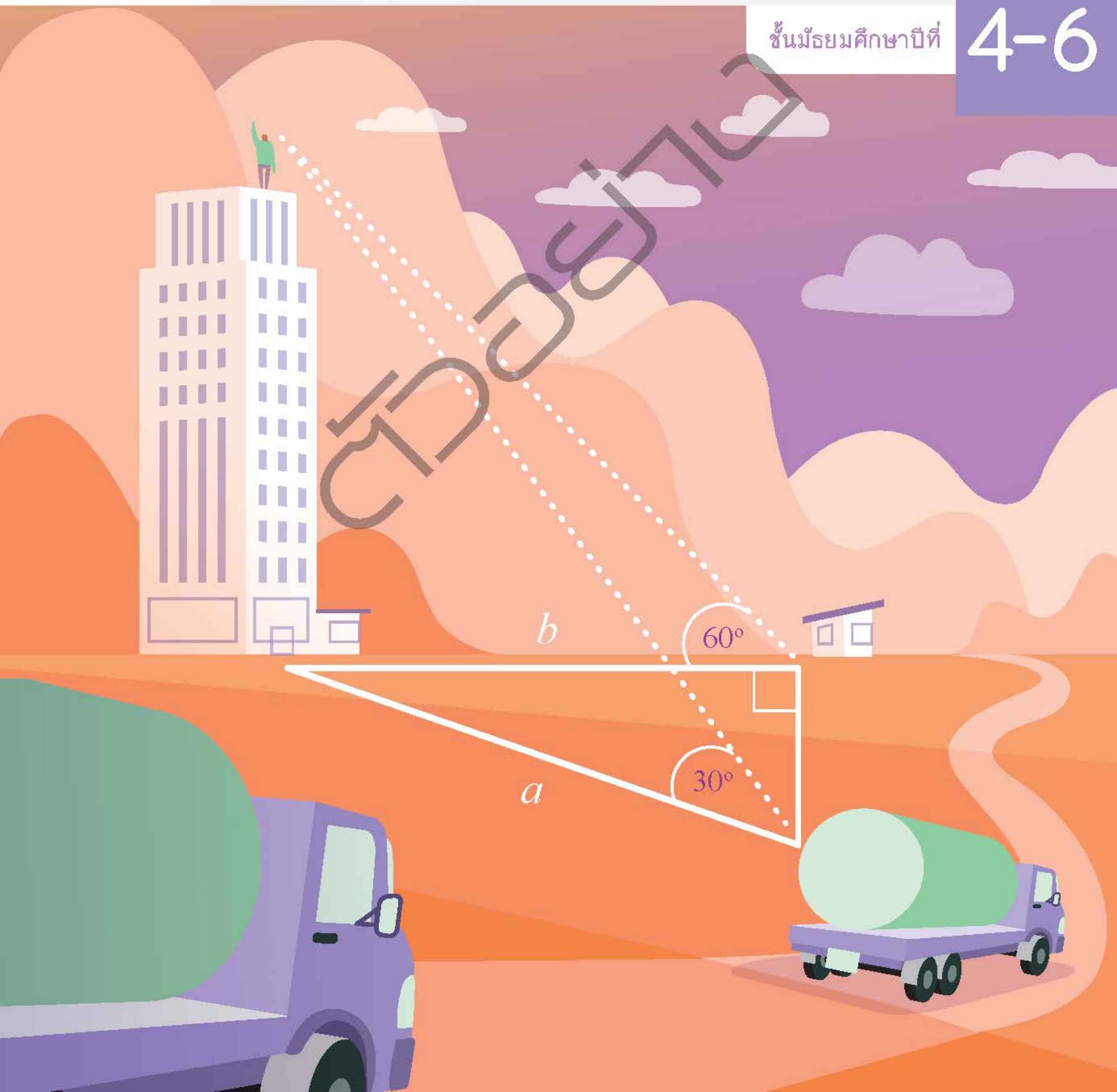
แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6



แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

จัดทำเป็นฉบับ e-book ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2567

สรุปเนื้อหาสาระ

1. การกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทำได้โดยใช้วงกลมรัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นหลักในการกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และจะเรียกวงกลมดังกล่าวว่า **วงกลมหนึ่งหน่วย** วงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์

$$\left\{(x, y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ จากจุด $(1, 0)$ วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดดังนี้

