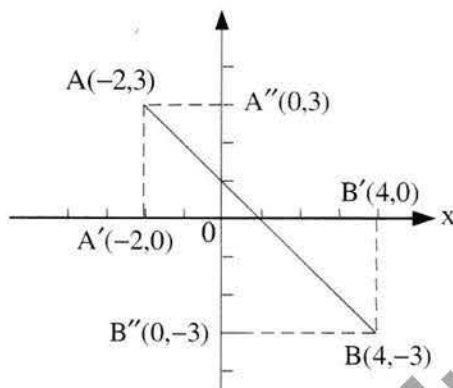


รูป 1-6 ค

จะได้จุด A' เป็น โปรเจกชัน
ของ $\overline{AB}$ บนเส้นตรง L

ตัวอย่าง 2 กำหนดจุด $A(-2,3)$ และจุด $B(4,-3)$ จงหาโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง AB บนแกน x และ y

วิธีทำ

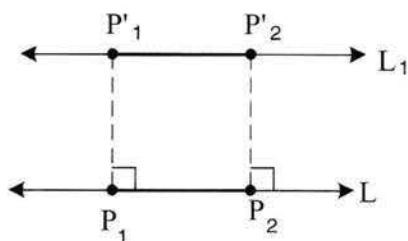


รูป 1-7

จะได้ส่วนของเส้นตรง $A'B'$ เป็นโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง AB บนแกน x และ
ส่วนของเส้นตรง $A''B''$ เป็นโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง AB บนแกน y #

ตัวอย่าง 3 กำหนด P_1 และ P_2 เป็นจุดบนเส้นตรง L , P'_1 และ P'_2 เป็นจุดบนเส้นตรง L_1
ถ้า $P'_1P'_2$ เป็นโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 บนเส้นตรง L_1 แล้ว P_1P_2
จะเป็นโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง $P'_1P'_2$ บนเส้นตรง L หรือไม่

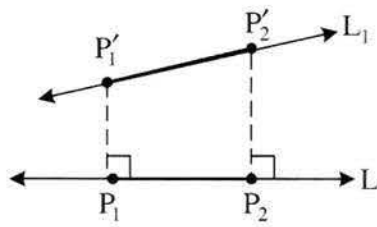
วิธีทำ กรณี 1) เมื่อเส้นตรง $L \parallel L_1$



รูป 1-8 ก

จะได้ส่วนของเส้นตรง P_1P_2 เป็นโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง $P'_1P'_2$ บนเส้นตรง L

กรณี 2) เมื่อ $L \nparallel L_1$



รูป 1-8 ข

จากรูป 1-8 ข จะมีส่วนของเส้นตรง $P_1 P_2$ เป็นโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง $P_1' P_2'$ บนเส้นตรง L

จากกรณี 1 และ 2 นั่นคือ ส่วนของเส้นตรง $P_1 P_2$ เป็นโปรเจกชัน ของส่วนของเส้นตรง $P_1' P_2'$ บนเส้นตรง L #

แบบฝึกหัด 1.1

- กำหนดให้ $(-3, -2)$, $(-3, 3)$ และ $(5, 3)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง จงหาจุดยอด จุดที่สี่
- สี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งมีแกน x และแกน y เป็นเส้นทแยงมุม ถ้าด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาว 2 หน่วย จงหาพิกัดของจุดที่สี่
- กำหนดให้ $(0, 4)$ และ $(0, -2)$ เป็นจุดยอด 2 จุดของสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่ง จงหาจุดยอดจุดที่ 3
- จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิด
 - จุด $(-6, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(-6, 3)$ บนแกน x
 - จุด $(-6, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(-6, 4)$ บนแกน x
 - จุด $(-6, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(-6, a)$ บนแกน x เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
 - จุด $(0, 5)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(0, 5)$ บนแกน y
 - จุด $(0, 5)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(-6, 3)$ บนแกน y
 - จุด $(0, 5)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(6, 5)$ บนแกน y
 - จุด $(0, 5)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(a, 5)$ บนแกน y เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
 - จุด $(0, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(0, 6)$ บนแกน y
 - จุด $(0, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(6, 0)$ บนแกน y
 - จุด $(0, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(a, 0)$ บนแกน y เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
- กำหนดจุด $A(0, 0)$ และ $B(-6, -5)$ จงหาโปรเจกชันของจุดกึ่งกลางของ P และ Q บนแกน x

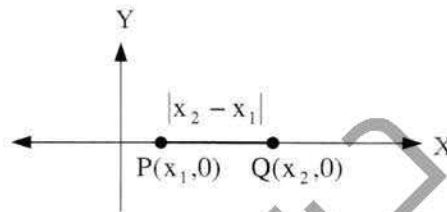
เฉลยแบบฝึกหัด 1.1

- จุดที่สี่คือ $(5, -2)$
 - พิกัดของจุดที่สี่คือ $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ และ $(0, -\sqrt{2})$
 - จุดยอดที่สามคือ $(3\sqrt{3}, 1)$ หรือ $(-3\sqrt{3}, 1)$
- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|----------|
| 4.1 ผิด | 4.2 ผิด | 4.3 ถูก | 4.4 ผิด | 4.5 ผิด |
| 4.6 ถูก | 4.7 ถูก | 4.8 ผิด | 4.9 ผิด | 4.10 ถูก |
- $(\frac{5}{2}, 0)$

1.2 ระยะระหว่างจุดสองจุด

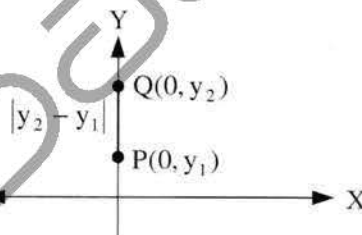
กำหนดให้ P และ Q เป็นจุด 2 จุดใดๆ ในระนาบ ระยะระหว่างจุด P และ Q หมายถึง ความยาวของส่วนของเส้นตรง PQ จะเขียนแทนด้วย $|PQ|$

นิยาม 3 กำหนดให้ $P(x_1, 0)$ และ $Q(x_2, 0)$ เป็นจุดบนแกน x จะได้ $|PQ| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$



รูป 1-9

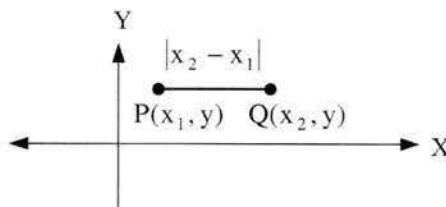
นิยาม 4 กำหนดให้ $P(0, y_1)$ และ $Q(0, y_2)$ เป็นจุดบนแกน y จะได้ $|PQ| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$



