



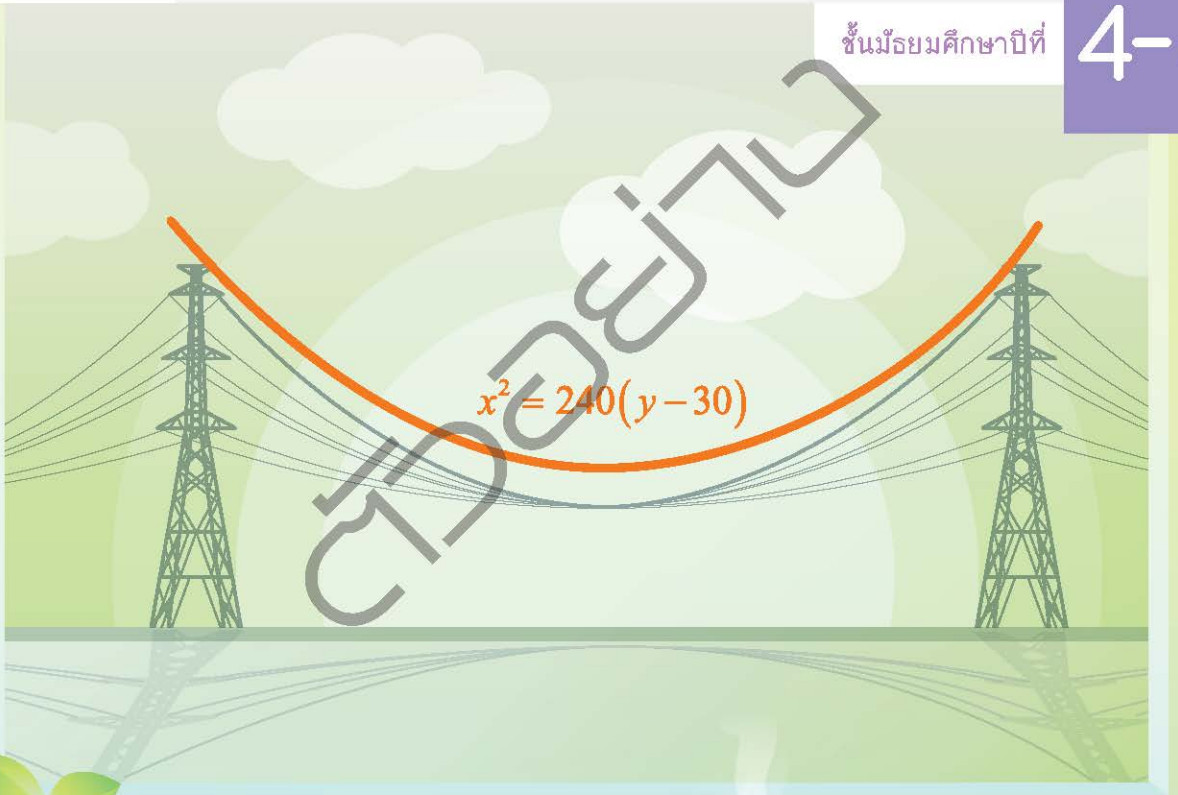
แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์

เรขาคณิตวิเคราะห์

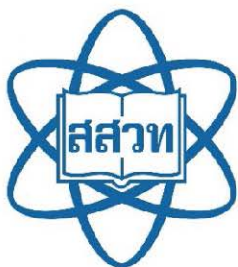
(ภาคตัดกรวย)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่

4-6


$$x^2 = 240(y - 30)$$





แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6

เรขาคณิตวิเคราะห์

(ภาคตัดกรวย)

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

จัดทำเป็นฉบับ e-book ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2567

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

สรุปเนื้อหาสาระ

1. ทฤษฎีบท 1

ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบ

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2. ทฤษฎีบท 2

กำหนดจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ถ้าจุด $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของ

ส่วนของเส้นตรง P_1P_2 แล้ว $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ และ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

3. บทนิยาม 1

ให้ ℓ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$

ความชันของเส้นตรง ℓ คือ $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

4. ทฤษฎีบท 3

เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากัน

5. ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีความชันเท่ากันและมีจุดร่วมกัน แล้วเส้นตรงทั้งสองจะเป็นเส้นตรงเดียวกัน

6. ทฤษฎีบท 4

เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1

7. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X คือ

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = b\} \text{ เมื่อ } b \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

8. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = a\}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

9. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1) คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - y_1 = m(x - x_1)\}$