เมื่อ $\theta > 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

เมื่อ $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

เมื่อ $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งคือจุด $(1, 0)$

2. กำหนดฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ และ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$f(\theta) = x$$

$$g(\theta) = y$$

เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกา

เรียกฟังก์ชัน g และ f ดังกล่าวนี้ว่า **ฟังก์ชันไซน์** และ **ฟังก์ชันโคไซน์** ตามลำดับ และจะเขียนแทน g ด้วย sin และเขียนแทน f ด้วย cos ดังนี้

$$y = \sin\theta$$

$$x = \cos\theta$$

3. วงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ จะเห็นว่า $-1 \le y \le 1$ และ $-1 \le x \le 1$ ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์เป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 นั่นคือ เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 และโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง คือ เซตของจำนวนจริง
4. จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sin\theta$ และ $x = \cos\theta$ จะได้ความสัมพันธ์ของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ คือ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ
5. ให้ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin\theta \\ \cos(-\theta) &= \cos\theta \end{aligned}$$

6. ให้ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้

$$\begin{aligned} \sin(2n\pi + \theta) &= \sin\theta \\ \cos(2n\pi + \theta) &= \cos\theta \\ \sin(\theta - 2n\pi) &= \sin\theta \\ \cos(\theta - 2n\pi) &= \cos\theta \end{aligned}$$

7. การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π มีข้อสรุปดังนี้ ให้ α เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin\alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos\alpha \\ \sin(\pi + \alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos\alpha \\ \sin(2\pi - \alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) &= \cos\alpha \end{aligned}$$

8. นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

ฟังก์ชันแทนเจนต์ เขียนแทนด้วย tan

ฟังก์ชันเซแคนต์ เขียนแทนด้วย sec

ฟังก์ชันโคเซแคนต์ เขียนแทนด้วย cosec หรือ csc

ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ เขียนแทนด้วย cot

9. **บทนิยาม**

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

10. โดเมนของฟังก์ชัน tan และ sec คือ $\mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{(2n+1)\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$

โดเมนของฟังก์ชัน cot และ cosec คือ $\mathbb{R} - \{ x \mid x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$

เรนจ์ของฟังก์ชัน tan และ cot คือ $\mathbb{R}$

เรนจ์ของฟังก์ชัน sec และ cosec คือ $\mathbb{R} - \{ x \mid -1 < x < 1 \}$

11. ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{เมื่อ } \tan\theta \neq 0$$

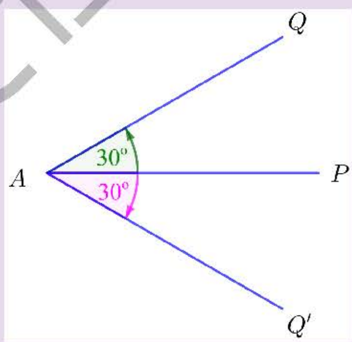
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

12. ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ บางจำนวน เมื่อ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม	0

13. กำหนดส่วนของเส้นตรง AP ต้องการสร้าง $P\hat{A}Q$ ให้มีขนาด 30 องศา โดยใช้โพรแทรกเตอร์วัดขนาดของมุม ทำได้โดยวางโพรแทรกเตอร์ทับส่วนของเส้นตรง AP ซึ่งสามารถวัดขนาดของมุมที่ต้องการสร้างได้ 2 แบบ คือ วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และวัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังรูป



เรียกจุด A ว่า **จุดยอด** ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AP ว่า **ด้านเริ่มต้น** ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AQ และ AQ' ว่า **ด้านสิ้นสุด** ของมุม

14. การวัดขนาดของมุมทำได้โดยการวัดจากด้านเริ่มต้นไปยังด้านสิ้นสุด สำหรับการบอกขนาดของมุมมีข้อตกลงว่า ถ้าวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะแสดงขนาดของมุมด้วยจำนวนจริงบวก แต่ถ้าวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จะแสดงขนาดของมุมด้วยจำนวนจริงลบ