รูป 1-10

นิยาม 5 กำหนดให้ $P(x_1, y)$ และ $Q(x_2, y)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน X จะได้

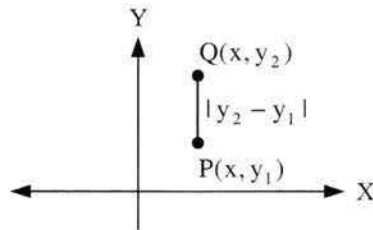
$$|PQ| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$



รูป 1-11

นิยาม 6 กำหนดให้ $P(x, y_1)$ และ $Q(x, y_2)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y จะได้

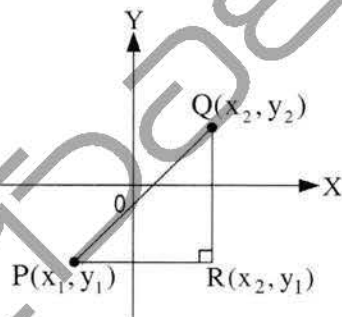
$$|PQ| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$



รูป 1-12

ทฤษฎีบท 1 กำหนดให้ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใดๆ ในระนาบจะได้

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



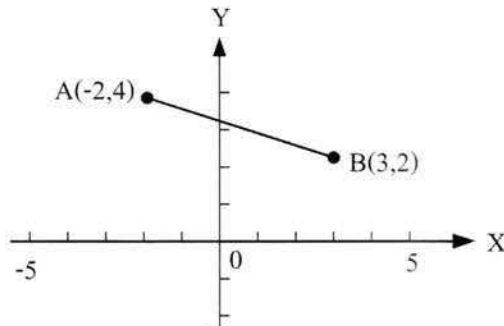
รูป 1-13

พิสูจน์

$$\begin{aligned} \text{ใน } \triangle \text{มุมฉาก } PRQ, \quad |PQ|^2 &= |PR|^2 + |RQ|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ |PQ|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ \text{นั่นคือ} \quad |PQ| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4 จงหาระยะทางระหว่างจุด A(-2,4) และ B(3,2)

วิธีทำ



รูป 1-14

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } |AB| &= \sqrt{(-2-3)^2 + (4-2)^2} \\
 &= \sqrt{(-5)^2 + (2)^2} \\
 &= \sqrt{25+4} \\
 &= \sqrt{29} \quad \#
 \end{aligned}$$

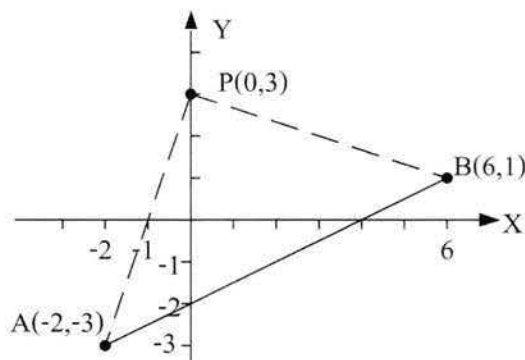
ตัวอย่าง 5 จงหาจุด P บนแกน y ซึ่งอยู่ห่างจากจุด A(-2,-3) และ B(6,1) เป็นระยะทางเท่ากัน

วิธีทำ

เนื่องจากจุด P อยู่บนแกน y มีพิกัด (0,y)

$$\begin{aligned}
 \text{และจากโจทย์ } |AP| &= |PB| \\
 \text{ดังนั้น } \sqrt{(0-(-2))^2 + (y-(-3))^2} &= \sqrt{(0-6)^2 + (y-1)^2} \\
 4 + (y+3)^2 &= 36 + (y-1)^2 \\
 4 + y^2 + 6y + 9 &= 36 + y^2 - 2y + 1 \\
 8y &= 24 \\
 y &= 3
 \end{aligned}$$

แสดงว่า จุด P บนแกน y คือ P(0,3) #



รูป 1-15

ตัวอย่าง 6 กำหนด $\triangle ABC$ โดย $A(8,1)$ $B(-6,-7)$ $C(2,7)$ จงหาความยาวของเส้นรอบรูปของ $\triangle ABC$ พร้อมทั้งบอกว่า $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

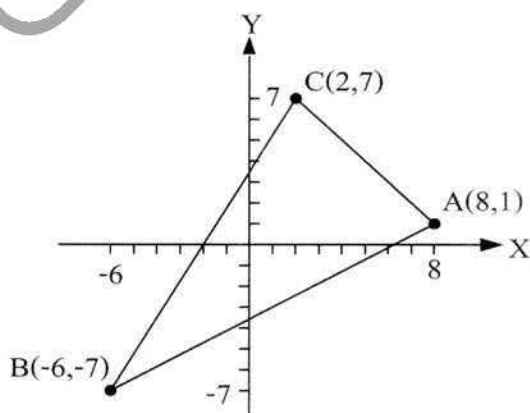
$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad |AB| &= \sqrt{(-6-8)^2 + (-7-1)^2} \\ &= \sqrt{196+64} \\ &= \sqrt{260} \\ &= 2\sqrt{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |BC| &= \sqrt{(2+6)^2 + (7+7)^2} \\ &= \sqrt{64+196} \\ &= \sqrt{260} \\ &= 2\sqrt{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |AC| &= \sqrt{(2-8)^2 + (7-1)^2} \\ &= \sqrt{36+36} \\ &= \sqrt{72} \\ &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เส้นรอบรูปของ } \triangle ABC &= |AB| + |BC| + |AC| \\ &= 2\sqrt{65} + 2\sqrt{65} + 6\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{65} + 6\sqrt{2} \text{ หน่วย} \quad \# \end{aligned}$$

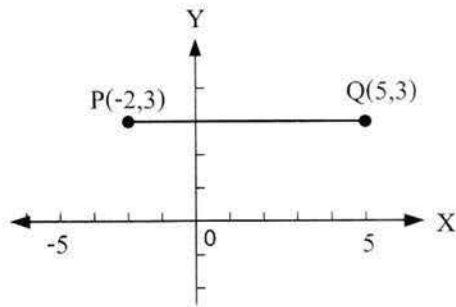
เพราะว่า $|AB| = |BC|$ ดังนั้น แสดงว่า $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว $\#$