10. สมการ $y = mx + c$ เป็นสมการที่มีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และตัดแกน Y ที่จุด $(0, c)$

11. กราฟของสมการ $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะเป็นเส้นตรง และเรียกสมการในรูปนี้ว่า **รูปทั่วไปของสมการเส้นตรง**

12. ถ้าเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด $(a, 0)$ จะเรียก a ว่า **ระยะตัดแกน X** และถ้าเส้นตรงตัดแกน Y ที่จุด $(0, b)$ จะเรียก b ว่า **ระยะตัดแกน Y**

13. ทฤษฎีบท 5

ระยะทางระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ กับจุด (x_1, y_1) เมื่อ A, B และ C เป็นค่าคงตัวที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน คือ $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

14. ทฤษฎีบท 6

ระยะทางระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C_1 = 0$ กับเส้นตรง $Ax + By + C_2 = 0$ เมื่อ A, B, C_1 และ C_2 เป็นค่าคงตัวที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน คือ

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

15. ภาคตัดกรวย คือ รูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย

16. บทนิยาม 2

วงกลม คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** ของวงกลม และส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมเป็นจุดปลายเรียกว่า **รัศมี** ของวงกลม

17. บทนิยาม 3

วงรี คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนั้นไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่สองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า **โฟกัสของวงรี**

18. บทนิยาม 4

สำหรับวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ หรือ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เมื่อ $a > b > 0$

ความเยื้องศูนย์กลางของวงรี แทนด้วย e คือ อัตราส่วนของ c ต่อ a

เมื่อ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ นั่นคือ $e = \frac{c}{a}$ โดยที่ $0 < e < 1$

19. ถ้า e มีค่าใกล้ 1 หรือ c มีค่าเกือบจะเท่ากับ a แล้ววงรีมีความรีมาก (มีรูปร่างเรียวยาว) แต่ถ้า e มีค่าใกล้ 0 แล้ววงรีมีความรีน้อย (รูปร่างใกล้เคียงกับวงกลม)

20. บทนิยาม 5

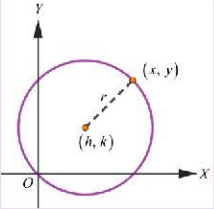
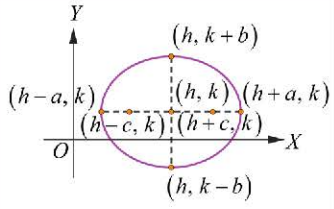
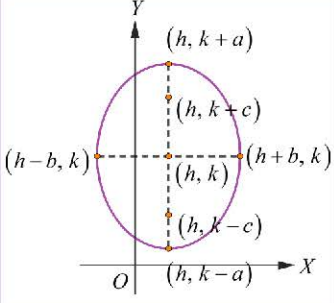
พาราโบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่ง และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้ เรียกว่า **โฟกัสของพาราโบลา** และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่นี้ เรียกว่า **เส้นบังคับ** หรือ **ไดเรกทริกซ์** ของพาราโบลา

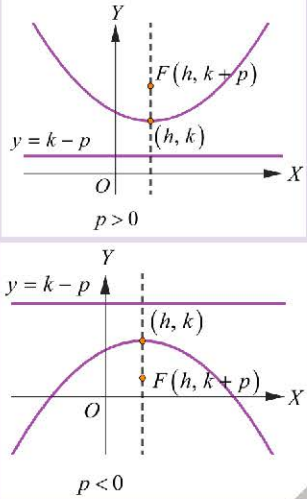
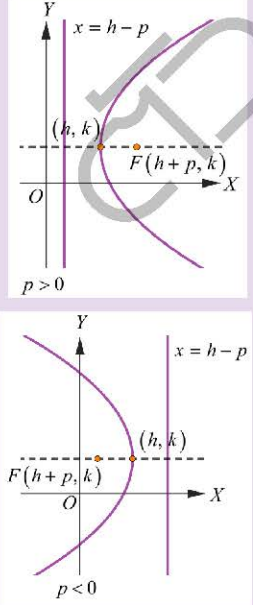
21. **เลตัสเรกตัม** คือ คอร์ดที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและผ่านโฟกัสของพาราโบลา (ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายอยู่บนพาราโบลา เรียกว่า **คอร์ด** ของพาราโบลา)