15. หน่วยในการวัดมุมในที่นี้มี 2 ประเภท ได้แก่ องศาและเรเดียน

องศา เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $^{\circ}$ โดยมุมที่ด้านเริ่มต้นและด้านสิ้นสุดทับกันมีขนาด 0 องศา หรือ 360 องศา และแบ่งหน่วยองศาออกเป็นหน่วยย่อยคือ ลิปดา ($'$) และ พิลิปดา ($''$) ดังนี้

$$
\begin{aligned}
1^{\circ} &= 60' \\
1' &= 60''
\end{aligned}
$$

เรเดียน เป็นหน่วยวัดมุมที่มีค่าเป็นจำนวนจริง โดยมีข้อตกลงว่ามุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้นเป็นมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน ซึ่งการเขียนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนมักจะไม่เขียนหน่วยกำกับไว้ ดังนั้น ถ้ากล่าวถึงขนาดของมุมโดยไม่มีหน่วยกำกับ ให้ถือว่ามุมนั้นมีหน่วยเป็นเรเดียน

ความสัมพันธ์ระหว่างองศาและเรเดียน คือ

360 องศา เท่ากับ 2π เรเดียน

หรือ 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

16. เมื่อจุดยอดของมุมอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และด้านเริ่มต้นของมุมนั้นทาบไปตามแกน X ทางบวก จะกล่าวว่ามุมนั้นอยู่ใน **ตำแหน่งมาตรฐาน**

17. เมื่อกำหนดมุมขนาด θ เรเดียนให้หนึ่งมุม จะหาจุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมนั้นตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยได้เพียงจุดเดียว และจุดนั้นจะเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วยด้วย หรือส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม θ เรเดียน จะยาว $|\theta|$ หน่วย จะเห็นได้ว่า ไม่ว่าจะใช้วิธีวัดมุมหรือวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลม จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยจะเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้ง

18. ไม่ว่าจะนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติในแง่ของมุมหรือในแง่ของความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนเหล่านั้นจะเท่ากัน เช่น $\cos\theta$ อาจหมายถึง cos ของมุมที่มีขนาด θ เรเดียน หรือ cos ของจำนวนจริง θ สำหรับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศานั้นอาจหาได้โดยเปลี่ยนหน่วยวัดขนาดของมุมจากหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียนก่อน แล้วจึงหาค่าของฟังก์ชันนั้น เช่นเดียวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงทั่ว ๆ ไป

19. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก ดังนั้น $B\hat{A}C < 90^\circ$ จะได้

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$$

20. ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็น **ฟังก์ชันที่เป็นคาบ** กล่าวคือ สามารถแบ่งแกน X ออกเป็น **ช่วงย่อย** โดยที่ความยาวของแต่ละช่วงย่อยเท่ากันและกราฟในแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน ความยาวของช่วงย่อยที่สั้นที่สุดที่มีสมบัติดังกล่าวเรียกว่า **คาบ** ของฟังก์ชัน สำหรับฟังก์ชันที่เป็นคาบซึ่งมีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จะเรียกค่าที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นว่า **แอมพลิจูด** นั่นคือ ถ้า a เป็นค่าสูงสุด และ b เป็นค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นคาบ แล้วจะได้ว่าแอมพลิจูดของฟังก์ชันนี้คือ $\frac{1}{2}(a-b)$

21. โดเมน คาบ แอมพลิจูด และเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในกรณีทั่วไป สรุปได้ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	คาบ	แอมพลิจูด	เรนจ์
$y=\sin(nx),\ n>0$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{n}$	1	$[-1,1]$
$y=\cos(nx),\ n>0$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{n}$	1	$[-1,1]$
$y=a\sin(nx),\ n>0$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{n}$	$\lvert a\rvert$	$[-\lvert a\rvert,\lvert a\rvert]$
$y=a\cos(nx),\ n>0$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{n}$	$\lvert a\rvert$	$[-\lvert a\rvert,\lvert a\rvert]$

22. ฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ π
ฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ 2π
ฟังก์ชันเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ 2π
ฟังก์ชันโคแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ π

23. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม สรุปได้ดังนี้

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\beta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta\neq-1$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta\neq 1$$