รูป 1- 16

ตัวอย่าง 7 จงหาระยะห่างระหว่างจุด $P(-2,3)$ และ $Q(5,3)$

วิธีทำ

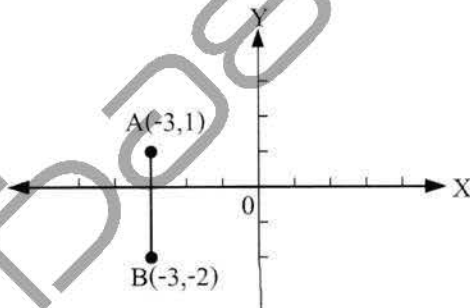


รูป 1-17

จะได้ $|PQ| = |5 + 2| = |7| = 7$ #

ตัวอย่าง 8 จงหาระยะห่างระหว่างจุด $A(-3,1)$ และ $B(-3,-2)$

วิธีทำ



รูปที่ 1-18

จะได้ $|AB| = |-2 - 1| = |-3| = 3$ #

แบบฝึกหัด 1.2

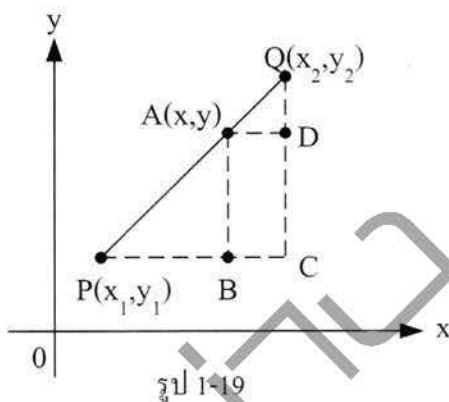
1. ถ้าจุด $A(1, 1)$, $B(-2, 0)$ และ $C(4, 2)$ เป็นจุดสามจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จงแสดงว่า $|BA| + |AC| = |BC|$
2. จงหาระยะทางระหว่างจุด $(-3, -5)$ กับแกน x
3. จงหาจุดบนแกน y ซึ่งอยู่ห่างจากจุด $(-4, 4)$ และ $(4, 10)$ เป็นระยะทางเท่ากัน
4. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, 3)$ และผ่านจุด $(8, -5)$ จงหาความยาวของรัศมีของวงกลมวงนี้
5. จุด $(0, 0)$, $(8, 18)$ และ $(12, 27)$ เป็นจุดสามจุดที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่
6. ถ้าระยะทางระหว่างจุด $(2, 3)$ และ $(k, 0)$ เป็น 5 หน่วย จงหาค่า k

เฉลยแบบฝึกหัด 1.2

2. 3 หน่วย
3. $(0, 7)$
4. 10 หน่วย
5. อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
6. $k = 6, -2$

1.3 จุดแบ่งส่วนของเส้นตรง

ให้ PQ เป็นส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายอยู่ที่จุด $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ และ $A(x, y)$ เป็นจุดบน PQ และแบ่ง PQ ออกเป็นอัตราส่วน $\frac{|PA|}{|AQ|} = r$ ดังรูป



จากรูป พิจารณาสามเหลี่ยมคล้าย PBA และ ADQ

$$\text{จะได้ว่า} \quad r = \frac{|PA|}{|AQ|} = \frac{|PB|}{|AD|} = \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|}$$

เนื่องจาก A เป็นจุดที่อยู่ระหว่าง P และ Q

$$\text{ดังนั้น} \quad x_1 < x < x_2 \quad \text{หรือ} \quad x_2 < x < x_1$$

$$\text{นั่นคือ} \quad x - x_1 > 0 \quad \text{และ} \quad x_2 - x > 0 \quad \text{หรือ}$$

$$x - x_1 < 0 \quad \text{และ} \quad x_2 - x < 0$$

$$\text{แสดงว่า} \quad r = \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x)}$$

$$rx_2 - rx = x - x_1$$

$$(1+r)x = x_1 + rx_2$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$$

โดยทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

สรุปได้ว่า จุด $A(x,y)$ ซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็นอัตราส่วน

$$\frac{|PA|}{|AQ|} = r \quad \text{มีพิกัดเป็น} \quad \left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \right)$$

ในกรณีที่ $A(x,y)$ แบ่งส่วนของเส้นตรง PQ ออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กันจะได้อัตราส่วน

ของการแบ่งเป็น $r = \frac{|PA|}{|AQ|} = 1$

จะได้

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ดังนั้น พิกัดของจุดแบ่งครึ่งหรือจุดกึ่งกลางคือ $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

ตัวอย่าง 9 จงหาพิกัดของจุด ซึ่งแบ่งเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(1,1)$ กับจุด $(-6,-2)$ ออกเป็นอัตราส่วน 3:5

วิธีทำ

ในที่นี้ $r = \frac{3}{5}$

จาก $x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$

$$x = \frac{1 + \frac{3}{5}(-6)}{1 + \frac{3}{5}} = -\frac{13}{8}$$

จาก $y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$

$$y = \frac{1 + \frac{3}{5}(-2)}{1 + \frac{3}{5}} = -\frac{1}{8}$$

นั่นคือ จุดแบ่ง P มีพิกัดเป็น $\left(-\frac{13}{8}, -\frac{1}{8}\right)$ #

ตัวอย่าง 10 จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $A(6,3)$ และ $B(-2,7)$

วิธีทำ

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลาง

จาก $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{6 + (-2)}{2} = 2$

จาก $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5$

ดังนั้นจุดกึ่งกลางคือ $P(2,5)$ #

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหาพิกัดของจุด $P(x, y)$ ซึ่งแบ่งเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(1, 7)$ กับจุด $(6, -3)$ ออกเป็นอัตราส่วน 2: 3
2. ให้ $P(2, 5)$, $Q(-3, 4)$ เป็นส่วนของเส้นตรง จงหาพิกัดของจุดบนส่วนของเส้นตรงนี้ ซึ่งอยู่ห่างจากจุด P เท่ากับ $\frac{3}{4}$ ของระยะห่างระหว่าง P และ Q
3. จงหาจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(2, 5)$ กับ $(-4, 3)$
4. ถ้าจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมหนึ่งเป็น (x, y) และ $(1, 3)$ และจุดศูนย์กลางของวงกลมนี้เป็น $(4, 2)$ จงหา (x, y)