22. บทนิยาม 6

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า **โฟกัส** ของไฮเพอร์โบลา

23. สรุปเกี่ยวกับกราฟและสมการของภาคตัดกรวยแต่ละชนิดได้ดังนี้

ภาคตัดกรวย	สมการรูปแบบมาตรฐาน และรายละเอียดที่ควรทราบ
วงกลม	
	สมการ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ จุดศูนย์กลาง (h, k) รัศมียาว r หน่วย
วงรี	
	สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, a > b > 0$ แกนเอกอยู่ในแนวนอน จุดศูนย์กลาง (h, k) จุดยอด $(h-a, k), (h+a, k)$ โฟกัส $(h-c, k), (h+c, k); c^2 = a^2 - b^2$ แกนเอกยาว $2a$ หน่วย แกนโทยาว $2b$ หน่วย
	สมการ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, a > b > 0$ แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง จุดศูนย์กลาง (h, k) จุดยอด $(h, k-a), (h, k+a)$ โฟกัส $(h, k-c), (h, k+c); c^2 = a^2 - b^2$ แกนเอกยาว $2a$ หน่วย แกนโทยาว $2b$ หน่วย

ภาคตัดกรวย	สมการรูปแบบมาตรฐาน และรายละเอียดที่ควรทราบ
พาราโบลา	
 Top diagram: $p > 0$ Bottom diagram: $p < 0$	สมการ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง จุดยอด (h, k) โฟกัส $(h, k+p)$ ไดเรกทริกซ์ $y = k-p$ $p > 0$ เส้นโค้งหงายขึ้น $p < 0$ เส้นโค้งคว่ำลง
 Top diagram: $p > 0$ Bottom diagram: $p < 0$	สมการ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน จุดยอด (h, k) โฟกัส $(h+p, k)$ ไดเรกทริกซ์ $x = h-p$ $p > 0$ เส้นโค้งเปิดไปทางขวา $p < 0$ เส้นโค้งเปิดไปทางซ้าย

ภาคตัดกรวย	สมการรูปแบบมาตรฐาน และรายละเอียดที่ควรทราบ
ไฮเพอร์โบลา	
	สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$ แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน จุดศูนย์กลาง (h, k) จุดยอด $(h-a, k), (h+a, k)$ โฟกัส $(h-c, k), (h+c, k); c^2 = a^2 + b^2$ แกนตามขวางยาว $2a$ หน่วย แกนตั้งยาว $2b$ หน่วย สมการเส้นกำกับ คือ $y-k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$
	สมการ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$ แกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง จุดศูนย์กลาง (h, k) จุดยอด $(h, k-a), (h, k+a)$ โฟกัส $(h, k-c), (h, k+c); c^2 = a^2 + b^2$ แกนตามขวางยาว $2a$ หน่วย แกนตั้งยาว $2b$ หน่วย สมการเส้นกำกับ คือ $y-k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$

แบบฝึกทักษะ เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์
(ภาคตัดกรวย)

1. ถ้าวงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $C(2, a)$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง และผ่านจุด $A(2, -2)$ และ $B(5, 7)$ แล้ววงกลมนี้มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวเท่าใด

ตัวอย่าง

2. ให้จุด A และ B เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ และ $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ ตามลำดับ ถ้าวงกลมทั้งสองตัดกันที่จุด C และ D เมื่อจุด C อยู่ในจุดภาคที่ 3 จงหา
- 1) ชนิดของรูปสามเหลี่ยม BCD และความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม BCD

ตัวอย่าง

- 2) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม BCD

ตัวอย่าง

3. จงหาสมการวงกลมที่

- 1) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(a, -5)$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง และผ่านจุด $(4, -1)$ และ $(5, -2)$

- 2) มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดตัดของเส้นตรง $4x - 3y - 12 = 0$ และแกน Y และสัมผัสกับเส้นตรง $6x + 8y = -2$

- 3) มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $2x - y = 0$ และผ่านจุด $(-1, 0)$ และ $(6, 1)$

ตัวอย่าง

- 4) มีส่วนของเส้นตรง AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง โดยที่จุด A เป็นจุดตัดของเส้นตรง $2x + 3y = 3$ และเส้นตรง $3x - 2y = 11$ และจุด B เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด $(-5, 0)$ และตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด $(0, 5)$

ตัวอย่าง

- 5) ผ่านจุดตัดของเส้นตรง $2x + y = 1$ และเส้นตรง $3x - 2y + 9 = 0$ และมีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 38 = 0$