24. ค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ และ $\cos(\alpha-\beta)$ เมื่อนำมาบวกหรือลบกัน จะได้ความสัมพันธ์ที่สำคัญดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\sin\beta &= \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\
2\sin\alpha\sin\beta &= \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

25. ความสัมพันธ์อื่น ๆ เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

26. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงซึ่งเป็นสองเท่าของ α แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\
\cos 2\alpha &= 1-2\sin^2\alpha\\
\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha-1\\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \text{เมื่อ } \tan^2\alpha \neq 1
\end{aligned}$$

27. เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน $1-1$ ดังนั้น ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้เหมาะสม จะพบว่าตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะเป็นฟังก์ชัน

28. **บทนิยาม**

ฟังก์ชัน **arcsine** คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \sin y$ และ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

29. **บทนิยาม**

ฟังก์ชัน **arccosine** คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \cos y$ และ $0 \le y \le \pi$

30. **บทนิยาม**

ฟังก์ชัน **arctangent** คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

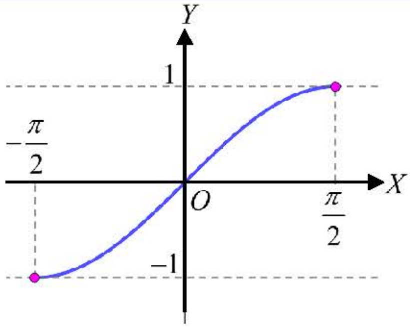
31. ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดโดเมนเพื่อให้ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชัน มีโดเมนและเรนจ์เป็นดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$
$y = \cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$y = \tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$

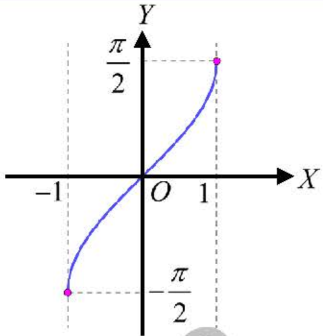
ฟังก์ชัน **arcsine, arccosine** และ **arctangent** มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

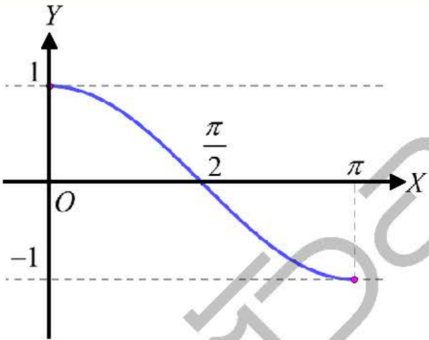
32. กราฟของฟังก์ชัน **sine, cosine, tangent, arcsine, arccosine** และ **arctangent** เป็นดังนี้



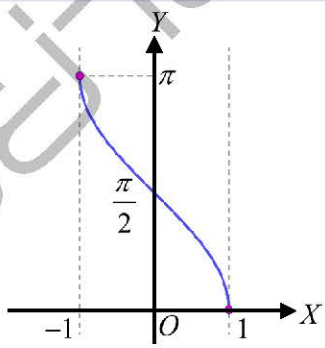
$y=\sin x,\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$



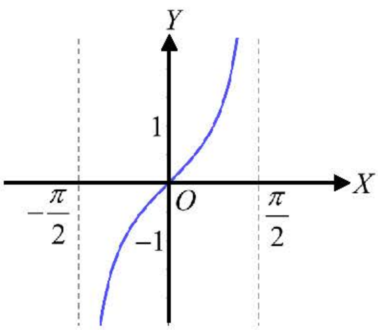
$y=\arcsin x,\ -1\le x\le 1$



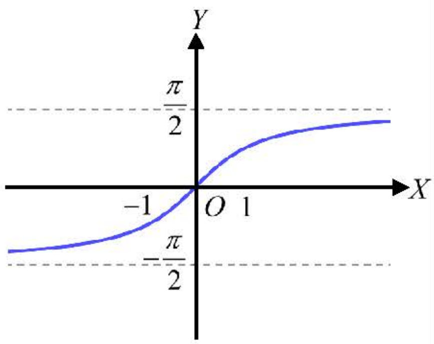
$y=\cos x,\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$