เฉลยแบบฝึกหัด 1.3

1. $(3, 3)$
2. $\left(-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right)$
3. $(-1, 4)$
4. $(7, 1)$

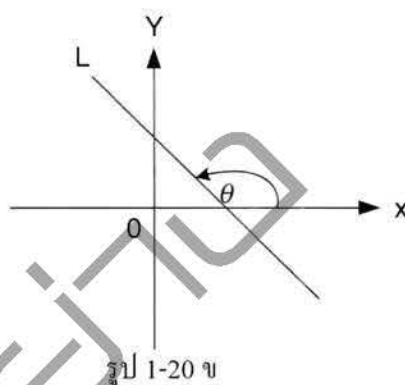
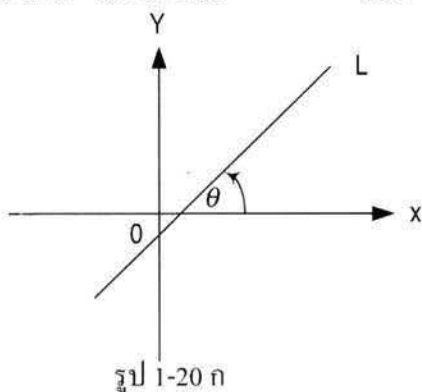
1.4 เส้นตรง (The Straight line)

1.4.1 ความชัน (Slope)

นิยาม 7 มุมเอียงของเส้นตรง L หมายถึง มุมที่เล็กที่สุดที่วัดจากแกน x ไปยังเส้นตรง L ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ถ้าให้ θ แทนมุมเอียงของเส้นตรง L

จะได้ว่า $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ หรือ $0 \leq \theta < \pi$



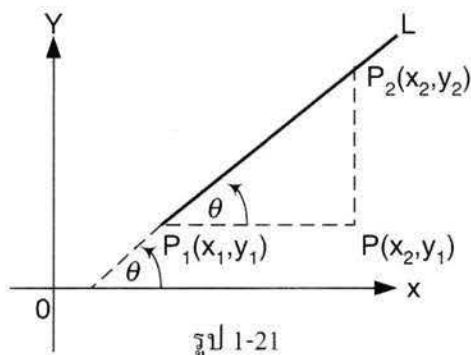
นิยาม 8 ความชันของเส้นตรง L คือค่าแทนเจนต์ของมุมเอียงของเส้นตรง L ถ้าให้ m แทนความชันของเส้นตรง L และ $\tan \theta$ แทนความชันของเส้นตรง L แล้ว $m = \tan \theta$

ข้อสังเกต

1. เส้นตรงที่มีมุมเอียงเป็นศูนย์ ($\theta=0$) เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และมีความชันเป็นศูนย์
2. เส้นตรงที่มีมุมเอียงเป็นมุมแหลม $0 < \theta < 90^\circ$ ความชันมีค่าเป็นบวก
3. เส้นตรงที่มีมุมเอียงเป็นมุมป้าน $90 < \theta < 180^\circ$ ความชันมีค่าเป็นลบ
4. เส้นตรงที่มีมุมเอียงเท่ากับ 90° ($\theta=90^\circ$) เป็นเส้นตรงในแนวตั้งตั้งฉากกับแกน x ซึ่งไม่นิยามความชัน

โดยทั่วไป อาจหาความชันของเส้นตรงได้จากจุดสองจุดใดๆ ที่อยู่บนเส้นตรงนั้น

ถ้าให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นสองจุดใดๆ บนเส้นตรง L ซึ่งมีมุมเอียง θ โดยที่ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ดังรูป 1-21



$$\text{จะได้ว่า } m = \tan \theta = \frac{PP_2}{P_1P} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{เมื่อ } x_1 \neq x_2$$

ในการทำงานเดียวกัน เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$

$$\text{ก็จะได้ } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{เมื่อ } x_1 \neq x_2$$

สรุปได้ว่า ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ใดๆ มีค่าเท่ากับ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{เมื่อ } x_1 \neq x_2$$

ข้อสังเกต จากสูตรข้างต้น

1. ถ้า $y_1 = y_2$ เส้นตรงจะขนานกับแกน x และมีความชันเป็นศูนย์
2. ถ้า $x_1 = x_2$ เส้นตรงจะขนานกับแกน y ซึ่งไม่นิยามความชัน

ตัวอย่าง 11 จงหาความชันและมุมเอียงของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(4,0)$ และ $(5,\sqrt{3})$

วิธีทำ

$$\text{จาก } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{\sqrt{3} - 0}{5 - 4} = \sqrt{3}$$

$$\text{แต่ } \tan \theta = m$$

$$\tan \theta = \sqrt{3}$$

$$= \tan 60^\circ$$

$$\theta = 60^\circ \quad \#$$

1.4.2 เส้นตรงที่ขนานกันและตั้งฉากกัน (Parallel and Perpendicular lines)

นิยาม 9 ให้ θ_1 และ θ_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ จะกล่าวว่า

1. L_1 ขนานกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $\theta_1 = \theta_2$ และ
2. L_1 ตั้งฉากกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่มีมุมเอียง $0 \leq \theta_1 < 180$, $0 \leq \theta_2 < 180$ และ มีความชัน m_1, m_2 ตามลำดับ

1. L_1 ขนานกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$
2. L_1 ตั้งฉากกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 \cdot m_2 = -1$

หมายเหตุ ในที่นี้จะไม่พิสูจน์ทฤษฎีบท 2

ตัวอย่าง 12 เส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(4,3)$ และ $B(5,-2)$ ขนานหรือตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด $C(-1,-3)$ และ $D(-2,2)$

วิธีทำ

$$m_{AB} = \frac{-2-3}{5-4} = -5$$

$$m_{CD} = \frac{-2+3}{-2+1} = -5$$

เพราะว่า $m_{AB} = m_{CD}$

ดังนั้น AB ขนานกับ CD #

ตัวอย่าง 13 จงหาความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(3, 4)$ และ $B(-3, -5)$

วิธีทำ

$$\text{หา } m_{AB} = \frac{-5-4}{-3-3} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$$

ให้ L ตั้งฉากกับ AB : $m_L = \frac{-1}{m_{AB}}$

$$= \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \times 2 = -\frac{2}{3} \quad \#$$

ตัวอย่าง 14 จงตรวจสอบว่าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A และ B ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D หรือไม่