ตัวอย่าง

6) ผ่านจุด $(0, -2)$, $(3, 1)$ และ $(0, 4)$

ตัวอย่าง

4. กำหนดจุด $A(-1, 4)$, $B(5, -2)$ เส้นตรง $x = -5$ เส้นตรง $y = 7$ และเส้นตรง $3x + 4y - 12 = 0$ จงหาสมการวงกลมที่มี
- 1) จุดที่กำหนดให้หนึ่งจุดที่อยู่ในจุดภาคที่ 4 เป็นจุดศูนย์กลางและเส้นตรงที่กำหนดให้ที่ไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y เป็นเส้นสัมผัส
 - 2) จุดที่กำหนดให้หนึ่งจุดเป็นจุดศูนย์กลาง และเส้นตรงที่กำหนดให้หนึ่งเส้นเป็นเส้นสัมผัส โดยที่วงกลมนี้มีรัศมียาวที่สุด

- 3) จุดที่กำหนดให้หนึ่งจุดเป็นจุดศูนย์กลาง และเส้นตรงที่กำหนดให้หนึ่งเส้นเป็นเส้นสัมผัส โดยที่วงกลมนี้นับรัศมีสั้นที่สุด

5. กำหนดจุด $A(3, 2)$, $B(-1, 4)$ และ $C(-4, -1)$ จงหาสมการวงกลมที่มี

- 1) จุดที่กำหนดให้หนึ่งจุดเป็นจุดศูนย์กลาง และอีกหนึ่งจุดเป็นจุดบนวงกลม โดยที่วงกลมนี้นับรัศมียาวที่สุด

- 2) จุดที่กำหนดให้หนึ่งจุดเป็นจุดศูนย์กลาง และอีกหนึ่งจุดเป็นจุดบนวงกลม โดยที่วงกลมนี้มีรัศมีสั้นที่สุด

- 3) จุดที่กำหนดให้สองจุดเป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลาง โดยที่วงกลมนี้มีรัศมียาวที่สุด

6. จากสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$C_1 : x^2 + y^2 + 6x + 10y + 18 = 0$$

$$C_2 : x^2 + y^2 + 8x - 6y - 56 = 0$$

$$C_3 : x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$$

$$C_4 : x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$$

$$C_5 : x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$C_6 : 4x^2 + 4y^2 = 100$$

จงพิจารณาว่า

- 1) สมการใดเป็นสมการวงกลมที่มีพื้นที่น้อยที่สุด
- 2) สมการใดเป็นสมการวงกลมที่มีพื้นที่มากที่สุด
- 3) สมการใดเป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2, 3)$
- 4) สมการใดเป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ในจุดภาคที่ 3 และมีรัศมียาวที่สุด

ตัวอย่าง

7. จงหา

1) a ที่ทำให้กราฟของ $x^2 + y^2 - 8x + 10y + a = 0$ เป็นวงกลมที่มีรัศมียาว 6 หน่วย

2) B เมื่อ $B = \{b \mid \text{กราฟของ } x^2 + y^2 + bx - 8y + 17 = 0 \text{ เป็นวงกลม}\}$

8. ให้จุด A, B, C และ D มีพิกัดเป็น $(-2, 3), (3, 3), (3, -2)$ และ $(-2, -2)$

ตามลำดับ

- 1) ถ้า h, k และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $r > 0$ แล้วจะมีวงกลมที่มีสมการเป็น $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ทั้งหมดกี่วง

ตัวอย่าง



สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology (IPST)

แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ (ภาคตัดกรวย)

เป็นแบบฝึกทักษะที่สอดคล้องกับเนื้อหาในหนังสือเรียน
รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ของ สสวท.
แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์นี้ เหมาะสำหรับครู นักเรียน ผู้ปกครอง หรือ
ผู้ที่สนใจสามารถใช้เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ เสริมทักษะคณิตศาสตร์ และ
ฝึกทำโจทย์คณิตศาสตร์ที่หลากหลาย ควบคู่กับการเรียนในชั้นเรียนได้
เป็นอย่างดี โดยแบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เล่มนี้ ประกอบไปด้วย
กรอบสรุปเนื้อหาสาระ แบบฝึกทักษะ และเฉลยแบบฝึกทักษะพร้อมวิธีทำ
อย่างละเอียด

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

475 อาคารสิริวิทยุ ชั้น 9 ถนนศรีอยุธยา

แขวงถนนพญาไท เขตราชเทวี กรุงเทพฯ 10400

โทรศัพท์ 0-2392-4021 โทรสาร 0-2381-0750

(สำนักงานชั่วคราว)

<https://www.ipst.ac.th>

แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์
เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ (ภาคตัดกรวย)
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6

ISBN xxx-xxx-xxx-xxx-x



ราคา XXX บาท