$y=\arccos x,\ -1\le x\le 1$



$y=\tan x,\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$



$y=\arctan x,\ x\in\mathbb{R}$

33. **สมการตรีโกณมิติ** คือ สมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่

34. สมการตรีโกณมิติบางสมการ เช่น $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ จะเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ θ ที่ทำให้หาค่าของฟังก์ชันที่ปรากฏอยู่ในสมการนั้นได้ คือ ค่าของ $\cot\theta$, $\tan\theta$ และ $\frac{1}{\tan\theta}$ เรียกสมการที่มีสมบัติเช่นสมการ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ ว่า **เอกลักษณ์**

35. การพิสูจน์เอกลักษณ์เป็นการแสดงให้เห็นว่าจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการเท่ากันจริง โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ การพิสูจน์เอกลักษณ์จึงช่วยให้เห็นความสัมพันธ์ต่าง ๆ ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเอกลักษณ์ที่พิสูจน์แล้วสามารถนำไปอ้างอิงในการพิสูจน์เอกลักษณ์อื่น ๆ

36. การแก้สมการตรีโกณมิติทำได้ในทำนองเดียวกันกับการแก้สมการทั่วไป โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อหาคำตอบของสมการ เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1–1 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ อาจจะซ้ำกันได้ ดังนั้น ในการหาคำตอบของสมการ ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดให้คำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งแล้ว คำตอบควรอยู่ในรูปของค่าทั่วไป

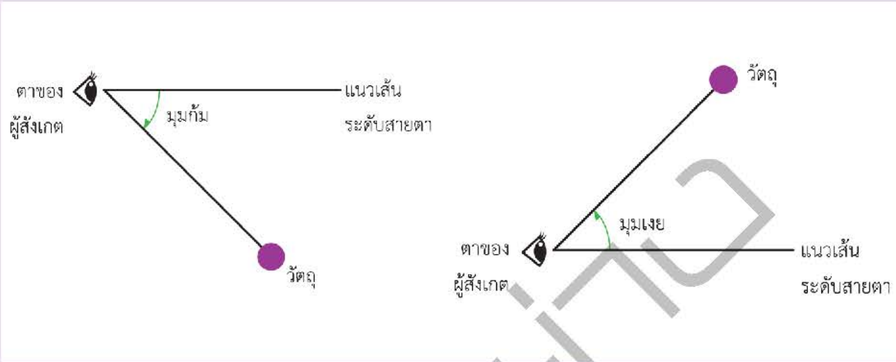
37. **กฎของโคไซน์** ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

จะได้
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

38. **กฎของไซน์** ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ จะได้

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

39. มุมก้มและมุมเงยเป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตา และแนวเส้นจากตาไปยังวัตถุ ถ้าวัตถุอยู่ต่ำกว่าแนวเส้นระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า **มุมก้ม** แต่ถ้าวัตถุอยู่สูงกว่าแนวเส้นระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า **มุมเงย** โดยขนาดของมุมก้มและมุมเงยจะเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ



สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology (IPST)

แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เป็นแบบฝึกทักษะที่สอดคล้องกับเนื้อหาในหนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ของ สสวท. แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์นี้ เหมาะสำหรับครู นักเรียน ผู้ปกครอง หรือผู้ที่สนใจ สามารถใช้เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ เสริมทักษะคณิตศาสตร์ และฝึกทำโจทย์คณิตศาสตร์ที่หลากหลาย ควบคู่กับการเรียนในชั้นเรียนได้เป็นอย่างดี โดยแบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เล่มนี้ ประกอบไปด้วย กรอบสรุปเนื้อหาสาระ แบบฝึกทักษะ และเฉลยแบบฝึกทักษะพร้อมวิธีทำอย่างละเอียด

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
475 อาคารสิริภิญโญ ชั้น 9 ถนนศรีอยุธยา
แขวงถนนพญาไท เขตราชเทวี กรุงเทพฯ 10400
โทรศัพท์ 0-2392-4021 โทรสาร 0-2381-0750
(สำนักงานชั่วคราว)

https://www.ipst.ac.th

แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์
เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6
ISBN xxx-xxx-xxx-xxx-x

ราคา XXX บาท