วิธีทำ ก.) $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$, $C(4, 5)$, $D(0, -2)$

$$\text{หา } m_{AB} = \frac{1-(-3)}{-5-2} = \frac{4}{-7}$$

$$m_{CD} = \frac{-2-5}{0-4} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

$$\text{จะเห็นว่า } m_{AB} \times m_{CD} = \frac{4}{-7} \times \frac{7}{4} = -1$$

ดังนั้น เส้นตรง AB ตั้งฉากกับเส้นตรง CD #

ข.) $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$, $C(7, -1)$, $D(0, 3)$

$$\text{หา } m_{AB} = \frac{1 - (-3)}{-5 - 2} = \frac{4}{-7}$$

$$m_{CD} = \frac{3 - (-1)}{0 - 7} = \frac{4}{-7}$$

$$\text{จะเห็นว่า } m_{AB} \times m_{CD} = \frac{4}{-7} \times \frac{4}{-7} = \frac{16}{49}$$

ดังนั้น เส้นตรง AB ไม่ตั้งฉากกับเส้นตรง CD #

ตัวอย่าง 15

ถ้า $P(k, 3)$ และ $Q(-1, 2)$ เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงซึ่งขนานกับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด $R(3, 2)$ และ $S(1, -2)$ จงหาค่า k

วิธีทำ

$$m_{PQ} = m_{RS}$$

$$\frac{3 - 2}{k + 1} = \frac{2 + 2}{3 - 1}$$

$$k + 1 = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{1}{2} - 1$$

$$k = -\frac{1}{2} \quad \#$$

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด
 - 1.1 $(-3, -4)$ และ $(5, 8)$
 - 1.2 $(-6, 5)$ และ $(2, -7)$
 - 1.3 $(-5, -1)$ และ $(9, -1)$
 - 1.4 $(3, 6)$ และ $(3, -2)$
2. จงตรวจสอบโดยใช้ความชันของเส้นตรงว่าจุด $(4, 3)$, $(2, 1)$ และ $(-1, -2)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่
3. ถ้า $(-2, 4)$, $(1, k)$ และ $(3, -1)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จงหาค่าของ k
4. กำหนดสี่เหลี่ยม ABCD มีพิกัดของจุดมุมยอด คือ $A(-6, -2)$, $B(4, 1)$, $C(4, 5)$ และ $D(-2, 5)$ จงหาความชันของด้านที่มีและเส้นทแยงมุม
5. จงหาค่า k ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-4, 3)$ และ $(k, 1)$ มีความชันเท่ากับ $\frac{1}{4}$
6. จงหาความชันของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมยอด $A(-2, 1)$, $B(3, 4)$ และ $C(-1, 4)$ ของทั้งสามเส้น
7. จงแสดงว่าเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(4, 5)$ และ $B(1, 2)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(2, 8)$ และ $D(-2, 4)$
8. ถ้าเส้นตรงผ่านจุด $(k, 7)$ และ $(-3, -2)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, 2)$ และ $(1, -4)$ จงหาค่าของ k
9. จงหาจุด A ซึ่งอยู่บนแกน x ซึ่งทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด A และ $B(1, 2)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(-1, 3)$ และ $D(2, -5)$
10. จงตรวจสอบว่าสี่เหลี่ยม ABCD ที่มีจุดยอดมุมต่อไปนี้ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือสี่เหลี่ยมคางหมู
 - 10.1 $A(1, 3)$, $B(2, 5)$, $C(6, 17)$ และ $D(5, 15)$
 - 10.2 $A(2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(0, -8)$ และ $D(-5, -3)$
11. จงตรวจสอบว่าเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B ตั้งฉากหรือขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D
 - 11.1 $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$ และ $C(4, 5)$, $D(0, -2)$
 - 11.2 $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$ และ $C(7, -1)$, $D(0, 3)$
 - 11.3 $A(5, 3)$, $B(8, 3)$ และ $C(7, 4)$, $D(7, -4)$
12. ถ้าเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $A(8, k)$ และ $B(5, -4)$ ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(4, 3)$ และ $D(1, -2)$ จงหาค่าของ k

เฉลยแบบฝึกหัด 1.4

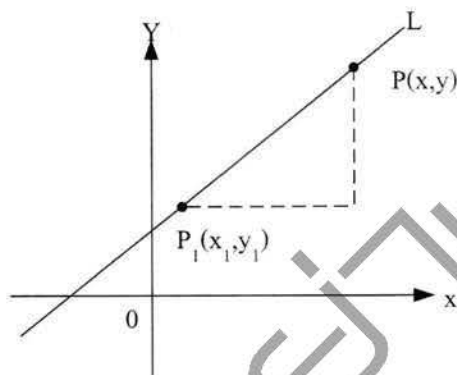
- 1.1 $m_1 = \frac{3}{2}$ 1.2 $m_2 = -\frac{3}{2}$ 1.3 $m_3 = 0$ 1.4 m_4 ไม่นิยาม
2. $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ ดังนั้นจุด $(4, 1)$, $(2, 1)$, $(-1, -2)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
3. $k = 1$
4. m_{AB} คือ $\frac{3}{10}$, m_{BC} ไม่นิยาม(เพราะว่า BC ขนานกับแกน y) , m_{CD} คือ 0 ,
 m_{AD} คือ $\frac{7}{4}$, m_{AC} คือ $\frac{6}{5}$, m_{BD} คือ $-\frac{2}{3}$
5. $k = -12$
6. m_{AE} คือ 1 , m_{BF} คือ $\frac{1}{3}$, m_{CD} คือ -1
7. $m_{AE} = 1$ และ $m_{CD} = 1$ นั่นคือ $m_{AE} = m_{CD} = 1$ ดังนั้น AB ขนานกับ CD
8. $k = 6$
9. จุด A คือ $\left(\frac{14}{8}, 0\right)$
- 10.1 สี่เหลี่ยมด้านขนาน 10.2 สี่เหลี่ยมคางหมู
- 11.1 ตั้งฉาก 11.2 ขนาน 11.3 ขนาน
12. $k = -\frac{29}{5}$

1.5 สมการเส้นตรง (Equation of a Straight Line)

1.5.1 สมการเส้นตรงแบบจุดและความชัน (Point – slope form)

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และมีความชันเป็น m แล้ว สมการ L จะหาได้ดังนี้

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใดๆ บนเส้นตรง L ดังรูป 1-22



รูป 1-22

ความชันของเส้นตรง $L = m$

ดังนั้น $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

หรือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

ตัวอย่าง 16 จงหาสมการเส้นตรง ซึ่งมีความชันเป็น $\frac{3}{2}$ และผ่านจุด $(-4, 2)$

วิธีทำ จากสูตร $y - y_1 = m(x - x_1)$

จะได้ $y - 2 = \frac{3}{2}(x - (-4))$

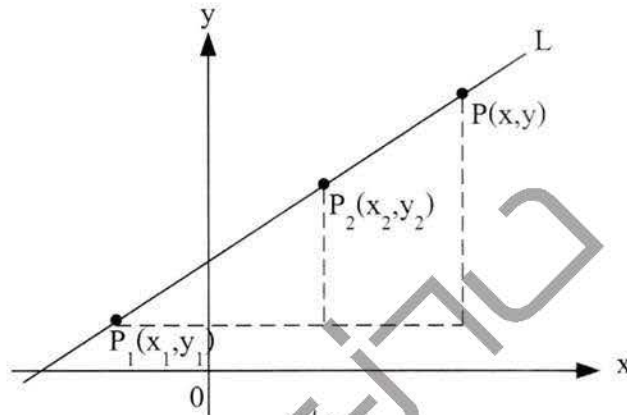
$$2y - 4 = 3x + 12$$

หรือ $3x - 2y + 16 = 0$ #

1.5.2 สมการเส้นตรงแบบจุดสองจุด (Two-points form)

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ แล้วสมการ L จะหาได้ดังนี้

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใดๆ บนเส้นตรง L ดังรูป 1-23



รูป 1-23

ความชันของเส้นตรง $L = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ดังนั้น $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$

ตัวอย่าง 17 จงหาสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $A(6, -2)$ และ $B(-4, 3)$

วิธีทำ

จากสูตร $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$

$$y - (-2) = \frac{3 - (-2)}{-4 - 6} (x - 6)$$

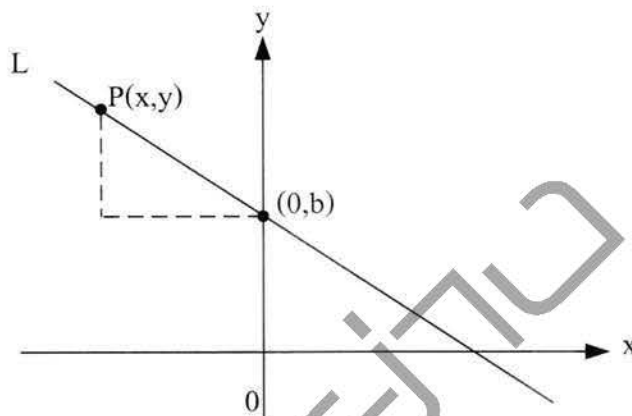
$$y + 2 = \frac{-5}{10} (x - 6)$$

จะได้ $x + 2y - 2 = 0$ #

1.5.3 สมการเส้นตรงแบบความชันและส่วนตัดแกน (Slope-intercept form)

เส้นตรงซึ่งตัดแกน y ที่จุด $(0,b)$ จะเรียก b ว่า “ส่วนตัดแกน y ” (y -intercept)

ให้ L เป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และส่วนตัดแกน y เป็น b จะหาสมการเส้นตรง L ได้ดังนี้ ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใดๆ บนเส้นตรง L ดังรูป 1-24



รูป 1-24

เพราะว่าส่วนตัดแกน y เป็น b แสดงว่าเส้นตรงผ่านจุด $(0,b)$

จากสูตร $y - y_1 = m(x - x_1)$

จะได้ $y - b = m(x - 0)$

นั่นคือ

$$y = mx + b$$

ตัวอย่าง 18

จงหาสมการเส้นตรง ซึ่งมีความชัน $-\frac{2}{3}$ และส่วนตัดแกน y เป็น 3

วิธีทำ

ในที่นี้ $m = -\frac{2}{3}$ และ $b = 3$

จากสูตร $y = mx + b$

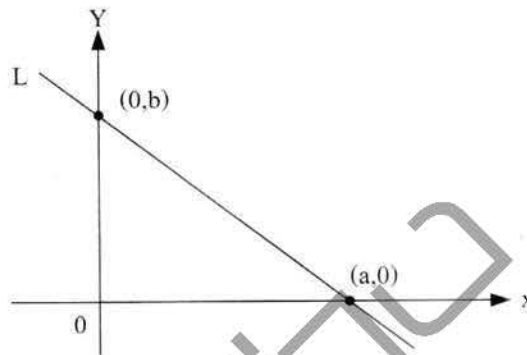
จะได้ $y = -\frac{2}{3}x + 3$

หรือ $2x + 3y - 9 = 0$ #

1.5.4 สมการเส้นตรงแบบส่วนตัดแกน (Intercept form)

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน x เป็น a และส่วนตัดแกน y เป็น b โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ แล้ว สมการ L จะหาได้ดังนี้

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใดๆ บนเส้นตรง L ดังรูป 1-25



รูป 1-25

ส่วนตัดแกน x เป็น a แสดงว่า เส้นตรงผ่านจุด $(a,0)$

ส่วนตัดแกน y เป็น b แสดงว่า เส้นตรงผ่านจุด $(0,b)$

$$\text{จากสูตร } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$\text{จะได้ } y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a} (x - a)$$

$$y = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$$

นั่นคือ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ตัวอย่าง 19 จงหาสมการเส้นตรง ซึ่งมีส่วนตัดแกน x และ y เป็น -5 และ $\frac{7}{2}$ ตามลำดับ

วิธีทำ

$$a = -5 \text{ และ } b = \frac{7}{2}$$

$$\text{จากสูตร } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\text{จะได้ } \frac{x}{-5} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$$

$$\frac{2}{7}y - \frac{x}{5} = 1$$

$$10y - 7x = 35$$

ดังนั้น $7x - 10y + 35 = 0 \quad \#$

1.5.5 สมการเส้นตรงที่ขนานกับแกนพิกัด

ก. เส้นตรงที่ขนานกับแกน x จะตัดแกน y ที่จุด $(0, b)$ และจุดทุกจุดบนเส้นตรงจะอยู่ห่างจากแกน x เป็นระยะทาง $|b|$ หน่วย ดังรูป 1-26 ก.

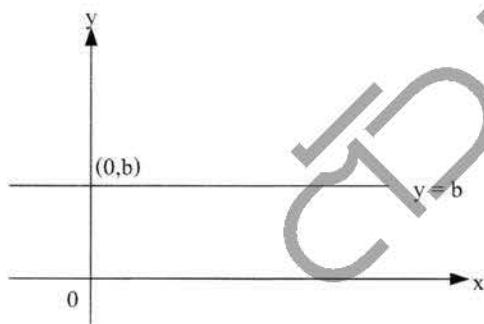
ดังนั้น สมการเส้นตรงคือ

$$y = b$$

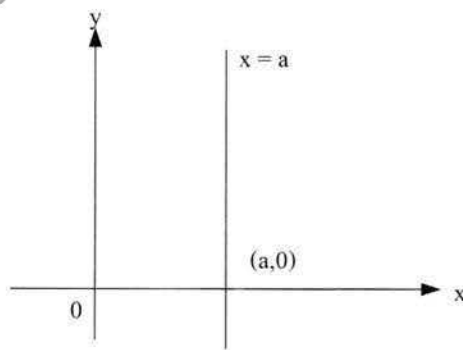
ข. เส้นตรงที่ขนานกับแกน y จะตัดแกน x ที่จุด $(a, 0)$ และจุดทุกจุดบนเส้นตรงจะอยู่ห่างจากแกน y เป็นระยะทาง $|a|$ หน่วย ดังรูป 1-26 ข.

ดังนั้น สมการเส้นตรงคือ

$$x = a$$



รูป 1-26 ก



รูป 1-26 ข

1.5.6 สมการรูปทั่วไปของเส้นตรง (The general of equation of a straight line)

สมการที่อยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะเรียกว่า “สมการรูปทั่วไปของเส้นตรง”

ตัวอย่าง 20 ถ้ากำหนดสมการเส้นตรง $3x - 4y - 18 = 0$

1. จงเขียนสมการเส้นตรงแบบส่วนตัดแกน
2. จงหาความชันและส่วนตัดแกน

วิธีทำ

1. จาก $3x - 4y - 18 = 0$
 จะได้ $3x - 4y = 18$

$$\frac{3x - 4y}{18} = 1$$

 ดังนั้น $\frac{x}{6} - \frac{2y}{9} = 1$ #
2. จาก $3x - 4y - 18 = 0$
 จะได้ $4y = 3x - 18$

$$y = \frac{3x}{4} - \frac{9}{2}$$

 ดังนั้น ความชัน $= \frac{3}{4}$ #
 ส่วนตัดแกน $y = -\frac{9}{2}$ #

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงตรวจสอบว่าข้อใดเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก
 - 1.1 $A(-4, -3)$, $B(2, 3)$, $C(6, -1)$
 - 1.2 $A(2, -2)$, $B(-3, -1)$, $C(1, 6)$
2. จงหาสมการเส้นตรงที่มีเงื่อนไขดังต่อไปนี้
 - 2.1 ขนานกับแกน x และผ่านจุด $(2, 3)$
 - 2.2 ขนานกับแกน y และอยู่ทางซ้ายแกน y เป็นระยะ $\frac{2}{3}$ หน่วย
 - 2.3 ขนานกับแกน x และอยู่ห่างแกน x เป็นระยะ 2 หน่วย
 - 2.4 ผ่านจุด $(1, 3)$ และมีความชัน 2 หน่วย
 - 2.5 เส้นตรงผ่านจุด $(-3, 4)$ และ $(2, 5)$
 - 2.6 เส้นตรงมีความชัน $\frac{4}{5}$ และระยะตัดแกน x เท่ากับ 5
 - 2.7 เส้นตรงมีความชัน $\frac{2}{5}$ และระยะตัดแกน y เท่ากับ 5
3. จงหาสมการเส้นตรงที่มีเงื่อนไขตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้
 - 3.1 ความชันเท่ากับ 0 และผ่านจุด $(2, -5)$
 - 3.2 เส้นตรงผ่านจุด $(2, -5)$ และทำมุมเอียง 45 องศากับแกน x
 - 3.3 เส้นตรงมีระยะตัดแกน x เท่ากับระยะตัดแกน y ซึ่งเท่ากับ 3
 - 3.4 เส้นตรงมีระยะตัดแกน x เท่ากับ 2 ระยะตัดแกน y ซึ่งเท่ากับ -5
4. จงบอกความชันและจุดที่เส้นตรงต่อไปนี้ตัดแกน x และแกน y
 - 4.1 $3x - 5y - 4 = 0$
 - 4.2 $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} - 3 = 0$
5. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 3)$ และขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(4, 1)$ และ $B(-2, 2)$
6. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, -2)$ และขนานกับเส้นตรง $3x + 4y - 1 = 0$
7. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, 2)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x + 2y - 6 = 0$
8. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x - 7y - 11 = 0$ และ $3x + 5y = 7$ และขนานกับเส้นตรง $5x + y = 1$
9. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของเส้นตรง $2x + y - 8 = 0$ และ $3x - 2y - 9 = 0$ และมีส่วนตัดแกน y เป็น -1
10. ถ้าเส้นตรง $kx + (k+1)y - 12 = 0$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 2y - 9 = 0$ จงหาค่า k

เฉลยแบบฝึกหัด 1.5

1.1 สามเหลี่ยมมุมฉาก

1.2 ไม่เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

2.1 $y = 3$

2.2 $x = -\frac{2}{3}$

2.3 $y = 2$ หรือ $y = -2$

2.4 $2x - y + 1 = 0$

2.5 $x - 3y + 23 = 0$

2.6 $4x - 5y - 20 = 0$

2.7 $2x - 5y + 25 = 0$

3.1 $y + 5 = 0$

3.2 $x - y - 7 = 0$

3.3 $x + y = 3$

3.4 $5x - 2y = 10$

4.1 ความชันของเส้นตรงคือ $-\frac{3}{5}$, จุดตัดแกน x คือ $(\frac{4}{3}, 0)$, จุดตัดแกน y คือ $(0, -\frac{4}{5})$ 4.2 ความชันของเส้นตรงคือ $-\frac{5}{2}$, จุดตัดแกน x คือ $(6, 0)$, จุดตัดแกน y คือ $(0, 15)$

5. $6y + x - 20 = 0$

6. $3x + 4y + 5 = 0$

7. $2x - 3y + 10 = 0$

8. $5x + 4y - 19 = 0$

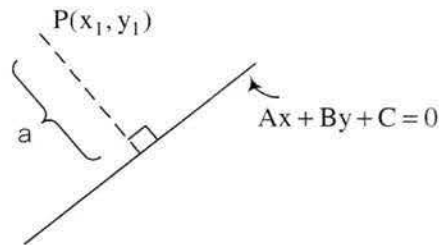
9. $63x + 125y + 125 = 0$; $63x + 125y + 125 = 0$

10. $k = -\frac{2}{3}$

1.6 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดและระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน

1.6.1 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

ถ้ากำหนดให้ระยะทางจากจุด $P(x_1, y_1)$ ไปยังเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ เท่ากับ d (ดังรูป 1-27)



รูป 1-27

จะได้

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

หมายเหตุ

ในที่นี้จะไม่แสดงการพิสูจน์ของสูตรนี้

ตัวอย่าง 21

จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง $6x - 8y + 4 = 0$ กับจุด $(2, -3)$

วิธีทำ

จะให้ d เป็นระยะห่างระหว่างเส้นตรง $6x - 8y + 4 = 0$ กับจุด $(2, -3)$

จากสูตร
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

โดยที่ $A = 6$, $B = -8$, $C = 4$ และ $P(x_1, y_1) = (2, -3)$

แทนค่า
$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|6(2) + (-8)(-3) + 4|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} \\ &= \frac{|40|}{\sqrt{100}} \\ &= \frac{40}{10} = 4 \quad \# \end{aligned}$$

1.6.2 ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน

กำหนดให้ $L_1 : Ax + by + C_1 = 0$ และ $L_2 : Ax + by + C_2 = 0$ เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน และให้ d เป็นระยะห่างระหว่างเส้นตรงสองเส้นดังกล่าว

จะได้

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

หมายเหตุ ในที่นี้จะไม่แสดงการพิสูจน์ของสูตรนี้

ตัวอย่าง 22

วิธีทำ

จงหาระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน $3x + 4y - 7 = 0$ กับ $3x + 4y + 3 = 0$

จะให้ d เป็นระยะห่างระหว่างเส้นตรง $3x + 4y - 7 = 0$ กับ $3x + 4y + 3 = 0$

จากสูตร
$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

โดยที่ $C_1 = -7$, $C_2 = 3$, $A = 3$ และ $b = 4$

แทนค่า
$$\begin{aligned} d &= \frac{|-7 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{|-10|}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{10}{5} = 2 \quad \# \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 23

วิธีทำ

จงหาระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน $4x + 3y = 5$ กับ $8x + 6y = 15$

ก่อนที่จะใช้สูตรระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน ต้องทำให้สัมประสิทธิ์ x และ y ในสมการให้เท่ากันก่อน

จากโจทย์ $4x + 3y = 5$ นำ 2 คูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $8x + 6y = 10$ หรือ $8x + 6y - 10 = 0$

ให้ d เป็นระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน

จากสูตร
$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

โดยที่ $C_1 = -10$, $C_2 = -15$, $A = 8$ และ $b = 6$

แทนค่า
$$\begin{aligned} d &= \frac{|-10 - (-15)|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} \\ &= \frac{5}{10} = 0.5 \quad \# \end{aligned}$$

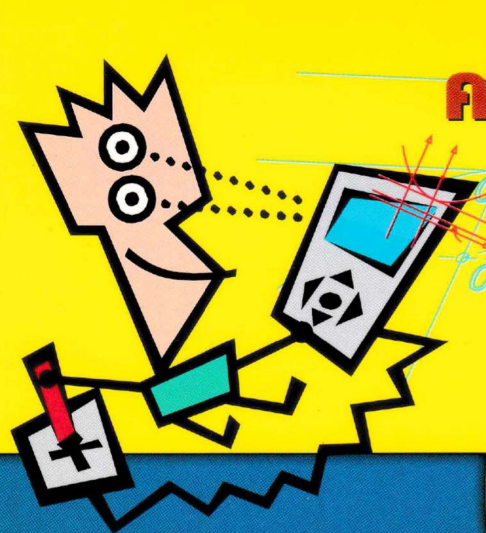
แบบฝึกหัด 1.6

1. จงหาระยะระหว่างเส้นตรง $3x + 4y - 25 = 0$ กับจุด $(6, 8)$
2. จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง $3x - 4y - 7 = 0$ กับเส้นตรง $3x - 4y + 3 = 0$
3. จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง $5x + 12y - 20 = 0$ กับเส้นตรง $10x + 24y + 12 = 0$
4. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด $C(2, 3)$ และเส้นตรงที่มีสมการ $7x + 24y = 11$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม จงหารัศมีของวงกลม
5. จงหาค่า k ซึ่งทำให้ระยะระหว่างเส้นตรง $8x + 15y + k = 0$ กับจุด $(2, 3)$ เท่ากับ 5 หน่วย
6. จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $4x - 3y + 1 = 0$ และอยู่ห่างจากเส้นตรงเส้นนี้เป็นระยะ 6 หน่วย

เฉลยแบบฝึกหัด 1.6

1. 5 หน่วย
2. 2 หน่วย
3. 2 หน่วย
4. 3 หน่วย
5. $k = 24, -146$
6. $4x - 3y + 2 = 0$ และ $4x - 3y - 31 = 0$

ใครๆก็คิดว่า...



คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่น่าเบื่อ

ยาก เรียนไม่ค่อยเข้าใจ



แต่คณิตศาสตร์เล่มนี้

จะเปลี่ยนความคิดของคุณ !

- ◆ เนื้อหาเข้มข้น ครอบคลุมหลักสูตรสำหรับมหาวิทยาลัย
- ◆ ใช้หลักทฤษฎีพื้นฐาน เพื่อให้รู้จักคิดเป็น ทำเป็นและแก้ปัญหาเป็น
- ◆ เพื่อจะได้นำไปวิเคราะห์โจทย์ข้อสอบได้อย่างถูกต้องและแม่นยำ
- ◆ สะดวกในการศึกษาด้วยตนเอง
- ◆ มีแบบฝึกหัดหลากหลายใช้หลักการคิดเข้าใจง่าย

เหมาะสำหรับ



นักเรียนที่เรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่เตรียมสอบเข้ามหาวิทยาลัย

นักเรียนเตรียมสอบเข้าพยาบาล, เตรียมทหารและสอบเทียบ ม.6

นิสิตนักศึกษาระดับอุดมศึกษา ครู-อาจารย์และผู้สนใจคณิตศาสตร์ทั่วไป



The Knowledge Center
นำเสนอหนังสือดี มีคุณค่า

e-book